

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУХА В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ ТАЙФУНА

В.И. Власов<sup>1)</sup>, С.Л. Скороходов<sup>1)</sup>, Х. Фужита Яшима<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,  
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: [skor@ccas.ru](mailto:skor@ccas.ru), [vlasov@ccas.ru](mailto:vlasov@ccas.ru)

<sup>2)</sup>Туринский университет,  
виа Карло Альберто, 10, Турин, 10123, Италия e-mail: [hisao.fujitayashima@unito.it](mailto:hisao.fujitayashima@unito.it)

**Аннотация.** Представленная модель стационарного осесимметричного движения воздуха в нижнем слое тайфуна, учитывающая вязкость и сжимаемость воздуха, силу Кориолиса и трение о поверхность Земли, сводится к системе трех нелинейных дифференциальных уравнений для осредненных по вертикали в этом слое компонент горизонтальной скорости и плотности воздуха. С помощью задания функции  $\beta$ , описывающей вертикальный поток на верхней границе слоя, исходная задача расщепляется на две: краевую задачу для тангенциальной компоненты скорости и задачу Коши для плотности воздуха, после решения которых оставшиеся неизвестные находятся явно. Результаты проведенной эффективной численной реализации модели, хорошо согласующиеся с наблюдаемыми данными, позволили выявить некоторые закономерности в распределении скорости воздуха в нижнем слое тайфуна.

**Ключевые слова:** тайфуны, математическое моделирование, системы нелинейных дифференциальных уравнений, разностные методы.

### 1 Введение

Одним из наиболее разрушительных атмосферных явлений является тайфун — крупномасштабный интенсивный атмосферный вихрь. Тайфуны возникают над перегретыми районами океана; их время жизни достигает 2-х недель, горизонтальный размер — сотен километров, высота составляет 12–15 км, а скорость ветра может достигать до 300 км/час (см. [1]–[5]). Исследование тайфунов привлекает большое внимание ученых [2]–[7].

Современные модели тайфунов включают, как правило, детальное описание трехмерного нестационарного течения воздушных масс и происходящих в них процессов теплообмена и фазовых превращений с учетом взаимодействия с океаном [6]–[9]. Для реализации таких моделей необходимы сложные численные методы и алгоритмы, а также мощные вычислительные средства. Вместе с тем, достигаемая при этом точность расчетов часто оказывается недостаточной, а результаты не вполне адекватными [2], [4], [7].

Помимо “больших” моделей тайфунов развиваются и более простые, учитывающие основные факторы этого явления [1]–[7]. Излагаемая ниже модель относится к этому типу, а ее отличительной чертой является описание лишь нижнего слоя тайфуна.

Рассматриваемая в работе модель, сформулированная в [10] и описывающая стационарное осесимметричное движение воздуха в нижнем слое тайфуна, учитывает вязкость

---

Работа поддержана РФФИ (гранты 07-01-00295, 07-01-00503), программой фундаментальных исследований ОМН РАН №3 “Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач”



и сжимаемость воздуха, его трение о поверхность океана, а также силу Кориолиса. Эта модель основана на осреднении характеристик потока по вертикали внутри рассматриваемого слоя и задании вертикального потока воздуха на верхнем уровне этого слоя.

Модель включает систему трех дифференциальных уравнений для трех осредненных по вертикали величин: двух компонент горизонтальной скорости и плотности воздуха. Возникающую краевую задачу для этой системы удается свести к последовательному рассмотрению двух задач: краевой задачи для тангенциальной компоненты скорости и задачи Коши для плотности воздуха. Оставшиеся неизвестные (радиальная скорость и давление) находятся затем по явным формулам.

Численная реализация модели, результаты которой хорошо согласуются с данными наблюдений, позволила адекватно описать характер пространственного распределения ветра в тайфуне.

## 2 Модель тайфуна и постановка задачи

2.1. Двумерная модель. Используемая модель [10] описывает стационарное движение воздуха в нижнем слое тайфуна толщиной  $H$ , характеризующимся достаточно однородным по высоте потоком. В этом слое используется процедура осреднения по высоте всех характеристик течения; метод такого осреднения изложен, в частности, в [11], [12], [13]. В реальной атмосфере толщина  $H$  этого слоя может составлять несколько километров [2], [4], [7].

Помимо этого, в модели считается заданной вертикальная составляющая потока воздуха на верхней границе  $\{x_3 = H\}$  рассматриваемого слоя тайфуна. Это позволяет получить на плоскости  $(x_1, x_2)$  замкнутую систему уравнений относительно следующих осредненных по  $x_3$  в слое  $\{x_3 \in (0, H)\}$  величин: вектора горизонтальной скорости воздуха  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , плотности  $\varrho$  и давления  $p$ . Эта модель учитывает силу Кориолиса в виде  $\varrho L \mathbf{v}$ , где

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -l_0 \\ l_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l_0 = 2\omega \sin \varphi_0, \quad (2.1)$$

$\omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\varphi_0$  — географическая широта центра тайфуна. Кроме этого, модель включает объемную и динамическую вязкости воздуха с коэффициентами вязкости соответственно  $\lambda$  и  $\mu$  и трение воздуха о поверхность океана (коэффициент трения  $\alpha$ ). Полученная система уравнений имеет вид:

$$\varrho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} - \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\nabla p - \varrho L \mathbf{v} - \alpha \mathbf{v}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = -\beta, \quad (2.3)$$

где через  $\nabla$  и  $\Delta$  обозначены соответственно двумерные на плоскости  $(x_1, x_2)$  операторы "набла" и Лапласа. Функция  $\beta(x_1, x_2)$  в правой части уравнения (2.3), представляющая собой деленную на  $H$  вертикальную составляющую потока воздуха на верхней границе рассматриваемого слоя, как уже было сказано выше, считается заданной.

Предполагая течение воздуха адиабатическим, замыкаем систему уравнений (2.2), (2.3) соответствующим уравнением состояния, связывающим плотность воздуха и давление:

$$p(\varrho) = P_\infty (\varrho/\varrho_\infty)^\gamma; \quad (2.4)$$





здесь  $P_\infty$  и  $\varrho_\infty$  — соответственно давление и плотность воздуха вдали от центра тайфуна (т.е. в невозмущенной атмосфере),  $\gamma$  — показатель адиабаты воздуха,  $\gamma \approx 1.4$ .

**2.2. Осесимметричная модель.** В дальнейшем будем полагать течение в тайфуне осесимметричным, что в достаточной степени согласуется с данными наблюдений. Вводя полярные координаты  $(r, \vartheta)$ , центр которых совпадает с центром тайфуна, получаем, что все рассматриваемые функции зависят лишь от радиальной координаты  $r$ . Обозначим через  $U(r)$  и  $\Phi(r)$  радиальную и тангенциальную составляющие скорости. При этом функции  $p(x_1, x_2)$ ,  $\varrho(x_1, x_2)$  и  $\beta(x_1, x_2)$  преобразуются соответственно в функции  $p(r)$ ,  $\varrho(r)$  и  $\beta(r)$ .

Система (2.2), (2.3) переписывается, с учетом (2.4), в следующем виде на полуоси  $r \in [0, \infty)$  относительно  $\Phi$ ,  $U$  и  $\varrho$ :

$$\mu [(r\Phi)' / r]' - \varrho U\Phi' - \varrho U\Phi / r - \alpha\Phi - l_0\varrho U = 0, \quad (2.5)$$

$$(\mu + \lambda) [(rU)' / r]' - \varrho UU' - \alpha U + \varrho\Phi^2 / r + l_0\varrho\Phi = P_\infty (\varrho' / \varrho_\infty)', \quad (2.6)$$

$$(r\varrho U)' / r = -\beta. \quad (2.7)$$

Для компонент скоростей  $U$ ,  $\Phi$  в центре тайфуна и на бесконечности принимаются однородные условия:

$$U(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0, \quad (2.8)$$

$$\Phi(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = 0, \quad (2.9)$$

а для плотности — условие стремления на бесконечности к заданной величине  $\varrho_\infty$ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varrho(r) = \varrho_\infty, \quad (2.10)$$

при этом предполагается, что  $\{U(r), \Phi(r), \varrho(r)\} \in C[0, \infty] \cap C^2(0, \infty)$ . Принимаем еще условие положительности плотности  $\varrho(r)$ ,  $r \in [0, \infty]$  и соответствующее данным наблюдений условие центростремительности течения в рассматриваемом нижнем слое тайфуна, т.е.  $U(r) < 0$ ,  $r \in (0, \infty)$ , а также условие закрученности потока в Северном полушарии против, а в Южном — по часовой стрелке:

$$l_0\Phi(r) > 0, \quad r \in (0, \infty).$$

**2.3. Функция  $\beta(r)$ .** Данные наблюдений указывают на следующий характер вертикального потока воздуха на верхней поверхности рассматриваемого слоя: вблизи центра тайфуна воздух поднимается вверх, при удалении от центра скорость подъема уменьшается, в некоторой точке  $r = R$  поток обращается в ноль, а при дальнейшем удалении от центра тайфуна воздух опускается вниз. При стремлении к бесконечно удаленной точке вертикальное движение воздуха полностью прекращается.

Кроме того, для потока воздуха через верхнюю границу рассматриваемого слоя всегда выполняется интегральное уравнение баланса массы:

$$2\pi \int_0^\infty r\beta(r) dr = 0. \quad (2.11)$$

Такое поведение вертикального потока воздуха на верхней границе слоя предлагается описать функцией  $\beta(r)$  следующего вида:

$$\beta(r) = \beta_0(1 + qr)(r^2 - R^2)(Dr^2 - R^2)e^{-qr}, \quad (2.12)$$



где положительные величины  $\beta_0$ ,  $q$  и  $R$  являются свободными параметрами модели, причем  $\beta_0$  представляет собой значение функции  $\beta(r)$  в точке  $r = 0$ , параметр  $q$  определяет показатель экспоненциального затухания этой функции при  $r \rightarrow \infty$ , а величина  $R$  дает точку обращения  $\beta(r)$  в ноль. Коэффициент  $D$  в (2.12) определяется из условия баланса (2.11):

$$D = q^2 (q^2 R^2 - 10) / [10 R^2 (q^2 R^2 - 28)].$$

Условие обращения функции  $\beta(r)$  в ноль при  $r \in [0, \infty)$  лишь в конечной точке  $r = R$  приводит к ограничению на параметры  $q$  и  $R$ :

$$10 < q^2 R^2 < 28.$$

Задание функции  $\beta(r)$  завершает постановку задачи (2.5)–(2.10).

2.4. Поведение решения вблизи особых точек. Опираясь на теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и систем [14], [15], убеждаемся, что система (2.5)–(2.7) имеет две особые точки  $r = 0$  и  $r = \infty$ ; таким образом, рассматриваемая краевая задача (2.5)–(2.9) является сингулярной. Ниже используется символ  $f(r) \sim g(r)$ ,  $r \rightarrow r_0$ , означающий  $f(r)/g(r) \rightarrow 1$ ,  $r \rightarrow r_0$ .

Можно показать, что для компонент скорости вблизи начала координат выполняется

$$\Phi(r) \sim \Phi_{(1)} r, \quad U(r) \sim U_{(1)} r, \quad r \rightarrow 0,$$

где для постоянных  $\Phi_{(1)}$ ,  $U_{(1)}$  верно  $l_0 \Phi_{(1)} > 0$  и  $U_{(1)} < 0$ . Аналогично выводится следующая асимптотика для компонент скорости при  $r \rightarrow r_\infty$ :

$$U(r) \sim \beta_0 D r^5 e^{-qr} / \varrho_\infty, \quad \Phi(r) \sim \Phi_\infty \exp(-\sqrt{\alpha/\mu} r) / \sqrt{r}; \quad (2.13)$$

при выводе второго соотношения в (2.13) мы ограничились предположением  $\alpha/\mu < q^2$ .

С помощью полученной зависимости (2.13) устанавливаем асимптотическое поведение плотности при  $r \rightarrow \infty$ :

$$\varrho(r) - \varrho_\infty \sim -\sqrt{\mu/\alpha} \varrho_\infty^2 l_0 \Phi_\infty \exp(-\sqrt{\alpha/\mu} r) / (\gamma P_\infty \sqrt{r}). \quad (2.14)$$

### 3 Сведение к системе двух дифференциальных уравнений

Домножая уравнение (2.7) на  $r$  и интегрируя от нуля до  $r$ , получаем связь между радиальной скоростью  $U(r)$  и плотностью  $\varrho(r)$ :

$$\varrho(r) U(r) = -b(r), \quad (3.1)$$

где

$$b(r) = r^{-1} \int_0^r s \beta(s) ds.$$

Подставляя (3.1) в систему (2.5)–(2.7), исключаем из нее  $U(r)$  и приходим к системе двух уравнений относительно тангенциальной скорости  $\Phi(r)$  и плотности  $\varrho(r)$ :

$$\Phi'' + (r^{-1} + b \mu^{-1}) \Phi' - (r^{-2} - r^{-1} b \mu^{-1} + \alpha \mu^{-1}) \Phi = -l_0 b \mu^{-1}, \quad (3.2)$$





$$\begin{aligned}
& (\mu + \lambda) b \varrho'' - 2(\mu + \lambda) b \varrho \varrho'^2 + \\
& + \left[ 2(\mu + \lambda) b' + (\mu + \lambda) r^{-1} b + b^2 - \gamma P_\infty \varrho_\infty^{-\gamma} \varrho^{\gamma+1} \right] \varrho' + \\
& + (l_0 \Phi + r^{-1} \Phi^2) \varrho^3 + \left[ r^{-2} b - r^{-1} b' - (\mu + \lambda) b'' - b b' + \alpha b \right] \varrho = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Краевые условия следуют из соотношений (2.8), (2.9), (2.10) и вытекающих из (2.6), (2.7) соотношений  $\lim_{r \rightarrow \infty} U'(r) = 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} U''(r) = 0$ :

$$\Phi(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = 0, \tag{3.4}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varrho(r) = \varrho_\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varrho'(r) = 0. \tag{3.5}$$

Система уравнений (3.2), (3.3) вместе с краевыми условиями (3.4), (3.5) представляет собой итоговую краевую задачу относительно двух неизвестных —  $\Phi(r)$  и  $\varrho(r)$ .

Первое уравнение (3.2) этой задачи и краевые условия (3.4) составляют линейную краевую задачу только для функции  $\Phi(r)$ , которую решаем отдельно. Второе, нелинейное уравнение (3.3) вместе с условиями (3.5) дают задачу Коши для искомой плотности  $\varrho(r)$ . После решения этих задач оставшиеся неизвестные — радиальная скорость  $U$  и давление  $p$  — могут быть вычислены по формулам (3.1) и (2.4).

#### 4 Вычисление тангенциальной скорости $\Phi(r)$

4.1. Перенос краевых условий из особых точек. При решении сингулярных краевых задач методом конечных разностей в общем случае необходимо переносить краевые условия из особых точек в некоторые близкие к ним неособые точки [16], [17], [18].

В рассматриваемой задаче (3.2), (3.4) точка  $r = 0$  является особой для уравнения (3.2) и, тем не менее, регулярной для функции  $\Phi(r)$ . Поэтому переноса первого краевого условия (3.4) не требуется.

Перенос краевого условия (3.4) из точки  $r = \infty$  в достаточно удаленную (неособую) точку  $r = r_N \gg 1$ , осуществляемый на основе асимптотики (2.13), дает в этой точке условие

$$\Phi'(r_N) = -\sqrt{\alpha/\mu} \Phi(r_N). \tag{4.1}$$

4.2. Разностный алгоритм для  $\Phi(r)$ . Для численного решения задачи (3.2), (3.4) введем равномерную сетку с шагом  $h$ :  $r_j = j h$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , где  $N$  — такое число, что величина  $r_N$  значительно больше характерного радиуса тайфуна.

Обозначая через  $\Phi_j = \Phi(r_j)$ ,  $b_j = b(r_j)$  значения функций  $\Phi(r)$  и  $b(r)$  в узлах сетки и используя в них центральные разностные аппроксимации [16], [17] порядка  $O(h^2)$  для приближения производных  $\Phi'(r)$  и  $\Phi''(r)$ , получаем необходимую разностную схему, аппроксимирующую уравнение (3.2) в точке  $r_j$ :

$$\begin{aligned}
& \mu(\Phi_{j+1} - 2\Phi_j + \Phi_{j-1})/h^2 + \mu(\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1})/(2hr_j) - \\
& - \mu\Phi_j/r_j^2 + b_j(\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1})/(2h) + b_j\Phi_j/r_j - \alpha\Phi_j + l_0 b_j = 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$



Граничное условие (3.4) в точке  $r = 0$  принимает вид  $\Phi_0 = 0$ , а условие (4.1) в точке  $r_{N-1}$  — следующий вид:

$$(\Phi_N - \Phi_{N-2})/(2h) = -\sqrt{\alpha/\mu} \Phi_{N-1}. \quad (4.3)$$

Таким образом, для нахождения сеточных значений  $\Phi_j$  сформулирована задача (4.2), (4.3), включающая  $(N-1)$  линейных алгебраических уравнений (4.2), условие  $\Phi_0 = 0$  и соотношение (4.3).

Для решения системы (4.2), (4.3), представимой в векторном виде равенством  $A\Phi = C$  с трехдиагональной матрицей  $A$ , был использован метод прогонки [17], [19], [20].

## 5 Вычисление плотности $\varrho(r)$

5.1. Перенос условий Коши из бесконечности. Перенос первого из условий (3.5), осуществляемый на основе асимптотик (2.14) и (2.13), дает в точке  $r_N$  соотношение:

$$\varrho(r_N) = \varrho_\infty - \sqrt{\mu/\alpha} \varrho_\infty^2 l_0 \Phi(r_N)/(\gamma P_\infty). \quad (5.1)$$

Перенос условия (3.5) для  $\varrho'(r)$  из бесконечности в  $r_N$  осуществляется путем задания значений  $\varrho(r_N)$  и  $\varrho(r_{N-1})$  с помощью формулы (5.1).

5.2. Разностный алгоритм для  $\varrho(r)$ . Обозначая  $\varrho_j := \varrho(r_j)$  и аппроксимируя  $\varrho'(r)$  и  $\varrho''(r)$  центральными разностными производными, получаем требуемую разностную схему для плотности:

$$\begin{aligned} &(\mu + \lambda) \left\{ -b_j'' \varrho_j + 2b_j' \varrho_j' + 2b_j [(\varrho_{j+1} - \varrho_j)/h - \varrho_j'] / h - \right. \\ &\left. - 2b_j (\varrho_j')^2 / \varrho_j + b_j \varrho_j' / r_j - b_j \varrho_j / r_j + b_j \varrho_j / r_j^2 \right\} + b_j (b_j \varrho_j' - b_j' \varrho_j) + \\ &+ \alpha b_j \varrho_j = \gamma P_\infty \varrho_j^{\gamma+1} \varrho_j' / (\varrho_\infty^\gamma) - \varrho_j^3 (l_0 \Phi_j + \Phi_j^2 / r_j). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Это соотношение представляет собой квадратное уравнение относительно разностной производной  $\varrho_j'$  вида  $a_2 (\varrho_j')^2 + a_1 \varrho_j' + a_0 = 0$ ; его коэффициенты, определяемые из (5.2), зависят от значений плотности в двух точках  $r_j$  и  $r_{j+1}$ . Решая это уравнение, находим связь между производной  $\varrho_j'$  и значениями  $\varrho_j$  и  $\varrho_{j+1}$

$$\varrho_j'(\varrho_j, \varrho_{j+1}) = \left( -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} \right) (2a_2)^{-1},$$

где берется та ветвь квадратного корня, которая дает значение  $\varrho_j'$ , ближайшее к  $(\varrho_{j+1} - \varrho_j)/h$ . Выражая с помощью формулы центральной разностной производной величину  $\varrho_{j-1}$  через значение  $\varrho_{j+1}$  и производную  $\varrho_j'$ , получаем в итоге рекуррентное соотношение

$$\varrho_{j-1} = \varrho_{j+1} - 2h \varrho_j'(\varrho_j, \varrho_{j+1}). \quad (5.3)$$

Используя заданные с помощью (5.1) значения  $\varrho_N$  и  $\varrho_{N-1}$ , последовательно находим по формуле (5.3) искомые  $\varrho_j$ , начиная с номера  $j = N-2$  и до  $j = 0$ , что и дает разностное решение задачи Коши для  $\varrho(r)$ .





## 6 Вычисление траекторий частиц воздуха в тайфуне

Уравнение  $\vartheta = \vartheta(r)$  траекторий частиц воздуха в тайфуне, записанное в полярных координатах, имеет вид  $\vartheta'(r) = \Phi(r)/(rU(r))$ . Зная найденные значения  $\Phi_j$  и  $U_j$  в узлах сетки  $r_j$  и используя разностную аппроксимацию для производной  $\vartheta'(r)$ , получаем разностную схему для расчета траектории  $\vartheta(r)$  частиц воздуха:

$$\vartheta_j = \vartheta_{j+1} - 2(r_{j+1} - r_j)(\Phi_{j+1} + \Phi_j)/[(r_{j+1} + r_j)(U_{j+1} + U_j)]. \quad (6.1)$$

Выбирая в качестве начальной некоторую точку  $(r_N, \vartheta_N)$  расчетной траектории и последовательно вычисляя  $\vartheta_j$  по формуле (6.1) при  $j = N - 1, N - 2, \dots, 1$ , строим разностную аппроксимацию траектории  $\{(r_j, \vartheta_j)\}_{j=1}^N$ .

## 7 Численная реализация модели и результаты расчетов

7.1. Точность алгоритма и выбор параметров модели. Представленная модель движения воздуха в нижнем слое тайфуна была численно реализована для широкого диапазона параметров модели. Численная реализация включала нахождение пространственного распределения тангенциальной  $\Phi(r)$ , радиальной  $U(r)$  компонент скорости и ее модуля  $|v(r)| = \sqrt{\Phi^2 + U^2}$ , плотности воздуха  $\varrho(r)$  и давления  $p(r)$ , а также расчет траекторий частиц воздуха.

Проведенное исследование точности алгоритма показало, что принятая вычислительная схема имела аппроксимацию порядка  $O(h^2)$ , где  $h$  — шаг сетки, что позволило добиться относительной точности расчетов не хуже  $10^{-3}$ .

Параметры модели выбирались на основе эмпирических данных из [4], [7]. Значения давления  $P_\infty$ , плотности  $\varrho_\infty$  и показателя адиабаты воздуха  $\gamma$  в уравнении (2.4) принимались для всех вариантов расчетов соответствующими невозмущенной атмосфере на уровне океана:

$$P_\infty = 10^5 \text{ кг/(мс}^2\text{)}, \quad \varrho_\infty = 1.29 \text{ кг/м}^3, \quad \gamma = 1.4.$$

Коэффициенты  $\mu$  и  $\lambda$  соответственно динамической и объемной вязкости и коэффициент трения  $\alpha$  в уравнениях (3.2), (3.3) брались в следующих интервалах:

$$\mu \in [0.5, 2] \cdot 10^5 \text{ кг/(мс)}, \quad \lambda \in [\mu/3, \mu], \quad \alpha \in [4, 10] \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м}^3\text{с)}. \quad (7.1)$$

Географическая широта  $\varphi_0$  центра тайфуна, определяющая по формуле (2.1) параметр Кориолиса  $l_0$ , выбиралась в диапазоне  $\varphi_0 \in [8, 20]^\circ$  СШ. Для модельной функции  $\beta(r)$  из (2.12) — плотности вертикального потока воздуха на верхней границе рассматриваемого слоя — параметры выбирались в интервалах:

$$\beta_0 \in [2, 6] \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}^3\text{с)}, \quad R \in [50, 100] \cdot 10^3 \text{ м}, \quad q \in [4.8/R, 5/R]. \quad (7.2)$$

7.2. Расчет характеристик типичного тайфуна. Численная реализация модели с различными сочетаниями значений параметров в диапазонах (7.1), (7.2) приводила к качественно сходным картинам распределения характеристик тайфуна.

Приведем типичные распределения скорости и плотности воздуха в основной части тайфуна, полученные при следующих значениях параметров функции  $\beta(r)$ :

$$\beta_0 = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}^3\text{с)}, \quad R = 90 \cdot 10^3 \text{ м}, \quad q = 4.93/R.$$



Значения остальных параметров полагались равными

$$\mu = 1.3 \cdot 10^5 \text{ кг/(мс)}, \quad \lambda = \mu/2, \quad \alpha = 6 \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м}^3\text{с)}, \quad \varphi_0 = 10^\circ \text{ СШ.}$$

На рисунке 1 штрихпунктирной и сплошной светлой линиями показаны графики зависимости тангенциальной  $\Phi(r)$  и радиальной  $|U(r)|$  компонент скорости воздуха от расстояния  $r$  до центра тайфуна.

Изображенное жирной линией распределение модуля скорости  $|v(r)|$  является типичным и наблюдавшимся (с несущественными изменениями) при любых значениях параметров модели из диапазонов (7.1), (7.2). Оно характеризуется тем, что за близко расположенным к центру тайфуна ( $r \approx 15$  км) довольно резким максимумом следует значительно дальше расположенный слабо выраженный второй максимум ( $r \approx 55$  км), либо пологий участок, который заканчивается медленным спаданием  $|v(r)|$ .

Описанное явление “двух максимумов” в распределении скорости ветра в тайфуне подтверждается данными наблюдений, приведенными на рисунке 2 и полученными путем измерений скорости ветра с самолета в одном из тайфунов экваториальной Атлантики [21]. Указанный характер распределения скорости ветра в приземной части тайфуна, по-видимому, может быть использован для объяснения значительного размера зоны вызываемых тайфунами сильных разрушений.

На рисунке 3 показаны рассчитанные спиралевидные траектории частиц воздуха в нижнем слое тайфуна, а на рисунке 4 дана полученная зависимость от  $r$  плотности воздуха  $\rho(r)$ , измеряемая в  $\text{кг/м}^3$ .

Продемонстрированная хорошая согласованность экспериментальной и расчетной картин распределения модуля скорости является показателем адекватности построенной модели.



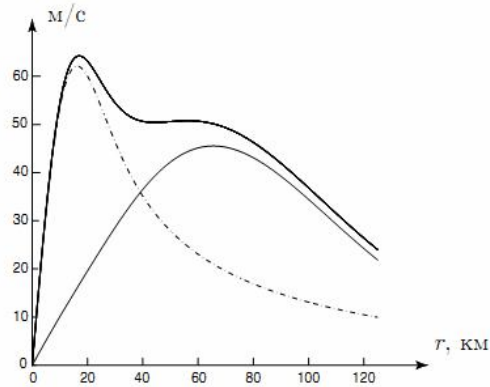


Рис. 1. Распределение тангенциальной компоненты  $\Phi(r)$  — штрихпунктирная линия, радиальной компоненты  $|U(r)|$  — сплошная светлая линия, модуля скорости  $|v(r)|$  — жирная линия.

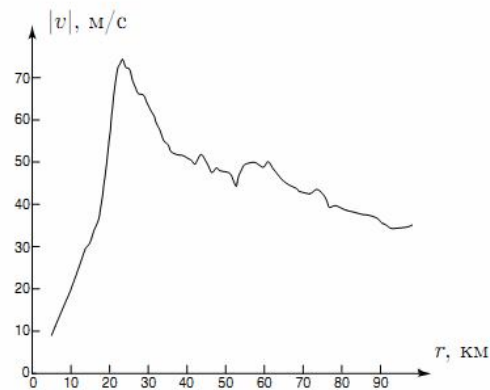


Рис. 2. Данные [21] измерений модуля скорости  $|v(r)|$  в нижнем слое тайфуна.

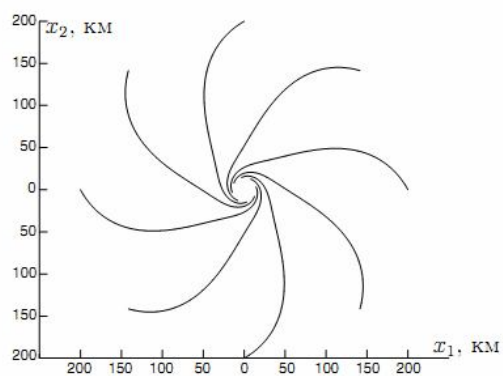


Рис. 3. Расчетные траектории движения воздуха в нижнем слое тайфуна.

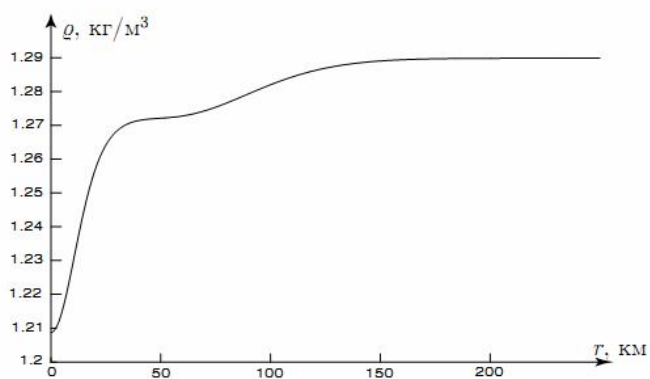


Рис. 4. Распределение плотности воздуха  $\rho(r)$  в тайфуне.





### Литература

1. E. Palmén, C.W. Newton. Atmospheric Circulation Systems. N.-Y., London, 1969.
2. Э.С. Мамедов, Н.И. Павлов. Тайфуны. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
3. H. Riehl. Climate and Weather in the Tropics. London, 1979.
4. А.П. Хаин, Г.Г. Сутырин. Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном. Л.: Гидрометеоиздат, 1983.
5. Л.С. Минина, Н.А. Безрукова. Циклоны тропиков. М.: Знание, 1984. Вып. 9.
6. R.A. Anthes. Tropical Cyclones — Their Evolution, Structure, and Effects. Boston, 1982.
7. А.П. Хаин. Математическое моделирование тропических циклонов. Л.: Гидрометеоиздат, 1984.
8. The Science and Forecasting of Tropical Cyclones. TPC-47. Rep. WMO/TD-No. 1129, Geneva, 2002.
9. M. Takeda, N. Matsuo, E. Matsuda. Evaluation of Typhoon Model Parameters and Storm Surge Analysis by Data for Past Ten Years // Journ. of Research Inst. for Scien. and Techn. 2001. V. 13. P. 123–132.
10. О.С. Розанова, Х.Я. Фужита. Стационарное решение уравнений движения воздуха в нижней части тайфуна // Сиб. ж. индустр. матем. 2005. Т. 8, No 4. С. 100–123.
11. А.М. Обухова. К вопросу о геострофическом ветре // Изв. Акад. Наук СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1949. Т. XIII, No 4. С. 281–306.
12. А.М. Обухова. Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988.
13. Д.М. Алишаев. О динамике двумерной бароклинной атмосферы // Изв. Акад. Наук СССР. Сер. физ. атм. и океана 1980. Т. 16, No 2. С. 99–107.
14. В.В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
15. E.A. Coddington, N. Levinson Theory of Ordinary Differential Equations. London, 1955.
16. А.А. Самарский. Теория разностных схем. М.: Наука, 1985.
17. Н.С. Бахвалов. Численные методы. М.: Наука, 1975.
18. А.А. Абрамов, Н.Б. Конюхова. Устойчивые начальные многообразия и сингулярные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Computational Mathematics. Banach Center Publications. 1981. Vol. 13. P. 319–351.
19. С.К. Годунов, В.С. Рябенский. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.



20. Г.И. Марчук. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
21. R.C. Sheets. On the structure of hurricanes as revealed by research Aircraft data, In: Intense atmospheric vortices. Proceedings of the Joint Symposium (IUTAM/IUGC) held at Reading (United Kingdom) July 14-17, 1981. Edited by L.Begtsson and J.Lighthill. P. 33-49.

### NUMERICAL MODILLING OF AIR MOTION IN THE LOWER LAYER OF TYPHOON

V.I. Vlasov<sup>1)</sup>, S.L. Skorokhodov<sup>1)</sup>, H.Fujita Yashima<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences,  
Vavilov str., 40, Moscow, 119991, Russia, e-mail: [skor@ccas.ru](mailto:skor@ccas.ru), [vlasov@ccas.ru](mailto:vlasov@ccas.ru)

<sup>2)</sup> Dipartimento di Matematica, Università di Torino,  
via Carlo Alberto, 10, Torino, 10123, Italia, e-mail: [hisao.fujitayashima@unito.it](mailto:hisao.fujitayashima@unito.it)

**Abstract.** A model of stationary axisymmetric air motion in a lower layer of typhoon is presented, which takes into account air viscosity and compressibility, as well as Coriolis force and friction against the Earth surface. The model is reduced to a system of three nonlinear differential equations for averaged in vertical direction horizontal velocity and density of air. By taking into consideration a function  $\beta$ , which describes the vertical air flux at the top of the layer, the problem is decomposed into two ones: a boundary value problem for tangential component of velocity and a Cauchy problem for air density. The rest quantities are found explicitly by means of the first ones. The performed effective numerical realization of the model, which results match well with observation data, have given an explanation of some regularities for velocity distribution in the lower layer of a typhoon.

**Keywords:** typhoons, mathematical modelling, systems of nonlinear differential equations, finite difference methods.