



ПОВЫШЕНИЕ ЧЕТКОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ

Т. Н. СОЗОНОВА
В. В. КРАСИЛЬНИКОВ

*Белгородский
государственный
университет*

e-mail: sozonova@bsu.edu.ru

В работе изложен новый метод вычисления производных сигнала по его дискретным значениям, основанный на частотных представлениях. А так же применение данного метода для градиентной обработки цифровых изображений с целью повышения их четкости.

Ключевые слова: дифференцирование, четкость изображения, частотные представления, вариационный принцип.

Задача повышения четкости изображений возникает как при решении различных задач науки и техники, так и при обработке любительских фото.

Главная цель повышения четкости изображений заключается в том, чтобы подчеркнуть мелкие детали изображения или улучшить те детали, которые оказались расфокусированы вследствие ошибок или несовершенства самого метода съемки.

Следует отметить, что при решении задачи улучшения визуального качества изображений, не ставится задача восстановления изображения, то есть возвращение к «оригиналу». При повышении резкости иногда следует провести перекомпенсацию искажений, то есть избыточно поднять уровень высокочастотных составляющих пространственного спектра. Эксперименты по психовизуальному оцениванию качества изображения показывают [2], что объект с «неестественно» подчеркнутыми границами визуально воспринимаются лучше, чем идеальные с точки зрения фотометрии.

Расфокусировка изображения является аналогом пространственной операцией усреднения значений точек по окрестности. Поскольку усреднение аналогично интегрированию, следовательно, повышение резкости, будучи явлением, обратным по отношению к расфокусировке, может быть достигнуто пространственным дифференцированием.

Для повышения четкости изображений наиболее часто используются градиентные методы, которые основываются на использовании оценок производных как первого, так и более высоких порядков. Отметим, что рассмотренные методы повышения четкости реализованы в составе пакетов прикладных графических программ, среди которых можно указать Adobe Photoshop, Coral Draw и др.

Реализация градиентных методов заключается в наложении на исходное изображение его оценки производной, в результате чего подчеркиваются границы объектов изображения. Таким образом, результат работы многих методов повышения визуального качества изображений, в частности, повышения четкости, зависит от эффективности оценки производных первого и более высоких порядков.

Операция дифференцирования, вообще говоря, не может быть непосредственно применена к сигналу, который определен лишь в определенных дискретных точках (каковым является цифровое изображение), то есть когда в качестве исходных значений сигнала используются зарегистрированные дискретные значения сигнала. В таких случаях обычно прибегают к приближенному дифференцированию с помощью численных методов. Численные методы вычисления производных, известные по литературным источникам [1,5], отличаются неустойчивостью к быстрым изменениям значений сигнала (высокочастотных компонент), которые могут, в том числе, породиться погрешностями их регистрации и являться неустраняемыми.

В данной работе предлагается новая схема аппроксимации функций и их производных по их дискретным значениям. Она основана на использовании известной из математического анализа формулы, позволяющей выразить дифференцируемую функцию через производную (обозначения очевидны).



$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t f(x)dx, t > t_0.$$

Понятно, что при известном начальном значении и известном способе вычисления производной искомая функция также может быть вычислена с любой заранее оговоренной точностью.

Пусть задан вектор $\vec{u} = (u_0, u_1, \dots, u_N)^T$ отсчётов дискретного сигнала, где $u_i = u(i\Delta t), i = 1, \dots, N, \Delta t$ – интервал дискретизации.

Обозначим $\vec{v} = (v_1, \dots, v_N)^T$, где

$$v_i = u_i - u_{i-1}, i = 1, \dots, N. \tag{1}$$

Введём частотный интервалы:

$$\Omega = (-\Omega_2, -\Omega_1) \cup [\Omega_1, \Omega_2), \tag{2}$$

$$\bar{\Omega} = [-\bar{\Omega}_2, -\bar{\Omega}_1) \cup [\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2),$$

$$\bar{\Omega}_1 = \Delta t * \Omega_1 = q_1 * \pi; \bar{\Omega}_2 = \Delta t * \Omega_2 = q_2 * \pi. \tag{3}$$

В основе дальнейших построений используется представление интерполирующей функций через производную

$$\hat{u}(t) = u_{i-1} + \int_{(i-1)\Delta t}^t f(\tau) d\tau \tag{4}$$

для $\Delta t(i-1) \leq t \leq i\Delta t$.

Тогда для первых разностей исходных данных должно выполняться равенстве

$$v_i = u_i - u_{i-1} = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} f(\tau) d\tau, \tag{5}$$

$f(\tau)$ – первая производная интерполирующей функции, которая является оценкой первой производной неизвестной функции $u(t)$, выборка из которой обрабатывается.

Для достижения устойчивости оценки первой производной используем представление

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} F(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \tag{6}$$

где $F(\omega)$ – трансформанта Фурье

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

В качестве области определения трансформанты Фурье предлагается использовать частотный интервал, в котором сосредоточена основная доля энергии сигнала.

Соотношение для интерполирующей функции на основе трансформанты Фурье производной можно получить путем подстановки представления (6) в правую часть (4).

$$\hat{u}(t) = u_{i-1} + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} F(\omega) (\exp(j\omega t) - \exp(j\omega\Delta t(i-1))) d\omega / j\omega, \tag{7}$$

так что интерполирующие равенства представимы в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} F(\omega) \frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\omega\Delta t/2} \exp(j\omega\Delta t(i-0,5)) d\omega = v_i / \Delta t. \tag{8}$$



Ясно, что такие интерполирующие функции тоже относятся к классу целых. Вместе с тем имеется возможность использовать дополнительные ограничения.

Можно привести достаточно много аргументов использования вариационного принципа

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} |F(\omega)|^2 d\omega = \min.$$

Один из аргументов заключается в целесообразности построения функции с наименьшей в смысле евклидовой нормы производной скорости изменения значений.

Другим важным соображением может служить необходимость повышения устойчивости вычислений к воздействиям случайных ошибок измерений (регуляризация).

Искомое решение вариационной задачи (8),(7) представимо в виде [2,3]

$$F(\omega) \equiv \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)}{\omega \Delta t / 2} \exp(-j\omega \Delta t(i - 0,5)), \quad (9)$$

когда $\omega \in \Omega$, и $F(\omega) \equiv 0$ в противном случае.

Общую формулу для вычисления оценки производной получаем при подстановке последнего представления в соотношение (6)

$$f(\tau) = \sum_{k=1}^N \beta_k * \frac{1}{\pi} \int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \cos(x(\frac{\tau}{\Delta t} - k + 0.5)) dx \quad (10)$$

Коэффициенты β должны удовлетворять системе уравнений (8), на основании чего получаем

$$A\vec{\beta} = \vec{v},$$

где $A = \{a_{ik}\}$ – матрица учета исходных данных (УИД), элементы которой определяются из соотношения

$$a_{ik} = \frac{\Delta t}{\pi} \int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2} \frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} \cos(x(i-k)) dx; i, k = 1, \dots, N. \quad (11)$$

В общем случае матрица УИД может быть особенной, так что для нахождения коэффициентов β необходимо использовать псевдообращение

$$\vec{\beta} = A^{++} \vec{v} \quad (12)$$

$$A^{++} = G_1 L_1^{-1} G_2^T, \quad (13)$$

где G – матрица собственных векторов.

$$AG = GL; G = (\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)$$

$$L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N);$$

$$L_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad (14)$$

если

$$\lambda_{p+1} \cong \lambda_{p+2} \cong \dots \cong \lambda_N \cong 0, \quad (15)$$

где P – оценка ранга матрицы УИД.

$$G = (\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_p). \quad (16)$$

Если заранее выбрать точки в виде



$$\tau_i = (i - 0.5)\Delta t, i = 1, \dots, N, \tag{17}$$

области определения, где необходимо вычислять оценку производной то из (10) получим

$$f_i = f(\tau_i) = \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \cos(x(i-k)) dx. \tag{18}$$

Или для вектора $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)^T, f_i = f(\tau_i),$

$$\vec{f} = B_1 A^{++} \vec{v}, \tag{19}$$

где $B_1 = \{b_{ik}^1\},$

$$b_{ik}^1 = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \cos(x(i-k)) dx. \tag{20}$$

Старшие производные в тех же точках вычисляются на основе дифференцирования (10)

$$\frac{df(\tau)}{d\tau} = \hat{u}^{(2)}(\tau) = -\sum \beta_k \frac{1}{\pi \Delta t} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} x \sin(x(\frac{\tau}{\Delta t} - k + 0.5)) dx. \tag{21}$$

В тех же точках области определения получим

$$B_2 = \{b_{ik}^2\} : b_{ik}^2 = -\frac{1}{\pi \Delta t} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} x \sin(x(i-k)) dx. \tag{22}$$

Вектор оценок вторых производных вычисляется на основе соотношения

$$\vec{f}^{(1)} = (f_1^{(1)}, \dots, f_N^{(1)})^T = B_2 A^{++} \vec{v} = B_2 \vec{\beta}. \tag{23}$$

В рамках данной работы предлагается использовать новый вариационный метод оценки производных для увеличения четкости изображений.

В качестве экспериментальных данных использовались изображения, содержащие оттенки серого с недостаточной четкостью, полученные при помощи цифровой техники, размером $N \times M$ ($y=N, x=M$) пикселей.

На первом этапе эксперимента производилось вычисление матриц $B_x = \{b_{ki}\}; k = 1, \dots, N; i = 1, \dots, N$ и $B_y = \{b_{ki}\}; k = 1, \dots, M; i = 1, \dots, M$ с элементами вида (20) и осуществлялось вычисление второй смешанной производной по выражению

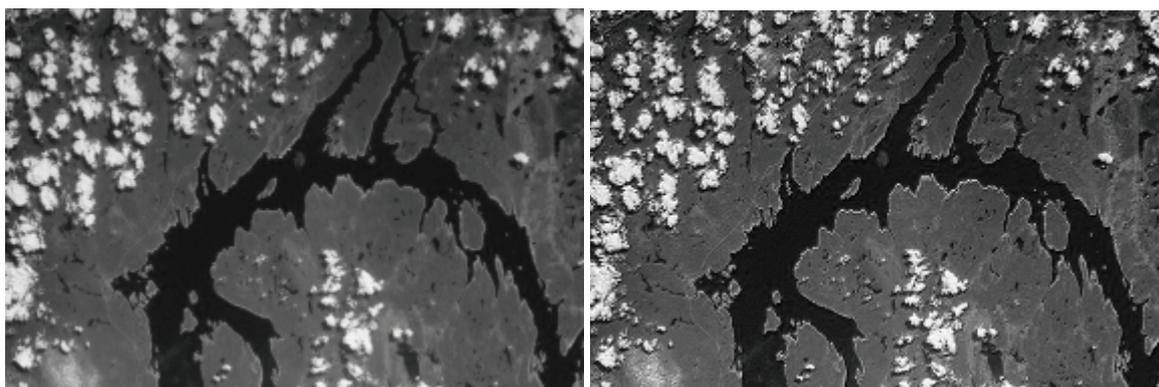
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = B_x A^{-1} \cdot f \cdot B_y A^{-1},$$

где $A_y = \{a_{ij}\}$ – матрица с элементами вида (11), f – исходное изображение.

Затем к исходному изображению добавлялось значение второй смешанной производной, то есть

$$\hat{f} = f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

что позволило получить более четкие, в смысле субъективного восприятия, изображения. Результаты эксперимента представлены на рис. 1-2.



а б
Рис. 1. а) исходное изображение; б) обработанное изображение



а б
Рис. 2. а) исходное изображение; б) обработанное изображение

По результатам эксперимента видно, что предлагаемый алгоритм увеличения четкости изображений позволяет повысить детальность наблюдаемой картины, дает возможность наблюдения мелких деталей на всех участках изображения.

Следует отметить, что данный алгоритм повышения четкости цифровых изображений может быть использован как при обработке снимков земной поверхности, полученных средствами регистрации из космоса, так и для повышения визуального качества любительских снимков.

Литература

1. Вержбицкий, В.М. Численные методы [Текст] / В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2000.
2. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений [Текст] / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2006.
3. Жилияков, Е.Г. Вариационный метод дифференцирования и интерполяции дискретных сигналов [Текст] / Е.Г. Жилияков, С.М. Удинов, Т.Н. Созонова // «Вопросы радиоэлектроники». – Москва, 2006. – выпуск 1. – С. 146-154.
4. Жилияков, Е.Г. Вариационный метод дифференцирования и интерполяции дискретных сигналов [Текст] / Е.Г. Жилияков, С.М. Удинов, Т.Н. Созонова // «Вопросы радиоэлектроники». – Москва, 2006. – выпуск 1. – С. 146-154.
5. Петров, Ю.П. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями: учебное пособие для вузов [Текст] / Ю.П. Петров, В.С. Сизиков. – СПб: Политехника, 2003.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2010 годы. Государственный контракт № П2613.

THE CLEARNESS OF THE IMAGES INCREASING BASED ON THE VARIATIONAL METHOD OF THE ESTIMATION DERIVED

T. N. SOZONOVA
V. V. KRASILNIKOV

Belgorod State University

e-mail: sozonova@bsu.edu.ru

In the article the new calculation method of the derived signal by its discrete importances, founded on frequency presentations is given. The using of the given method for gradient processing of the digital images for the reason of their clearness increasing is also described.

Key words: the differentiation, clearness of the image, frequency presentations, variational principle.