УДК 517.983

ОБРАЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ МЕТОДОМ ОПЕРАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВ

Е.А. Аршава

Харьковский государственный технический университет строительства и архитектуры, ул.Сумская, 40, 61002, г. Харьков, Украина, e-mail: elarshava@mail.ru

Аннотация. Изучается задача обращения некоторых классов интегральных операторов методом операторных тождеств, доказывается конечномерность соответствующих коммутационных операторов и исследуется структура обратного оператора. Полученные результаты используются при решении задачи фильтрации и прогноза нестационарных случайных процессов и сигналов.

Исследуется уравнение со специальной правой частью, к которому сводится решение ряда задач астрофизики, теории переноса излучения.

Ключевые слова: операторные тождества, обратный оператор, обобщенные коммутационные соотношения.

1 Введение

Метод операторных тождеств был впервые применен В.А. Амбарцумяном при изучении проблем астрофизики [1]. Затем В.В. Соболев [2] , В.В. Иванов [3] применили коммутационные соотношения для решения интегральных уравнений, которые возникают в задачах переноса излучения и рассеивания света.

В этих работах использовалась связь интегрального оператора с разностным ядром и оператора дифференцирования, т.е. в коммутационном соотношении присутствовал неограниченный оператор. Такой подход приводил к существенным трудностям при построении общей математической теории.

Наиболее весомый вклад в разработку представленной тематики сделал Л.А. Сахнович [4]. Было предложено вместо оператора дифференцирования использовать несамосопряженный оператор интегрирования. При этом Л.А. Сахновичем рассматривался класс уравнений вида

$$Sf = \frac{d}{dx}\int_0^{\omega} S(x-t)f(t)dt = \varphi(x), \qquad (1)$$

который является наиболее общим классом уравнений с разностным ядром. Это дало возможность Л.А. Сахновичу с единой точки зрения исследовать различные виды уравнений с разностным ядром как первого, так и второго рода.

Основная идея метода состоит в доказательстве конечномерности соответствующего интегрального оператора. В этом случае обратный оператор к данному интегральному оператору строится при помощи функций, которые определяют вырожденность коммутационного оператора.

В работах И.И. Кальмушевского, А.Б. Нерсесяна, А.Л. Сахновича и др. Метод операторных тождеств использовался при изучении систем интегральных уравнений с разностным ядром, сумматорных уравнений с матрицей коэффициентов Тёплица, двумерных интегральных уравнений.

2 Построение обратного оператора

Рассмотрим задачу обращения оператора вида

$$Sf = L_x(\alpha)\int_0^\omega S(x,t)f(t)dt \tag{2}$$

с ядром $S(x,t) = 0$, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа

$$(L_x(\alpha) - L_t(\alpha))S(x,t) = 0, \qquad L_x(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \alpha = \overline{\alpha} \neq 0, \tag{3}$$

Можно доказать, что для любого ограниченного оператора вида (2) с ядром, которое удовлетворяет условиям (3), имеют место соотношения:

$$(A_0S - SA_0^*)f = \int_0^\omega \left(M_1(x) + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}M_2(x) + M_3(t) + \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}M_4(t)\right)f(t)dt, \tag{4}$$

где $\begin{array}{l} A_0 = L_x^{-1}(\alpha), \quad M_1(x) = S(x,0), \quad M_2(x) = S'(x,0), \\ M_3(t) = -S(0,t), \quad M_4(t) = -S'(0,t), \quad f(t) \in L_2(0,\omega). \end{array}$

Если оператор S имеет ограниченный обратный T, тогда верно представление:

$$(TA_0 - A_0^*T)f = \int_0^\omega R(x,t)f(t)dt,$$

где $R(x,t) = \sum_{i=1}^{4} P_i^*(t)Q_i(x)$, кроме того, для $P_i(t)Q_i(x)$, $(i = \overline{1,4})$ выполняются соотношения вида:

$$\begin{array}{llll} S^*P_1 = 1, & S^*P_2 = M_3^*(t), & S^*P_3 = M_4^*(t), & S^*P_4 = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}, \\ SQ_1 = M_1(x), & SQ_2 = 1, & SQ_3 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}, & SQ_4 = M_2(x). \end{array} \tag{5}$$

Если оператор S ограничен вместе со своим обратным оператором T и существуют функции $P_i(t), Q_i(x), (i = \overline{1,4})$, которые удовлетворяют соотношениям (5), тогда для оператора $T = S^{-1}$ имеет место интегральное представление:

$$Tf = L_x(\alpha)\int_0^\omega f(t)L_t(-\alpha)\Phi(x,t)dt,$$

где $\Phi(x,t)$ выражается через ядро оператора $R = (TA_0 - A_0^*T)$, $f(t) \in L_2(0,\omega)$.

Полученные результаты перенесены на случай обобщенных функций вида:

$$f(x) = \gamma\delta(x) + \beta\delta(\omega - x) + g(x), g(x) \in L_2(0,\omega), \delta(x) - \text{дельта-функция Дирака.}$$

4 Уравнение со специальной правой частью

На основе полученных результатов рассмотрим уравнение со специальной правой частью, которое играет существенную роль в астрофизике, теории переноса излучения

$$Sf = e^{i\lambda x},$$

где S оператор вида (2).

Легко доказать, что если функции $M_1(x)$, $M_2(x)$, x, $\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}$ и 1, где $M_1(x)$, $M_2(x)$ определены формулами (5), принадлежат области значений оператора $S-R_S$, тогда R_S плотно в $L_2(0,\omega)$.

Пусть

$$SL_m = x^{m-1},\ (m=\overline{1,\infty}). \tag{7}$$

Покажем, что существуют функции L_m, которые удовлетворяют соотношениям (7). Полагая в (4) сначала, $f=\frac{1}{\alpha}L_m$, а потом $f=\frac{1}{m}L_{m+1}$ и складывая полученные результаты, имеем:

$$\frac{x^{m+1}}{\alpha m(m+1)} = S\left[\int\limits_x^\omega \frac{1-e^{\alpha(x-t)}}{\alpha}\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt+\right.$$

$$+\int\limits_0^\omega \left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_1(x)+\int\limits_0^\omega \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_2(x)+$$

$$\left.+\int\limits_0^\omega M_3(t)\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_3(x)+\int\limits_0^\omega M_4(t)\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_4(x)\right],$$

где функции $N_i(x)$, $(i=\overline{1,4})$, такие, что

$$SN_1=M_1(x),\ SN_2=M_2(x),\ SN_3=1,\ SN_4=\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}.$$

Эти функции существуют, т.к. $M_1(x)$, $M_2(x)$, 1, $\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}$ из R_S.

Следовательно,

$$\frac{L_{m+2}}{m(m+1)} = \int\limits_x^\omega \frac{1-e^{\alpha(x-t)}}{\alpha}\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt+\int\limits_0^\omega\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_1(x)+$$

$$+\int\limits_0^\omega \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_2(x)+\int\limits_0^\omega M_3(t)\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_3(x)+$$

$$+\int\limits_0^\omega M_4(t)\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_4(x). \tag{8}$$

По условию существуют $L_1(x)=N_3(x)$, $L_2(x)=S^{-1}x$. Соотношения (8) определяют все последующие члены последовательности $L_m(x)$. Таким образом, $x^m\in R_S$ при $(m=\overline{0,\infty})$.

Пусть существуют такие функции $N_i \in L_2(0,\omega)$, $(i=\overline{1,4})$, что выполняются равенства:

$$SN_1 = M_1(x),\ SN_2 = M_2(x),\ SN_3 = 1,\ SN_4 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}. \tag{9}$$

Тогда верны соотношения:

$$S^*\hat{M}_1 = 1,\ S^*\hat{M}_2 = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha},\ S^*\hat{M}_3 = \overline{M_3(t)},\ S^*\hat{M}_4 = \overline{M_4(t)},$$

где

$$\hat{M}_1(t) = \overline{N_3(\omega-t)}, \qquad \hat{M}_2(t) = \overline{N_4(t)},$$
$$\hat{M}_3(t) = \frac{1-e^{\alpha(\omega-t)}}{\alpha} + \overline{N_1(\omega-t)} - \frac{1-e^{\alpha\omega}}{\alpha}\overline{N_2(t)},$$
$$\hat{M}_4(t) = -\alpha\overline{N_1(\omega-t)} - \overline{N_2(\omega-t)} - \alpha\overline{N_1(t)} - 1.$$

Если оператор S является ограниченным и существуют функции $N_i \in \in L_2(0;\omega)$, $(i=\overline{1,4})$, удовлетворяющие равенствам (9), тогда имеют место следующее представление:

$$SB(x,\lambda) = e^{i\lambda x},$$

где

$$B(x,\lambda) = u(x,\lambda) + \frac{i\lambda\alpha - \lambda^2}{\alpha+2i\lambda}\int\limits_0^x u(t,\lambda)\cdot\left(e^{i\lambda(t-x)} + e^{(\alpha+i\lambda)(x-t)}\right)dt,$$

$$u(x,\lambda) = a(\lambda)N_1(x) + b(\lambda)N_2(x) + c(\lambda)N_3(x) + d(\lambda)N_4(x),$$

$$a(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right)N_3(\omega-t)dt, \quad b(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right)N_4(t)dt,$$

$$c(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right)\left(\frac{1-e^{\alpha(\omega-t)}}{\alpha} + N_1(\omega-t) - \frac{1-e^{\alpha\omega}}{\alpha}N_2(t)\right)dt,$$

$$d(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right)\left(-\alpha N_1(\omega-t) - N_2(\omega-t) - \alpha N_1(t) - 1\right)dt.$$

5 Обобщенные коммутационные соотношения

Рассмотрим задачу обращения оператора S вида

$$Sf = e^{-x}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\omega e^{-t}S(x,t)f(t)dt. \tag{10}$$

Пусть операторы R и T определены следующим образом

$$Rf = f(x) - 2\int\limits_0^x sh(x-t)f(t)dt, \qquad Tf = f(x) - 2\int\limits_x^\omega e^{x-t}f(t)dt,$$

а ядро оператора (10) удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} - 2I\right) S(x,t) = 0$$

Если предположить, что $S(x,t) = e^{x+3t}\tilde{S}(x,t)$, тогда для конечномерности оператора $S - RST$ достаточно, чтобы $\tilde{S}(x,t)$ удовлетворяло уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{S}(x,t) = 0.$$

Легко доказать, что имеют место соотношения:

$$(S - RST)f = \int\limits_0^\omega (K_1(x)L_1(t) + K_2(x)L_2(t))\, f(t)dt,$$

где $K_1(x) = 4shx$, $K_2(x) = -2shx$, $L_1(t) = e^{-t}\int\limits_0^t S(0,\xi)d\xi$, $L_2(t) = S(0,t)$.

Используя изложенный подход, можно рассмотреть случай оператора $S - RSR^*$. Тогда

$$(S - RSR^*)f = Sf(x) - RS\left(f(x) - \int\limits_x^\omega e^{t-x}f(t)dt + \int\limits_x^\omega e^{x-t}f(t)dt\right) =$$

$$= Sf(x) - R\left(Sf(x) - e^{-x}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\omega e^{-t}S(x,t)\int\limits_t^\omega e^{\xi-t}f(\xi)d\xi dt +\right.$$

$$\left. + e^{-x}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\omega e^{-t}S(x,t)\int\limits_t^\omega e^{t-\xi}f(\xi)d\xi dt\right) = \int\limits_0^\omega (O_1(x)H_1(t) + O_2(x)H_2(t))f(t)dt,$$

где

$$O_1(x) = -2shx, \qquad O_2(x) = -4shx,$$
$$H_1(t) = e^{-t}S(0,t), \quad H_2(t) = \int\limits_0^t sh(t-\xi)e^{-\xi}S(0,\xi)d\xi,$$

а ядро $S(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) - 2I\right] S(x,t) = 0.$$

Для оператора $Q = S^{-1}$, если он существует и ограничен, верно равенство:

$$(Q - R^*QR)f = \int\limits_0^\omega (G_1(x)\Pi_1^*(t) + G_2(x)\Pi_2^*(t))f(t)dt,$$

где

$$S(R^*)^{-1}G_1 = -2shx, \quad S(R^*)^{-1}G_2 = -4shx,$$
$$RS^*\Pi_1^* = \overline{S(0,t)}, \qquad RS^*\Pi_2^* = \overline{\int\limits_0^t sh(t-\xi)e^{-\xi}S(0,\xi)d\xi}.$$

Найдем общий вид обратного оператора Q. Пусть

$$Qf = e^{-x}\frac{d}{dx}\int_0^\omega e^{-t}Q(x,t)f(t)dt, \tag{11}$$

а ядро $Q(x,t)$ удовлетворяет условию $Q(\omega,t)=0$.

Тогда

$$TQRf = \int_0^\omega \Bigg(e^{-x-t}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,t) - e^{-x-t}\int_t^\omega \frac{\partial}{\partial x}Q(x,\xi)d\xi + 2e^{-x-t}Q(x,t) +$$

$$+e^{-x+t}\int_t^\omega e^{-2\xi}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,\xi)d\xi - 4e^{x-t}\int_x^\omega Q(\xi,t)e^{-2\xi}d\xi -$$

$$-2e^{-x-t}\int_t^\omega Q(x,\xi)d\xi + 4e^{x-t}\int_x^\omega e^{-2\xi}\int_t^\omega Q(\xi,\tau)d\tau d\xi +$$

$$+\,2e^{-x+t}\int_t^\omega e^{-2\xi}Q(x,\xi)d\xi - 4e^{x+t}\int_x^\omega e^{-2\xi}\int_t^\omega e^{-2\tau}Q(\xi,\tau)d\tau d\xi \Bigg) f(t)dt.$$

Введем оператор

$$Q_1 f = \int_0^\omega \Phi(x,t)f(t)dt,$$

где

$$\Phi(x,t) = e^{-x-t}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,t) - e^{-x-t}\int_t^\omega \frac{\partial}{\partial x}Q(x,\xi)d\xi + 2e^{-x-t}Q(x,t) +$$

$$+e^{-x+t}\int_t^\omega e^{-2\xi}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,\xi)d\xi - 4e^{x-t}\int_x^\omega Q(\xi,t)e^{-2\xi}d\xi -$$

$$-2e^{-x-t}\int_t^\omega Q(x,\xi)d\xi + 4e^{x-t}\int_x^\omega e^{-2\xi}\int_t^\omega Q(\xi,\tau)d\tau d\xi +$$

$$+2e^{-x+t}\int_t^\omega e^{-2\xi}Q(x,\xi)d\xi - 4e^{x+t}\int_x^\omega e^{-2\xi}\int_t^\omega e^{-2\tau}Q(\xi,\tau)d\tau d\xi. \tag{12}$$

То есть $Q_1 f = TQRf$. В этом случае

$$(Q_1 - TQ_1R)f = TDRf = Cf = \int_0^\omega C(x,t)f(t)dt,$$

где ядро

$$C(x,t) = e^{-x-t}\frac{\partial}{\partial x}D(x,t) - e^{-x-t}\int_t^\omega \frac{\partial}{\partial x}D(x,\xi)d\xi + 2e^{-x-t}D(x,t)+$$

$$+e^{-x+t}\int_t^\omega e^{-2\xi}\frac{\partial}{\partial x}D(x,\xi)d\xi - 4e^{x-t}\int_x^\omega D(\xi,t)e^{-2\xi}d\xi-$$

$$-2e^{-x-t}\int_t^\omega D(x,\xi)d\xi + 4e^{x-t}\int_x^\omega e^{-2\xi}\int_t^\omega D(\xi,\tau)d\tau d\xi+$$

$$+2e^{-x+t}\int_t^\omega e^{-2\xi}D(x,\xi)d\xi - 4e^{x+t}\int_x^\omega e^{-2\xi}\int_t^\omega e^{-2\tau}D(\xi,\tau)d\tau d\xi. \qquad (13)$$

С другой стороны

$$Cf = (Q_1 - TQ_1R)f = \int_0^\omega \Phi(x,t)f(t)dt - TQ_1\cdot\left(f(x) - \int_0^x e^{x-t}f(t)dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^x e^{t-x}f(t)dt\right) = \int_0^\omega \Phi(x,t)f(t)dt - T\cdot\left(\int_0^\omega \Phi(x,t)f(t)dt-\right.$$

$$\left.-\int_0^\omega \Phi(x,t)\int_0^t e^{t-\xi}f(\xi)d\xi dt + \int_0^\omega \Phi(x,t)\int_0^t e^{\xi-t}f(\xi)d\xi dt\right) =$$

$$= \int_0^\omega\left(\int_t^\omega e^{\xi-t}\Phi(x,\xi)d\xi - \int_t^\omega e^{t-\xi}\Phi(x,\xi)d\xi - 2\int_x^\omega e^{x-\xi}\Phi(\xi,t)d\xi+\right.$$

$$\left.+2e^{x-t}\int_x^\omega e^{-\xi}\int_t^\omega e^{\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau d\xi - 2e^{x+t}\int_x^\omega e^{-\xi}\int_t^\omega e^{-\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau d\xi\right) f(t)dt.$$

Следовательно,

$$C(x,t) = \int_t^\omega e^{\xi-t}\Phi(x,\xi)d\xi - \int_t^\omega e^{t-\xi}\Phi(x,\xi)d\xi - 2\int_x^\omega e^{x-\xi}\Phi(\xi,t)d\xi+$$

$$+2e^{x-t}\int_x^\omega e^{-\xi}\int_t^\omega e^{\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau d\xi - 2e^{x+t}\int_x^\omega e^{-\xi}\int_t^\omega e^{-\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau d\xi.$$

Дифференцирование полученного равенства приводит к уравнению

$$2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} - 4I\right)\Phi(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - I\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - I\right)C(x,t). \qquad (14)$$

Применяя соотношения (11)-(14), можно восстановить обратный оператор.

Пусть задан ограниченный в $L_2(0,\omega)$ оператор S вида (2).
Оператор $\tilde{A}f = A_0^2 f$, где

$$A_0 f = \int\limits_0^x \frac{1-e^{\alpha(\xi-x)}}{\alpha} f(\xi)d\xi. \qquad (15)$$

Выясним, при каких условиях оператор $\tilde{A}S - S\tilde{A}^*$ представляет собой конечномерный оператор. Учитывая (15), получаем

$$\tilde{A}f = \int\limits_0^t (t-\xi)\frac{1+e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha^2} f(\xi)d\xi + 2\int\limits_0^t \frac{e^{\alpha(\xi-t)}-1}{\alpha^3} f(\xi)d\xi,$$

$$\tilde{A}^* f = \int\limits_t^\omega (\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2} f(\xi)d\xi + 2\int\limits_t^\omega \frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3} f(\xi)d\xi.$$

Тогда имеет место соотношение

$$(\tilde{A}S - S\tilde{A}^*)f = \int\limits_0^\omega (N_1(t)M_1(\tau) + N_2(t)M_2(\tau))f(\tau)d\tau,$$

где

$$M_1(\tau) = S'(0,\tau), \qquad M_2(\tau) = S(0,\tau),$$

$$N_1(t) = -\frac{t}{\alpha^2}(1+e^{-\alpha t}) + \frac{2}{\alpha^3}(1-e^{-\alpha t}), \qquad N_2(t) = -\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha},$$

при этом ядро интегрального оператора должно удовлетворять уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right] S(t,\tau) = 0.$$

Если у оператора S вида (2) существует ограниченный обратный T, то он удовлетворяет соотношению

$$(T\tilde{A} - \tilde{A}^* T)f = \int\limits_0^\omega (Q_1(t)P_1^*(\tau) + Q_2(t)P_2^*(\tau))f(\tau)d\tau,$$

где

$$S^* P_1 = M_1^*, \quad S^* P_2 = M_2^*, \quad SQ_1 = N_1, \quad SQ_2 = N_2.$$

Рассмотрим аналогичную задачу для оператора $\tilde{A}S - SB$, когда

$$\tilde{A}f = \int\limits_0^t (t-\xi)\frac{1+e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha^2} f(\xi)d\xi + 2\int\limits_0^t \frac{e^{\alpha(\xi-t)}-1}{\alpha^3} f(\xi)d\xi,$$

$$Bf = \int\limits_0^t \frac{1-e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha} f(\xi)d\xi.$$

В этом случае получаем

$$(\tilde{A}S - SB)f = \int_0^\omega (N_1(t)M_1(\tau) + N_2(t)M_2(\tau))f(\tau)d\tau,$$

где

$$M_1(\tau) = S'(0,\tau), \qquad M_2(\tau) = S(0,\tau),$$

$$N_1(t) = -\frac{t}{\alpha^2}(1+e^{-\alpha t}) + \frac{2}{\alpha^3}(1-e^{-\alpha t}), \qquad N_2(t) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha},$$

при этом ядро интегрального оператора должно удовлетворять уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\right] S(t,\tau) = 0.$$

Обратный оператор T к оператору S вида (2) удовлетворяет соотношению

$$(T\tilde{A} - BT) = \int_0^\omega R(t,\tau)f(\tau)d\tau,$$

где

$$R(t,\tau) = Q_1(t)P_1^*(\tau) + Q_2(t)P_2^*(\tau),$$

$$S^*P_1 = M_1^*, \quad S^*P_2 = M_2^*, \quad SQ_1 = N_1, \quad SQ_2 = N_2.$$

Пусть

$$Tf = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx}\right)\int_0^\omega F(x,t)f(t)dt, \tag{16}$$

причем

$$F(\omega,0) = 0, \quad \int_0^\omega |F(x+\Delta x,t) - F(x,t)|^2 dt \le \|T\|^2 |\Delta x|.$$

Можно показать, что

$$BT\tilde{A}f = \int_0^\omega f(t)\int_t^\omega \left(-\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}F'(0,\xi) + F(x,\xi) - e^{-\alpha x}F(0,\xi)\right) \times$$

$$\times \left((\xi - t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2} + 2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right) d\xi dt.$$

Обозначим через $T_1 f = \int_0^\omega G(x,t)f(t)dt$, где

$$G(x,t) = \int_t^\omega \left(-\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}F'(0,\xi) + F(x,\xi) - e^{-\alpha x}F(0,\xi)\right) \times$$

$$\times\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi dt, \tag{17}$$

$G(x,\omega)=0.$

Тогда $T_1f=BT\tilde{A}f$ и $T_1\tilde{A}-BT_1=H$, $Hf=BR\tilde{A}f=\int\limits_0^\omega H(x,t)f(t)dt$,

$$H(x,t)=\int\limits_t^\omega\left(-\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}R'(0,\xi)+R(x,\xi)-e^{-\alpha x}R(0,\xi)\right)\times$$

$$\times\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi. \tag{18}$$

Так как

$$(T_1\tilde{A}-BT_1)f=\int\limits_0^\omega f(t)\int\limits_t^\omega G(x,\xi)\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi dt-$$

$$-\int\limits_0^\omega f(t)\int\limits_0^x G(\xi,t)\frac{1-e^{\alpha(\xi-x)}}{\alpha}d\xi dt,$$

имеет место уравнение

$$\int\limits_t^\omega G(x,\xi)\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi-$$

$$-\int\limits_0^x G(\xi,t)\frac{1-e^{\alpha(\xi-x)}}{\alpha}d\xi=H(x,t).$$

Дифференцируя последнее уравнение по x и по t, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)H(x,t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)G(x,t). \tag{19}$$

Таким образом, с помощью формул (16)-(19) можно получить представление для обратного оператора T.

6 Выводы и перспективы дальнейших исследований

Метод операторных тождеств является современным математическим аппаратом для исследования многих теоретических и прикладных задач теории линейных операторов. Представляет интерес рассмотреть задачу обращения интегрального оператора на основе двух операторных тождеств. В этом случае в качестве интегрального оператора имеет смысл рассматривать ограниченный оператор в $L_2(U)$, где

$U=\{x; 0<x_1<\omega_1,\ 0<x_2<\omega_2\}$ – прямоугольник на плоскости, вида

$$Sf = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_U V(x,t)f(t)dt,\ x=(x,t),\ t=(t_1,t_2),\ V(x,t)\in L_2(u),\ \forall x\in U.$$

Такое представление для оператора верно при $k=1$, $j=2$; $k=2$, $j=1$.

Рассматриваются операторы

$$\hat{A}_1 f = \int\limits_0^{x_1}(t_1-x_1)f(t_1,x_2)dt_1,\quad \hat{A}_1 f = \int\limits_{x_1}^{\omega_1}(x_1-t_1)f(t_1,x_2)dt_1,$$

$$\hat{A}_2 f = \int\limits_0^{x_2}(t_2-x_2)f(x_1,t_2)dt_2,\quad \hat{A}_2 f = \int\limits_{x_2}^{\omega_2}(x_2-t_2)f(x_1,t_2)dt_2,$$

то есть $\hat{A}_1 = A_1^2$, $\hat{A}_2 = A_2^2$, где $A_1 f = i\int\limits_0^{x_1} f(t_1,x_2)dt_1$, $A_2 f = i\int\limits_0^{x_2} f(x_1,t_2)dt_2$.

Литература

1. В.А. Амбарцумян. Научные труды. - Ереван, 1960.,
2. В.В. Соболев. Рассеяние света в атмосферах планет. - М.: Наука. 1972.
3. В.В. Иванов. Перенос излучения и спектры небесных тел. - М.: Наука. 1969.
4. Л.А. Сахнович. Уравнение с разностным ядром на конечном отрезке. // Успехи математических наук. - М.,1980. - Т.35, Вып. 4 (214). С. 69-129.
5. В.С.Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. - М.: ГТТИ, 1957.

THE INVERSING OF INTEGRAL OPERATORS BY THE METHOD OF OPERATOR IDENTITIES

E.A. Arshava

Kharkiv State Technical University of Civil Engineering and Architecture,
Sumskaya str., 40, Kharkiv, 61002, Ukraine, e-mail: elarshava@mail.ru

Abstract. The problem of integral operator's inversing on the finite interval, whose kernel satisfies to the differential equation in the particular of a hyperbolic type, is studied by the operator identities method. The generalized commutations relations are investigated and the sufficient conditions of the finite-dimensionness of the corresponding commutation operator are obtained.

The equation with a special right part to which the decision of some problems of astrophysics is reduced, theories of carry of radiation is investigated.

Keywords: operator identities, inverse operator, generalized commutation relations.