УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Г.О. Бузыкин, В.И. Власов

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: gbuzykin@newmail.ru,vlasov@ccas.ru

Аннотация. Изложено теоретическое обоснование двух вариационных методов решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоских областях $\mathcal{B}$: метода наименьших квадратов и метода Треффца. Предварительно установлен ряд утверждений для соответствующих этим методам функциональных пространств: пространства Харди $e_2(\mathcal{B})$ и пространства Вейля $I_2^1(\mathcal{B})$ функций, гармонических в $\mathcal{B}$. Проведенное численное исследование показало экспоненциальный характер сходимости этих методов.

Ключевые слова: уравнение лапласа, вариационные методы, метод наименьших квадратов, метод Треффца, пространства Харди, пространства Вейля.

1 Введение

1.1. Рассматриваемые методы. Настоящая работа посвящена двум вариационным методам решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u(z) = 0, \ z \in \mathcal{B}, \qquad u(z') = h(z'), \ z' \in \Gamma, \tag{1.1}$$

в расположенных на комплексной плоскости $z = x+iy$ односвязных областях $\mathcal{B}$ с кусочно-гладкой границей Γ: методу наименьших квадратов [1]-[4] и методу Треффца [2], [4], [5]. В этих методах в качестве аппроксимативной используется система функций $\xi_k(z)$ — гармонических многочленов, — определяемых по формулам

$$\xi_0(z) := 1, \quad \xi_{2k-1}(z) := \operatorname{Re}(z-z_0)^k, \quad \xi_{2k}(z) := \operatorname{Im}(z-z_0)^k, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а z_0 — некоторая точка комплексой плоскости $\mathbb{C}$. Метод наименьших квадратов является вариационным в пространстве Харди $e_2(\mathcal{B})$, а метод Треффца — в пространстве Вейля $I_2^1(\mathcal{B})$; эти пространства определены соответственно в [6]-[8] и [9].

Рассматриваемые методы дают решение задачи (1.1) в виде предела последовательности приближенных решений u^N (N — верхний индекс), определяемых как линейная комбинация первых N функций ξ_k,

$$u = \lim_{N\to\infty} u^N, \qquad u^N = \sum_{k=0}^{N} a_k^N \xi_k, \tag{1.3}$$

Работа поддержана РФФИ (гранты 07-01-00500, 07-01-00503), программой фундаментальных исследований ОМН РАН №3 "Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач" и программой РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики"

где коэффициенты a_k^N выбираются из условия минимума отклонения приближенного решения $u^N(z)$ от точного $u(z)$ в норме соответствующего пространства.

1.2. Содержание работы. В разд. 2 даны основные положения теории пространств Харди $e_2(\mathcal{B})$, а также приведены утверждения, относящиеся к обоснованию метода наименьших квадратов, включая предложения о сходимости последовательности $\{u^N\}_N$ приближенных решений (1.3) и аппроксимативных свойствах системы (1.2). Отмечено, что при уловии отсутствия внешних и внутренних заострений контура Γ эта система полна в $e_2(\mathcal{B})$, а условие $z_0 \in \mathcal{B}$ является необходимым и достаточным для ее минимальности; при этом условии последовательности $\{a_k^N\}_N$ коэффициентов из (1.3) имеют пределы a_k.

В разд. 3 дана теорема об изоморфизме пространства Вейля $I_2^1(\mathcal{B})$ функций $u(z)$ в области $\mathcal{B}$ и проствакства $I_2^{1/2}(\Gamma)$ их следов $u(z')$ на границе Γ, доказанная на основе установленного неравенства Пуанкаре для простанства Соболева — Слободецкого $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Эта теорема, в частности, включает однозначную разрешимость задачи (1.1) в пространстве $I_2^1(\mathcal{B})$ с граничной функцией из $I_2^{1/2}(\Gamma)$. Проведено также обоснование метода Треффца, включая сходимость $\{u^N\}_N$ к решению $u(z)$ задачи (1.1).

Кроме того, установлено, что сходимость $u^N(z)$ к $u(z)$ внутри области $\mathcal{B}$ имеет экспоненциальный характер, и такой же характер имеет сходимость последовательности коэффициентов $\{a_k^N\}_N$ к своим предельным значениям a_k при условии минимальности системы (1.2). Если же $z_0 \notin \mathcal{B}$ и, значит, система (1.2) не минимальна, то последовательность $\{a_k^N\}_N$ расходится с экспоненциальной скоростью. Тем не менее, сходимость внутри $\mathcal{B}$ последовательности приближенных решений $\{u^N\}_N$ к точному $u(z)$ и в этом случае имеет экспоненциальный характер.

1.3. Функциональные пространства. Если $\mathcal{A}$ — пространство элементов α с заданной на нем мерой μ, то через $L_p(\mathcal{A})$, $p \geq 1$, как обычно [10], обозначаем банахово пространство измеримых на $\mathcal{A}$ функций f, имеющих конечную норму $\|f;\, L_p(\mathcal{A})\| = \left(\int_{\mathcal{A}} |f(\alpha)|^p\, d\mu\right)^{1/p}$. При $p = 2$ соответствующее пространство $L_2(\mathcal{A})$ является гильбертовым со скалярным произведением элементов f и g, определяемым по формуле $\left(f,\, g;\, L_2(\mathcal{A})\right) = \int_{\mathcal{A}} f(\alpha)\, g(\alpha)\, d\mu$.

Если $\mathcal{B}$ — плоская область, то пространство Соболева $W_2^1(\mathcal{B})$ представляет собой гильбертово пространство функций из $L_2(\mathcal{B})$, имеющих квадратично суммируемые по $\mathcal{B}$ обобщенные производные первого порядка; определения обобщенных производных и общих пространств Соболева приведены, например, в [11]-[13].

Через $\dot{C}^\infty(\mathcal{B})$, как обычно [12], обозначаем совокупность бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\mathcal{B}$.

2 Метод наименьших квадратов

2.1. Пространство Харди $e_2(\mathcal{B})$. Пусть жорданова область $\mathcal{B}$ ограничена кусочно гладким контуром Γ, гладкие звенья которого соединяются под углами $\pi\alpha_q$ $(q = 1, \ldots, Q)$. Если для всех q выполняются условия $\alpha_q \in (0, 2)$, то будем говорить, что $\mathcal{B} \in (PS)$.

Обозначим через $z = \omega(\zeta)$ конформное отображение круга $\mathbb{U} := \{|\zeta| < 1\}$ на $\mathcal{B}$, а через $\zeta = \chi(z)$ — обратное отображение; границу круга $\mathbb{U}$ обозначим через $\mathbb{T}$.

Пространство Харди $e_2(\mathcal{B})$ состоит из гармонических в $\mathcal{B}$ функций с равномерно по $r \in (0, 1)$ ограниченными L_2–нормами по контурам Γ_r, параллельным границе Γ и определяемым[‡] по формуле $\Gamma_r := \omega\left(\{|\zeta| = r\}\right)$.

Если $\mathcal{B} \in (PS)$, то, как показано в [6]-[8], функция $u(z) \in e_2(\mathcal{B})$ имеет след $u(z')$ из $L_2(\Gamma)$, понимаемый как некасательные предельные значения, и справедлив аналог теоремы Ф.Рисса[§]:

$$\lim_{r\to 1}\int_{\Gamma_r}\left|u(z)\right|^2|dz| = \int_{\Gamma}\left|u(z')\right|^2|dz'|, \qquad \lim_{r\to 1}\int_{\Gamma_r}\left|u(z_r) - u(z')\right|^2|dz'| = 0, \tag{2.1}$$

где $z_r = \omega\left(r\,\chi(z')\right)$. Отсюда, в частности, следует, что $e_2(\mathcal{B})$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\left(u(z),\, v(z);\; e_2(\mathcal{B})\right) = (u,\, v) := \left(u(z'),\, v(z');\; L_2(\Gamma)\right)$$

и нормой $\|u(z);\; e_2(\mathcal{B})\| = \|u\| := \|u(z');\; L_2(\Gamma)\|$.

Установлено также, что для произвольной функции $h(z') \in L_2(\Gamma)$ существует единственное в классе $e_2(\mathcal{B})$ решение $u(z)$ задачи Дирихле (1.1), для которого (почти всюду на Γ) выполняется равенство $u(z') = h(z')$.

Таким образом, оператор $\mathbb{S}$, ставящий в соответствие каждой функции $u(z) \in e_2(\mathcal{B})$ ее след $u(z') \in L_2(\Gamma)$, устанавливает изометрический изоморфизм пространств $e_2(\mathcal{B})$ и $L_2(\Gamma)$.

Если $\mathcal{B} \in (PS)$, $\mathcal{E}$ — компакт в $\mathcal{B}$, δ — расстояние от $\chi(\mathcal{E})$ до окружности $\mathbb{T}$, а l, t — неотрицательные целые числа, то для решения $u(z)$ задачи (1.1) с граничной функцией $h(z') \in L_2(\Gamma)$ и его производных $D^{(l,t)}u(z)$ имеет место оценка

$$\max_{z\in\mathcal{E}}\left|D^{(l,t)}u(z)\right| \le \frac{A_{l+t}}{\delta^{l+t+1}}\left\|h;\; L_2(\Gamma)\right\|, \tag{2.2}$$

где множитель A_{l+t} не зависит от функции $u(z)$; в частности

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\left\|\frac{1}{\omega'};\; L_1(\mathbb{T})\right\|^{1/2}, \qquad A_1(\delta) = A_0\max_{z\in\mathcal{E}}\left|\chi'(z)\right|. \tag{2.3}$$

2.2. Аппроксимативные свойства системы $\{\xi_k\}$ и метод наименьших квадратов. Согласно [7], если $\mathcal{B} \in (PS)$, то система $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$, определяемая по формуле (1.2), полна в пространстве $e_2(\mathcal{B})$ при любом $z_0 \in \mathbb{C}$, а для ее минимальности в $e_2(\mathcal{B})$ необходимо и достаточно, чтобы $z_0 \in \mathcal{B}$.

Метод наименьших квадратов (см. [1]-[8]) применительно к задаче (1.1) с граничной функцией $h \in L_2(\Gamma)$ заключается в построении ее решения в виде (1.3), где коэффициенты a_k^N находятся из условия $\left\|h - u^N;\; L_2(\Gamma)\right\| = \min$, что приводит к следующей системе линейных уравнений относительно коэффициентов $\left\{a_0^N,\, a_1^N,\, \ldots,\, a_N^N\right\}$:

$$\sum_{k=0}^{N} c_{nk}\, a_k^N = h_n, \qquad n = 0,\, 1,\, \ldots,\, N; \tag{2.4}$$

здесь $c_{nk} := (\xi_n,\, \xi_k)$, $h_n := (\xi_n,\, h)$.

‡) Контуры Γ_r можно определить и независимо от отображения $\omega(\zeta)$ аналогично данному для них в [14] определению применительно к пространствам Харди — Смирнова $E_p(\mathcal{B})$.

§) О теореме Ф.Рисса для классических пространств Харди H_p см., например, [15].

Если $\mathcal{B} \in (PS)$, то $u^N(z)$ сходится к $u(z)$ равномерно на любом компакте $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ вместе со всеми производными, т.е. справедливо соотношение [6]-[8]

$$D^{l,m} u^N(z) \overset{\mathcal{E}}{\Longrightarrow} D^{l,m} u(z) \tag{2.5}$$

для любых целых неотрицательных l и m, где $D^{l,m} := \partial^{l+m}/\partial x^l \, \partial y^m$.

Кроме того, если $z_0 \in \mathcal{B}$, т.е. система (1.2) является минимальной, то коэффициенты a_k^N из (1.3) имеют пределы

$$\lim_{N\to\infty} a_k^N = a_k, \tag{2.6}$$

и ряд с предельными коэффициентами

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \xi_k \tag{2.7}$$

сходится к $u(z)$ в наибольшем вписанном в $\mathcal{B}$ круге с центром в z_0. Если же $z_0 \notin \mathcal{B}$, то система (1.2) теряет минимальность, а значит, последовательность $\{a_k^N\}_N$, вообще говоря, расходится.

2.3. Результаты численных экспериментов. Было проведено исследование характера сходимости метода наименьших квадратов с помощью численных экспериментов. При этом в качестве тестовых использовались полученные в [16] аналитические решения ряда задач вида (1.1) в прямоугольной и крестообразной областях с различными граничными функциями h, существенно отличающимися по гладкости.

Проведенное исследование показало, что внутри области $\mathcal{B}$ сходимость $u^N(z)$ к $u(z)$ имеет экспоненциальный характер, т.е. для любого компакта $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ выполняется оценка

$$\max_{z\in\mathcal{E}} \left| u(z) - u^N(z) \right| = \mathrm{O}\left(e^{-\lambda_1 N}\right), \qquad N \to \infty, \qquad \lambda_1 = \lambda_1(\mathcal{E}) > 0, \tag{2.8}$$

независимо от того, принадлежит или нет точка z_0 области $\mathcal{B}$, т.е. является ли система (1.2) минимальной или нет (при выполнении условий ее полноты).

Исследован также характер сходимости (или расходимости) приближенных коэффициентов a_k^N при увеличении длины N приближения. Установлено, что если $z_0 \in \mathcal{B}$ и, значит, система (1.2) минимальна, то сходимость последовательности коэффициентов $\{a_k^N\}_N$ к предельным a_k имеет экспоненциальный характер,

$$\left| a_k - a_k^N \right| = \mathrm{O}\left(e^{-\lambda_2 N}\right), \qquad N \to \infty, \qquad \lambda_2 > 0. \tag{2.9}$$

Если же $z_0 \notin \mathcal{B}$ и, значит, система (1.2) не минимальна, то расходимость последовательности коэффициентов $\{a_k^N\}_N$ также имеет экспоненциальную скорость,

$$\left| a_k^N \right| = \mathrm{O}\left(e^{\lambda_3 N}\right), \qquad N \to \infty, \qquad \lambda_3 > 0; \tag{2.10}$$

несмотря на это, последовательность приближенных решений сходится к точному с экспоненциальной скоростью, согласно оценке (2.8).

3 Вариационный метод Треффца

3.1. Пространства Соболева и Соболева — Слободецкого. Пусть область $\mathcal{B}$ с границей Γ принадлежит классу (PS), а $W_2^1(\mathcal{B})$ — пространство Соболева, норма в котором определяется по формуле

$$\left\|u;\ W_2^1(\mathcal{B})\right\|^2 := \left\|u;\ L_2(\mathcal{B})\right\|^2 + \left|u;\ W_2^1(\mathcal{B})\right|^2, \tag{3.1}$$

где $\left|u;\ W_2^1(\mathcal{B})\right|$ — энергетическая норма,

$$\left|u;\ W_2^1(\mathcal{B})\right|^2 := \int_{\mathcal{B}} |\operatorname{grad} u(z)|^2\, dx\, dy\,. \tag{3.2}$$

Пространство[¶] Соболева — Слободецкого $W_2^{1/2}(\Gamma)$ на границе Γ состоит из функций $u(z) \in L_2(\Gamma)$, для которых конечен следующий интеграл:

$$\left|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2 := \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{|u(z_1) - u(z_2)|^2}{|z_1 - z_2|^2}\,|dz_1|\,|dz_2|\,. \tag{3.3}$$

Норма в пространстве $W_2^{1/2}(\Gamma)$ определяется по формуле

$$\left\|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\|^2 := \left\|u;\ L_2(\Gamma)\right\|^2 + \left|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2. \tag{3.4}$$

Известно [17]-[21], что любая функция $u(z) \in W_2^1(\mathcal{B})$ имеет на Γ след[‖] $u(z')$, принадлежащий пространству $W_2^{1/2}(\Gamma)$, и справедлива оценка

$$\left\|u(z');\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\| < C_1 \left\|u(z);\ W_2^1(\mathcal{B})\right\| \tag{3.5}$$

с константой C_1, не зависящей от $u(z)$.

Наоборот, существует линейный оператор $\mathcal{L}$, который всякой функции $u(z') \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ ставит в соответствие функцию $u(z) = \mathcal{L}\, u(z') \in W_2^1(\mathcal{B})$ со следом $u(z')$, причем, имеет место оценка

$$\left\|u(z);\ W_2^1(\mathcal{B})\right\| < C_2 \left\|u(z');\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\| \tag{3.6}$$

с константой C_2, не зависящей от $u(z')$. Таким образом, пространства $W_2^1(\mathcal{B})$ и $W_2^{1/2}(\Gamma)$ изоморфны друг другу. Заметим, что в качестве линейного оператора $\mathcal{L}$ продолжения пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ в $W_2^1(\mathcal{B})$ можно использовать оператор задачи Дирихле для уравнения Лапласа (1.1) в области $\mathcal{B}$.

Приведем важное *неравенство Пуанкаре* (см. [11]) для функций $u(z)$ из $W_2^1(\mathcal{B})$:

$$\left\|u;\ L_2(\mathcal{B})\right\|^2 \le M_1 \left[\left(\int_\Gamma u(z)\,|dz|\right)^2 + \left|u;\ W_2^1(\mathcal{B})\right|^2\right], \tag{3.7}$$

где $M_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от функции $u(z)$.

Аналог неравенства Пуанкаре для функций из $W_2^{1/2}(\Gamma)$ устанавливает следующая

¶) Об общих пространствах Соболева — Слободецкого см. [17]-[21].

‖) След элемента $u(z) \in W_2^1(\mathcal{B})$ понимается (см., например, [17]-[21]) как предел в $W_2^{1/2}(\Gamma)$ сужений $u_n(z')$, $z' \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$, последовательности липшицевых в $\overline{\mathcal{B}}$, т.е. принадлежащих $C^{0,1}(\overline{\mathcal{B}})$, функций $u_n(z)$, приближающих в норме $W_2^1(\mathcal{B})$ элемент $u(z)$.

Теорема 3.1 *Для функций $u(z)$ из $W_2^{1/2}(\Gamma)$ имеет место неравенство*

$$\|u;\ L_2(\Gamma)\|^2 \le M_2 \left[\left(\int_\Gamma u(z)\,|dz| \right)^2 + |u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)|^2 \right], \tag{3.8}$$

где $M_2 > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $u(z)$.

Доказательство. Покажем вначале, основываясь на установленной в [17] компактности вложения пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$, что для любой функции $u \in \widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma) :=$ $:= \left\{ u \in W_2^{1/2} : \int_\Gamma u(z)\,|dz| = 0 \right\}$ имеет место оценка

$$\|u;\ L_2(\Gamma)\|^2 \le M\ |u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)|^2 \tag{3.9}$$

с постоянной $M > 0$, не зависящей от функции $u(z)$.

Действительно, предположим, что (3.9) неверно. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется функция $u_k \in \widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma)$ такая, что

$$\|u_k;\ L_2(\Gamma)\|^2 > k\ |u_k;\ W_2^{1/2}(\Gamma)|^2. \tag{3.10}$$

Заметим, что в силу (3.10) нормы $\|u_k;\ L_2(\Gamma)\|$ для всех $k \in \mathbb{N}$ отличны от нуля. Рассмотрим последовательность функций $v_k := u_k\,\|u_k; L_2(\Gamma)\|^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Учитывая (3.10), легко убедиться, что последовательность $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ обладает следующими тремя свойствами:

$$\text{а) } v_k \in \widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma); \quad \text{б) } \|v_k;\ L_2(\Gamma)\| = 1; \quad \text{в) } |v_k;\ W_2^{1/2}(\Gamma)|^2 < 1/k, \tag{3.11}$$

откуда, в частности, имеем

$$\|v_k;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\|^2 = \|v_k;\ L_2(\Gamma)\|^2 + |v_k;\ W_2^{1/2}(\Gamma)|^2 < 1 + 1/k < 2.$$

Таким образом, последовательность $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ ограничена в пространстве $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Следовательно (см. [10]), из нее можно выделить подпоследовательность $\{v_{k_j}\}_{j=1}^\infty$, слабо сходящуюся в пространстве $W_2^{1/2}(\Gamma)$ к некоторой функции v,

$$v_{k_j} \rightharpoonup v \quad \text{in} \quad W_2^{1/2}(\Gamma), \qquad j \to \infty. \tag{3.12}$$

Докажем, что v равна нулю на границе Γ.

Рассмотрим над пространством $W_2^{1/2}(\Gamma)$ семейство линейных функционалов

$$\Lambda_\varphi(u) := \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{u(z_1) - u(z_2)}{|z_1 - z_2|}\,\varphi(z_1, z_2)\,|dz_1|\,|dz_2|,$$

где φ — произвольная функция, принадлежащая классу $\dot{C}^\infty(\Gamma \times \Gamma)$. Поскольку по неравенству Коши — Буняковского имеем

$$|\Lambda_\varphi(u)| \le \|\varphi;\ L_2(\Gamma \times \Gamma)\|\ |u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)|, \tag{3.13}$$

то выполняется оценка $|\Lambda_\varphi(u)| \le \|\varphi;\ L_2(\Gamma \times \Gamma)\|\,\|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\|$, т.е. функционалы $\Lambda_\varphi(u)$ являются ограниченными и принадлежат пространству, сопряженному к $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Слабая сходимость (3.12) означает, что

$$\forall \varphi \in \dot{C}^\infty(\Gamma \times \Gamma): \qquad \Lambda_\varphi(v_{k_j}) \to \Lambda_\varphi(v), \quad j \to \infty. \tag{3.14}$$

С другой стороны, соотношение в) из формулы (3.11) с учетом неравенства (3.13) дает, что $\Lambda_\varphi(v_{k_j})$ стремится к нулю при $j \to \infty$ для всех $\varphi \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Gamma\times\Gamma)$. Отсюда и из соотношения (3.14) вытекает, что для любой функции φ из $\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Gamma\times\Gamma)$ справедливо равенство $\Lambda_\varphi(v) = 0$. Следовательно (см. [22]), разность $v(z_1)-v(z_2)$ равна нулю на множестве $\Gamma\times\Gamma$, т.е. функция $v(z)$, определенная на границе Γ, является константой.

Рассмотрим теперь на элементах пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ линейный ограниченный функционал $F(u) := \int_\Gamma u(z)\,|dz|$. Из указанного в (3.11) свойства а) следует, что $F(v_{k_j}) = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Отсюда заключаем, что в силу (3.12) значение $F(v)$ тоже равно нулю, т.е. функция v, являющаяся константой, есть просто ноль.

Из компактности вложения пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ в пространство $L_2(\Gamma)$ следует (см. [10]), что последовательность $\{v_{k_j}\}_{j=1}^\infty$, слабо сходящаяся к нулю в $W_2^{1/2}(\Gamma)$, в $L_2(\Gamma)$ сходится к нулю сильно, т.е. предел $\|v_{k_j};\ L_2(\Gamma)\|$ равен нулю при $j \to \infty$, что противоречит свойству б), указанному в (3.11).

Таким образом, оценка (3.9) для функций из $\widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma)$ установлена. Рассмотрим теперь произвольную функцию $u \in W_2^{1/2}(\Gamma)$. Имеем

$$\|u;\ L_2(\Gamma)\|^2 = \left\|\int_\Gamma u(z)\,|dz| + u - \int_\Gamma u(z)\,|dz|;\ L_2(\Gamma)\right\|^2 \le$$

$$\le 2\left\|\int_\Gamma u(z)\,|dz|;\ L_2(\Gamma)\right\|^2 + 2\left\|u - \int_\Gamma u(z)\,|dz|;\ L_2(\Gamma)\right\|^2. \tag{3.15}$$

Заметим, что функция $u - \int_\Gamma u(z)\,|dz|$ принадлежит $\widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma)$, поэтому первое слагаемое в правой части неравенства (3.15) можно оценить с помощью (3.9). Учитывая, что интеграл в формуле (3.9) не изменяется при вычитании из функции u константы, окончательно получаем

$$\|u;\ L_2(\Gamma)\|^2 \le \max\Big\{2M,\ 2|\Gamma|\Big\}\left[\left(\int_\Gamma u(z)\,|dz|\right)^2 + \big|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\big|^2\right],$$

где через $|\Gamma|$ обозначена длина границы Γ. Теорема доказана.

3.2. Пространства Вейля. *Пространство Вейля* $I_2^1(\mathcal{B})$ представляет собой фактор–пространство $\widetilde{W}_2^1(\mathcal{B})/\mathbb{R}$, в котором отождествляются функции, отличающиеся на константу; здесь $\widetilde{W}_2^1(\mathcal{B})$ — пространство Соболева $W_2^1(\mathcal{B})$ гармонических в области $\mathcal{B}$ функций, а $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел. Его элементы будем обозначать буквами с тильдой, а функции, составляющие данный элемент — той же буквой без тильды (например, $\widetilde{u}$ и u). Скалярное произведение в пространстве $I_2^1(\mathcal{B})$ определяется по формуле [9]

$$\big[u,\,v\big] = \big(u,\,v;\ I_2^1(\mathcal{B})\big) := \int_{\mathcal{B}} \langle\operatorname{grad} u,\,\operatorname{grad} v\rangle\,dx\,dy\,, \tag{3.16}$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ обозначает скалярное произведение плоских векторов. Значение интеграла в формуле (3.16), очевидно, не зависит от выбора функций $u \in \widetilde{u}$ и $v \in \widetilde{v}$, а величина $\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\| := \big[\widetilde{u},\,\widetilde{u}\big]^{1/2}$ является нормой в $I_2^1(\mathcal{B})$.

Функцию $\widehat{u}$ назовем естественным представителем элемента $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$, если она принадлежит этому элементу и удовлетворяет условию

$$\int_\Gamma \widehat{u}(z)\,|dz| = 0. \tag{3.17}$$

Аналогично, на подпространстве функций u из $W_2^{1/2}(\Gamma)$ введем фактор–пространство элементов $\{u + \mathrm{const}\}$, которое назовем *пространством Вейля на границе* Γ и обозначим $I_2^{1/2}(\Gamma)$. Его элементы также будем обозначать буквами с тильдой, а функции, составляющие данный элемент — той же буквой без тильды. Скалярное произведение в $I_2^{1/2}(\Gamma)$ введем по формуле

$$\left(\widetilde{u},\, \widetilde{v};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\right) := \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{\left[u(z_1) - u(z_2)\right]\left[v(z_1) - v(z_2)\right]}{|z_1 - z_2|^2}\,|dz_1|\,|dz_2|. \tag{3.18}$$

Как и выше, значение интеграла в (3.18) не зависит от выбора функций $u \in \widetilde{u}$ и $v \in \widetilde{v}$, а величина $\left\|\widetilde{u};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\right\| := \left(\widetilde{u},\, \widetilde{u};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\right)^{1/2}$ представляет собой норму в $I_2^{1/2}(\Gamma)$. Функцию $\widehat{u} \in \widetilde{u}$ назовем естественным представителем элемента $\widetilde{u} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$, если она удовлетворяет условию (3.17).

Теорема 3.2 *Пространства $I_2^1(\mathcal{B})$ и $I_2^{1/2}(\Gamma)$ изоморфны друг другу.*

Доказательство. 1) Пусть $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$, и пусть $\widehat{u}$ — естественный представитель этого элемента. Для функции $\widehat{u}(z) \in W_2^1(\mathcal{B})$ однозначно определен след $\widehat{u}(z')$ на границе Γ, принадлежащий пространству $W_2^{1/2}(\Gamma)$, и имеет место неравенство

$$\left\|\widehat{u}(z');\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\| \le C_1 \left\|\widehat{u}(z);\ W_2^1(\mathcal{B})\right\|, \tag{3.19}$$

где $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от $\widehat{u}$. Этот след в силу условия (3.17) является естественным представителем некоторого элемента $\widetilde{h} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$. Оценим норму элемента $\widetilde{h} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$ через норму элемента $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$. С учетом (3.19) имеем

$$\left\|\widetilde{h};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\right\|^2 = \left|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right| \le \left\|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\|^2 \le$$

$$\le C_1^2 \left\|\widehat{u};\ W_2^1(\mathcal{B})\right\|^2 = C_1^2 \left\|\widehat{u};\ L_2(\mathcal{B})\right\|^2 + C_1^2 \left|\widehat{u};\ W_2^1(\mathcal{B})\right|^2.$$

Оценивая первое слагаемое в правой части последнего равенства с помощью неравенства Пуанкаре (3.7) и с учетом (3.17), получаем

$$\left\|\widetilde{h};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\right\|^2 \le C_1^2 M_1 \left(\int_\Gamma \widehat{u}(z)\,|dz|\right)^2 + C_1^2(M_1+1)\left|\widehat{u};\ W_2^1(\mathcal{B})\right|^2 =$$

$$= C_1^2(M_1+1)\left\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\right\|^2,$$

где $M_1 > 0$ также не зависит от $\widehat{u}$.

Таким образом установлено, что любому элементу $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$ можно поставить в соответствие элемент $\widetilde{h} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$, причем справедлива оценка

$$\left\|\widetilde{h};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\right\| \le c_1(\mathcal{B})\left\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\right\|, \tag{3.20}$$

где постоянная $c_1(\mathcal{B}) = C_1\sqrt{M_1+1} > 0$ зависит только от области $\mathcal{B}$.

2) Обратно, пусть $\widetilde{h}$ — произвольный элемент пространства $I_2^{1/2}(\Gamma)$, а функция $\widehat{h} \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ — его естественный представитель. Существует линейный оператор $\mathfrak{L}$, ставящий в соответствие функции $\widehat{h}\,(z')$ единственную гармоническую функцию $\mathfrak{L}\widehat{h}\,(z) \in W_2^1(\mathcal{B})$ такую, что $[\mathfrak{L}\widehat{h}]\,(z') = \widehat{h}\,(z')$, и справедлива оценка

$$\left\|\mathfrak{L}\widehat{h};\ W_2^1(\mathcal{B})\right\| \le C_2\left\|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\|, \tag{3.21}$$

где $C_2 > 0$ — постоянная, не зависящая от функции $\widehat{h}$. Функция $\mathfrak{L}\widehat{h}$, удовлетворяющая условию (3.17), является естественным представителем некоторого элемента $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$. Оценим норму элемента $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$ через норму элемента $\widetilde{h} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$. Учитывая (3.21), имеем

$$\left\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\right\|^2 = \left|\widehat{u};\ W_2^1(\mathcal{B})\right|^2 \le \left\|\widehat{u};\ W_2^1(\mathcal{B})\right\|^2 \le$$

$$\le C_2^2\left\|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\|^2 = C_2^2\left\|\widehat{h};\ L_2(\Gamma)\right\|^2 + C_2^2\left|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2.$$

Оценивая первое слагаемое в последнем равенстве с помощью неравенства Пуанкаре (3.8) и с учетом (3.17), получаем

$$\left\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\right\|^2 \le C_2^2 M_2\left(\int_\Gamma \widehat{h}\,(z)\,|dz|\right)^2 + C_2^2(M_2+1)\left|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2 =$$

$$= C_2^2(M_2+1)\left\|\widetilde{h};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\right\|,$$

т.е. справедливо неравенство

$$\left\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\right\| \le c_2(\mathcal{B})\left\|\widetilde{h};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\right\|, \tag{3.22}$$

где постоянная $c_2(\mathcal{B}) = C_2\sqrt{M_2+1} > 0$ зависит только от области $\mathcal{B}$.

Объединяя результаты (3.20) и (3.22) пунктов 1) и 2) доказательства, находим, что линейный оператор $\mathfrak{L}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $I_2^1(\mathcal{B})$ и $I_2^{1/2}(\Gamma)$. Теорема доказана.

Отметим еще, что полнота пространства $I_2^{1/2}(\Gamma)$, очевидно, следует из полноты пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ и неравенства (3.8), а полнота пространства $I_2^1(\mathcal{B})$ следует из изоморфизма пространств $I_2^1(\mathcal{B})$ и $I_2^{1/2}(\Gamma)$.

3.3. Вариационный метод Треффца. Рассмотрим задачу (1.1) с граничной функцией $h \in W_2^{1/2}(\Gamma)$. Ее решение $u\,(z)$, как было отмечено в п. 3.1, существует и единственно в пространстве $W_2^1(\mathcal{B})$.

Перейдем к пространствам Вейля. Пусть $\widetilde{h}$ — элемент пространста $I_2^{1/2}(\Gamma)$, содержащий h. Решение u задачи принадлежит некоторому элементу $\widetilde{u}$ пространства $I_2^1(\mathcal{B})$.

Метод Треффца [5] заключается в следующем. Допустим, что $\{\widetilde{u}_k\}_{k=1}^\infty$ — линейно независимая и полная система в пространстве $I_2^1(\mathcal{B})$, причем функции $u_k \in \widetilde{u}_k$ принадлежат $C^\infty(\mathcal{B}')$, т.е. бесконечно дифференцируемы в некоторой области $\mathcal{B}' \Supset \mathcal{B}$, охватывающей исходную. Элемент $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$, содержащий решение рассматриваемой задачи, будем строить в виде предела последовательности $\{\widetilde{u}^N\}_{N=1}^\infty$ приближенных элементов

$$\widetilde{u}^N := \sum\nolimits_{k=1}^N a_k^N\,\widetilde{u}_k\,, \tag{3.23}$$

где коэффициенты a_k^N находятся из условия наименьшего отклонения приближенного элемента $\widetilde{u}^N$ от точного $\widetilde{u}$ в $I_2^1(\mathcal{B})$, т.е. из условия

$$\left\| \widetilde{u} - \widetilde{u}^N;\ I_2^1(\mathcal{B}) \right\| = \min .$$

Это приводит к следующей системе линейных уравнений относительно коэффициентов $\{a_1^N, \ldots, a_N^N\}$:

$$\sum\nolimits_{j=1}^N \left[\widetilde{u}_k, \widetilde{u}_j\right] a_j^N = \left[\widetilde{u}, \widetilde{u}_k\right], \qquad k = \overline{1, N}. \tag{3.24}$$

Подставляя в систему (3.24) выражение (3.16) для скалярного произведения $[\cdot\,, \cdot]$, переписываем ее в виде

$$\sum\nolimits_{j=1}^N a_j^N \int_{\mathcal{B}} \langle \operatorname{grad} u_k, \operatorname{grad} u_j \rangle \, dx\, dy = \int_{\mathcal{B}} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u_k \rangle \, dx\, dy, \quad k = \overline{1, N}.$$

Поскольку все функции u_k принадлежат классу $C^\infty(\mathcal{B}')$, а u — пространству $W_2^1(\mathcal{B})$, то, применяя к интегралам, входящим в последнее равенство, тождество Грина [17]-[20], получаем

$$\sum\nolimits_{j=1}^N a_j^N \left\{ -\int_{\mathcal{B}} u_j \, \Delta u_k \, dx\, dy + \int_\Gamma u_j \, \partial_\nu u_k \, |dz| \right\} =$$

$$= -\int_{\mathcal{B}} u \, \Delta u_k \, dx\, dy + \int_\Gamma u \, \partial_\nu u_k \, |dz|, \qquad k = \overline{1, N}, \tag{3.25}$$

где ∂_ν — производная по внешней нормали к границе Γ. Учитывая теперь, что $u(z') = h(z')$ на Γ, а u_k — гармонические функции, преобразуем систему линейных уравнений (3.25) к окончательному виду

$$\sum\nolimits_{j=1}^N a_j^N \int_\Gamma u_j \, \partial_\nu u_k \, |dz| = \int_\Gamma h \, \partial_\nu u_k \, |dz|, \qquad k = \overline{1, N}, \tag{3.26}$$

откуда коэффициенты $\{a_1^N, \ldots, a_N^N\}$ находятся однозначно, поскольку матрица системы (3.26) есть матрица Грама системы линейно независимых элементов [2]-[4]; отметим также, что она симметрична.

Подчеркнем, что приближенный элемент $\widetilde{u}^N$, определяемый по формуле (3.23), с коэффициентами $\{a_1^N, \ldots, a_N^N\}$, вычисляемыми из системы (3.26), дает приближенное решение задачи (1.1) лишь с точностью до произвольной вещественной постоянной.

Определим приближенное решение u^N этой задачи по формуле

$$u^N(z) := a_0^N + \sum\nolimits_{k=1}^N a_k^N \, u_k(z),$$

где u_k — некоторые фиксированные функции, принадлежащие соответствующим элементам $\widetilde{u}_k$, а коэффициент a_0^N определяется по формуле

$$a_0^N := \int_\Gamma \Big(h(z) - \sum\nolimits_{k=0}^N a_k^N \, u_k(z) \Big) \, |dz| .$$

Докажем, что *последовательность определенных таким способом приближенных решений* $u^N(z)$ *и последовательности всех производных* $D^{l,m} u^N(z)$ *равномерно сходятся* *внутри области $\mathcal{B}$ соответственно к функции $u(z)$ — решению задачи (1.1) — и ее производным $D^{l,m}u(z)$.*

Учитывая очевидные соотношения

$$\widehat{u}(z) = u(z) - \int_\Gamma h(z)\,|dz|, \qquad \widehat{u}^N(z) = u^N(z) - \sum\nolimits_{k=0}^{N} a_k^N \int_\Gamma u_k(z)\,|dz|,$$

можно увидеть, что для доказательства такой сходимости достаточно установить равномерную сходимость внутри области $\mathcal{B}$ функций $\widehat{u}^N(z) := \sum_{k=1}^{N} a_k^N\,\widehat{u}_k(z)$ и всех соответствующих производных к функции $\widehat{u}(z)$ и ее производным.

Используя неравенство Пуанкаре (3.8) и оценку (3.20), связанную с изоморфизмом пространств $I_2^1(\mathcal{B})$ и $I_2^{1/2}(\Gamma)$, получаем цепочку неравенств

$$\left\|\widehat{u};\ L_2(\Gamma)\right\|^2 \le M_2\left\|\widetilde{u};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\right\|^2 \le C\left\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\right\|^2 \qquad \forall\,\widetilde{u}\in I_2^1(\mathcal{B}), \tag{3.27}$$

где $M_2 > 0$ и $C = M_2\,c_1^2(\mathcal{B}) > 0$ — константы, не зависящие от $\widetilde{u}$, $c_1(\mathcal{B})$ — константа из формулы (3.20).

Согласно предположению о полноте системы $\{\widetilde{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$, для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти число $N_0 \in \mathbb{N}$ и постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_0}$ такие, что имеет место неравенство

$$\left\|\widetilde{u} - \sum\nolimits_{k=1}^{N_0} \alpha_k\,\widetilde{u}_k;\ I_2^1(\mathcal{B})\right\| < \varepsilon.$$

Так как элемент $\widetilde{u}^{N_0} = \sum_{k=1}^{N_0} a_k^{N_0}\,\widetilde{u}_k$, построенный по методу Треффца, дает наилучшее среди сумм такого вида приближение в норме $I_2^1(\mathcal{B})$, то отсюда получаем оценку

$$\left\|\widetilde{u} - \widetilde{u}^{N_0};\ I_2^1(\mathcal{B})\right\| < \varepsilon.$$

Но поскольку $\left\|\widetilde{u} - \widetilde{u}^N;\ I_2^1(\mathcal{B})\right\|$ не превосходит $\left\|\widetilde{u} - \widetilde{u}^{N_0};\ I_2^1(\mathcal{B})\right\|$ для любого $N \ge N_0$, то верна также и оценка

$$\left\|\widetilde{u} - \widetilde{u}^N;\ I_2^1(\mathcal{B})\right\| < \varepsilon$$

для любого $N \ge N_0$. Воспользовавшись теперь (3.27), получаем, что

$$\left\|\widehat{u} - \widehat{u}^N;\ L_2(\Gamma)\right\|^2 \le C\left\|\widetilde{u} - \widetilde{u}^N;\ I_2^1(\mathcal{B})\right\|^2 < C\varepsilon^2,$$

где $C > 0$ — константа, зависящая только от области $\mathcal{B}$, а $N \ge N_0$.

Для функций $\widehat{u} - \widehat{u}^N \in W_2^1(\mathcal{B})$ и любого компакта $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ справедливо доказанное в [8] для более широкого класса функций неравенство

$$\sup_{z\in\mathcal{E}}\left|D^{l,m}\left(\widehat{u}(z) - \widehat{u}^N(z)\right)\right| < M(\mathcal{E})\left\|\widehat{u} - \widehat{u}^N;\ L_2(\Gamma)\right\| < M(\mathcal{E})\sqrt{C}\varepsilon, \quad \forall\,N \ge N_0,$$

где $M(\mathcal{E})$ — некоторая положительная константа, не зависящая от N. Таким образом, последовательность $\left\{D^{l,m}\,\widehat{u}^N(z)\right\}_N$ сходится равномерно к $D^{l,m}\,\widehat{u}(z)$ на любом компакте $\mathcal{E}$ в области $\mathcal{B}$.

Сформулируем без доказательства предложение, позволяющую использовать в методе Треффца в качестве системы $\{\widetilde{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ систему

$$\xi_{2k-1}(z) := \mathrm{Re}\,(z - z_0)^k, \quad \xi_{2k}(z) := \mathrm{Im}\,(z - z_0)^k, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.28}$$

Предложение 3.3 *Система (3.28) полна, а если $z_0 \in \mathcal{B}$, то и минимальна в гильбертовом пространстве $I_2^1(\mathcal{B})$.*

3.4. Результаты численных экспериментов. С помощью численных экспериментов было проведено исследование характера сходимости метода Треффца на тех же примерах краевых задач и с использованием тех же тестовых решений, что и для метода наименьших квадратов.

Исследование показало, что внутри области $\mathcal{B}$ сходимость $u^N(z)$ к $u(z)$ имеет экспоненциальный характер, т.е. выполняется оценка (2.8) независимо от того, принадлежит или нет точка z_0 области $\mathcal{B}$.

Литература

1. M. Picone. Nuovo metodo d'approssimazione per la soluzione del probleme di Dirichlet // Atti della Real Accad. naz. dei Lincei. Rend. Serie 5, Classe di sci. fis, mat. e natur. V. 31, № 8. 1922. P. 357–359.

2. С.Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике, М.: Наука. 1970.

3. К. Ректорис. Вариационные методы математической физики и техники, М.: Мир. 1985.

4. В.И. Лебедев. Функциональный анализ и вычислительная математика, М.: Физматлит. 2000.

5. E. Trefftz. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren // Verhanl. d. 2 internat. Kongress für techniche Mechanik. Zürich, 1926.

6. В.И. Власов. О решении задачи дирихле посредством разложения в ряд Фурье // Докл. АН СССР. Т. 249, № 1. 1979. С. 19–22.

7. В.И. Власов. Краевые задачи в областях с криволинейной границей, Докторская дисс. М.: ВЦ АН СССР. 1990.

8. В.И. Власов, А.В. Рачков. О весовых пространствах типа Харди // Докл. РАН. Т. 328, № 3. 1993. С. 281–284.

9. H. Weil. The method of orthogonal projection in potential theory // Duke Mathematical Journal. V. 7. 1940. P. 411–444.

10. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука. 1976.

11. С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л.: Изд. ЛГУ, 1950.

12. О.А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики, М.: Наука. 1973.

13. Д. Гилбарг, Н. Трудингер. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, М.: Наука. 1989.

14. M.V. Keldysh, M.A. Lavrentieff. Sur la representation conform des domaines limitès par les courbes rectifiables // Ann. Ecole Norm. sup. (3). V. 54. 1937. P. 1–38.

15. Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.: Наука, 1966.

16. Г.О. Бузыкин, В.И. Власов. Исследование некоторых вариационных методов решения краевых задач, основанных на глобальных аппроксимативных системах. Технический отчет ВЦ РАН, 2005.

17. Л.Н. Слободецкий. Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та. Т. 197. 1958. С 54–112.

18. И. Стейн. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М.: Мир. 1973.

19. R. Adams. Sobolev spaces, New York — San Francisco — London: Academic Press. 1975.

20. P. Grisvard. Eliptic problems in nonsmooth domains, London: Pittman. 1985.

21. Б.В. Пальцев. О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях // Матем. сб. Т. 187, № 4. 1996. С. 59–116.

22. В.С. Владимиров. Обобщенные функции в математической физике, М.: Наука. 1976.

ON CERTAIN VARIATIONAL METHODS FOR SOLVING THE DIRICHLET PROBLEM

G.O. Buzykin , V.I. Vlasov

Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences,
Vavilov str., 40, Moscow, 119991, Russia, e-mail: gbuzykin@newmail.ru,vlasov@ccas.ru

Abstract. A theoretical substantiation is presented for two variational methods for solving the Dirichlet problem for the Laplace equation in plane simply connected domains $\mathcal{B}$: the least square method and the Trefftz's method. As a preliminary, several assertions have been estab-lished for functional spaces related to the methods, the Hardy space $e_2(\mathcal{B})$ and the Weil space $I_2^1(\mathcal{B})$ of functions, harmonic in $\mathcal{B}$. A performed numerical research have shown exponential rate of convergence of these methods.

Keywords: the Laplace equation, variational methods, the least square method, the Trefftz's method, Hardy space, Weil space.