УДК 517.956

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОЙ С ЗАДАННЫМ СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ

А.В. Глушак, Ф.С. Дедиков

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: aleglu@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматриваются задача определения начального состояния по заданному среднему значению температуры и задача определения порядка среднего по заданному начальному состоянию и заданному среднему значению температуры в финальный момент времени.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, среднее значение температуры, численная минимизация функции одной переменной.

При изучении распространения тепла в стержне бесконечной длины возникает уравнение теплопроводности

$$u'_t = u''_{xx}, \quad t \in (0, \infty), \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{1}$$

Для выделения единственного решения этого уравнения следует задать распределение температуры в начальный момент времени

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{2}$$

Нас будут интересовать решения, представимые интегралом Пуассона

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) u_0(\xi)\ d\xi. \tag{3}$$

Поэтому мы будем считать, что функция $u_0(x)$ такова, что интеграл (3) определяет единственное классическое решение начальной задачи (1), (2) и этот факт мы будем записывать как $u_0(x) \in U$.

1 Задача определения начального состояния (обратная эволюционная задача).

Рассмотрим следующую задачу. Среди решений, определенных интегралом Пуассона (3), найти такую, которая в точке наблюдения $x = 0$ имеет заданную β-среднюю (см. [1], с. 519]) температуру за время t

$$\beta\, t^{-\beta} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s, 0)\, ds = u_1(t), \quad \beta > 0. \tag{4}$$

Отметим, что случай наблюдения в точке $x = x_0$ сводится к рассматриваемому случаю заменой переменной в интеграле Пуассона.

Работа первого автора поддержана РФФИ (грант 10–01–00062)

Выражение в левой части (4) называется β-средним функции $u\left(t,0\right)$ и представляет собой отношение дробного интеграла Римана-Лиувилля $I^{\beta}u\left(t,0\right)$ к $I^{\beta}1$, где

$$I^{\beta}v\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{\beta-1}v\left(s\right)ds,\quad \beta>0,$$

$\Gamma\left(\beta\right)$ — гамма-функция. Естественно считать, что β-среднее функции $u\left(t,0\right)$, т.е. $\Gamma\left(\beta+1\right)t^{-\beta}I^{\beta}\left(t,0\right)$, при $\beta=0$ равно $u\left(t,0\right)$.

Таким образом, задача состоит в нахождении начального состояния $u_0\left(x\right)\in U$, обеспечивающего выполнение равенства (4) при заданных $\beta\geq 0$ и $u_1\left(t\right)$. Более того, нам достаточно определить только четную составляющую $u_e\left(x\right)$ функции $u_0\left(x\right)$, т.е. $u_e\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(u_0\left(x\right)+u_0\left(-x\right)\right)$, поскольку

$$u\left(t,0\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)u_0\left(\xi\right)\ d\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)u_e\left(\xi\right)\ d\xi. \tag{5}$$

Такого рода задачи называются обратными эволюционными задачами (см. [2], [3]).

Пусть $\beta>0$, подставляя заданную равенством (5) функцию $u\left(t,0\right)$ в левую часть соотношения (4), получим

$$\Gamma\left(\beta+1\right)t^{-\beta}I^{\beta}u\left(t,0\right)=\beta t^{-\beta}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{\beta-1}\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\int_{0}^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4s}\right)u_e\left(\xi\right)\ d\xi ds=$$

$$=\beta t^{-\beta}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{\beta-1}\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\int_{0}^{\infty}\exp\left(-\frac{\eta}{s}\right)\eta^{-1/2}\ u_e\left(2\sqrt{\eta}\right)\ d\eta ds=u_1(t). \tag{6}$$

Интеграл в (6) может быть записан с помощью оператора Кобера ([4], с. 246, [5], с. 105)

$$K^{-}_{\alpha,\beta}[g]\left(t\right)=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_{t}^{\infty}\left(\tau-t\right)^{\beta-1}\tau^{-\alpha-\beta}g\left(\tau\right)d\tau,\quad \beta>0.$$

Пусть также $\phi\left(\eta\right)=\dfrac{u_e\left(2\sqrt{\eta}\right)}{\sqrt{\pi\eta}}$ и $\left[L\phi\right]\left(\lambda\right)=\displaystyle\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda\eta}\phi\left(\eta\right)\ d\eta,\quad \lambda>0.$

Стало быть, из (6) для нахождения функции $\phi\left(\eta\right)$ получаем уравнение

$$\Gamma\left(\beta+1\right)K^{-}_{1/2,\beta}\left[L\phi\right]\left(\frac{1}{t}\right)=\sqrt{t}\ u_1\left(t\right). \tag{7}$$

Оператор $D^{-}_{\alpha,\beta}$, такой что

$$D^{-}_{\alpha,\beta}\left[g\right]\left(t\right)=t^{\alpha+\beta}\left(-\frac{d}{dt}\right)^{n}t^{n-\alpha-\beta}K^{-}_{\alpha+\beta-n,n-\beta}\left[g\right]\left(t\right),\quad n=\left[\beta\right]+1,$$

является обратным по отношению к $K^{-}_{\alpha,\beta}$, для достаточно «хороших» (см. [5], с. 100) функций g. Следовательно, из (7) вытекает равенство

$$\left[L\phi\right]\left(t\right)=D^{-}_{1/2,\beta}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\beta+1\right)\sqrt{\tau}}u_1\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]\left(t\right):=\tilde{u}_{1,\beta}\left(t\right). \tag{8}$$

Наконец, если предположить определенную гладкость функции $\tilde{u}_{1,\beta}(t)$, то обращая преобразование Лапласа по формуле Поста-Уиддера (см. [1], с. 241) при $\beta > 0$ в (4), из (8), окончательно получим

$$\frac{u_e\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}} = \left[L^{-1}\tilde{u}_{1,\beta}\right](x) = \lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{x}\right)^{k+1}\tilde{u}_{1,\beta}^{(k)}\left(\frac{k}{x}\right),$$

следовательно, чётная составляющая $u_0(x)$ может быть определена из условия (4) при определенной гладкости функции $u_1(t)$.

В случае $\beta = 0$ ситуация намного проще. Функция $u_e(x)$ определяется обращением преобразования Лапласа из равенства

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)u_e(\xi)\ d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\eta/t}\eta^{-1/2}u_e\left(2\sqrt{\eta}\right)\ d\eta = u_1(t).$$

Она имеет вид

$$\frac{u_e\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{x}\right)^{k+1}\tilde{u}_{1,0}^{(k)}\left(\frac{k}{x}\right), \quad \tilde{u}_{1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,u_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Отметим, что для нахождения четной составляющей $u_e(x)$ функции $u_0(x)$ можно применить другой способ, который мы приведем ниже. Но для решения обратной параметрической задачи в п. 2 нам нужна формула (7), полученная изложенным способом.

Другой способ состоит в следующем. Считая функцию $u_1(t)$ достаточно гладкой, применим к равенству (4) оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля (см. [4], [5]) $D^\beta = \dfrac{d^n}{dt^n}I^{1-\{\beta\}}$, $\ n = [\beta]+1$. Получим

$$u(t,0) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}D^\beta\left(t^\beta u_1(t)\right). \tag{9}$$

Из равенств (9) и (5) для нахождения $u_e(x)$ выводим уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\eta/t}\eta^{-1/2}u_e\left(2\sqrt{\eta}\right)d\eta = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}D^\beta\left(t^\beta u_1(t)\right),$$

из которого с помощью обратного преобразования Лапласа будем иметь

$$\frac{u_e\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{x}\right)^{k+1}\hat{u}_{1,\beta}^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right),$$

где $\hat{u}_{1,\beta}(x) = \sqrt{t}D^\beta\left(t^\beta u_1(t)\right)$ при $t = 1/x$.

Пример 1. Пусть $u_1(t) = t^{\gamma-1/2}$, где $\gamma > \max\{\beta - n - 1/2; 0\}$, $\ n = [\beta]+1$. Вычислим функцию $\tilde{u}_1(t)$, определенную равенством (8). Имеем

$$\tilde{u}_1(t) = D^-_{1/2,\beta}\left[\frac{\tau^{-\gamma}}{\Gamma(\beta+1)}\right](t) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}t^{\beta+1/2}\left(-\frac{d}{dt}\right)^n\left(t^{n-\beta-\frac{1}{2}}K^-_{\beta-n+1/2,n-\beta}\left[\tau^{-\gamma}\right](t)\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\beta+1)} t^{\beta+1/2} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_t^\infty (\tau-t)^{n-\beta-1} \tau^{-\gamma-1/2}\, d\tau \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\beta)} t^{\beta+1/2} \frac{d^n}{dt^n} \left(t^{n-\beta-\gamma-1/2} \int_0^1 (1-s)^{n-\beta-1} s^{\beta+\gamma-n-1/2}\, ds \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+\gamma-n+1/2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1/2)} t^{\beta+1/2} \frac{d^n}{dt^n} \left(t^{n-\beta-\gamma-1/2} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+\gamma-n+1/2)\Gamma(n-\beta-\gamma+1/2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1/2)\Gamma(-\beta-\gamma+1/2)} t^{\gamma}.$$

В частности, при $\gamma = 1/2$, учитывая известное свойство гамма-функции $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$, будем иметь

$$\tilde{u}_1(t) = \frac{(-1)^n \Gamma(1+\beta-n)\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(-\beta)} t^{-1/2} = \frac{\frac{(-1)^n \pi}{\sin \pi (n-\beta)}}{\frac{\pi}{\sin(-\pi\beta)}} t^{-1/2} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \sin \pi\beta}{\sin \pi (n-\beta)} t^{-1/2} = t^{-1/2}.$$

Из равенства $[L\phi](t) = \tilde{u}_1(t)$ найдем оригинал. Получим

$$\phi(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+\gamma-n+1/2)\Gamma(n-\beta-\gamma+1/2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1/2)\Gamma(-\beta-\gamma+1/2)} x^{\gamma-1}.$$

В частности, если $\gamma = 1/2$, то $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$.

Определим далее $u_e(x)$ из равенства $\phi(\eta) = \dfrac{u_e(2\sqrt{\eta})}{\sqrt{\pi\eta}}$. Будем иметь

$$u_e(x) = \frac{\sqrt{\pi} x}{2} \phi\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}\, \Gamma(\beta+\gamma-n+1/2)\Gamma(n-\beta-\gamma+1/2)\, 2^{1+2\gamma}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+1/2)\Gamma(-\beta-\gamma+1/2)} x^{2\gamma-1} =$$

$$= \frac{(-1)^n \pi\sqrt{\pi}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+1/2)\Gamma(-\beta-\gamma+1/2)\sin \pi(\beta+\gamma-n+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\gamma-1} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+1/2)\Gamma(-\beta-\gamma+1/2)\cos \pi(\beta+\gamma)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\gamma-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta+\gamma+1/2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\gamma-1}.$$

В частности если $\gamma = 1/2$, то $u_e(x) = 1$, что естественно, т.к., если мы хотим чтобы средняя температура $u_1(t)$ за время t была постоянной, то и начальная функция также должна быть постоянной.

Второй способ, естественно, приводит к тому же результату. Действительно,

$$u_1(t) = t^{\gamma-1/2}, \quad D^\beta\left(t^\beta u_1(t)\right) = \frac{\Gamma(\beta+\gamma+1/2)}{\Gamma(\gamma+1/2)} t^{\gamma-1/2},$$

$$\int_0^\infty e^{-\eta/t}\frac{u_e\left(2\sqrt{\eta}\right)}{\sqrt{\pi\eta}}\,d\eta=\frac{\Gamma\left(\beta+\gamma+1/2\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\gamma+1/2\right)}\,t^{\gamma},$$

$$\frac{u_e\left(2\sqrt{\eta}\right)}{\sqrt{\pi\eta}}=\frac{\Gamma\left(\beta+\gamma+1/2\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\gamma\right)\Gamma\left(\gamma+1/2\right)}\eta^{\gamma-1},$$

$$u_e\left(x\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\beta+\gamma+1/2\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\gamma\right)\Gamma\left(\gamma+1/2\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\gamma-1}.$$

2 Задача определения порядка среднего (обратная параметрическая задача).

Для функций, определяемых интегралом Пуассона (3) при $t\in[0,1]$ найдем порядок средней температуры β так, чтобы при заданных $u_0\left(x\right)$ и $u_1\left(1\right)$ выполнялось равенство

$$\lim_{t\to1}\Gamma\left(\beta+1\right)t^{-\beta}I^{\beta}u\left(t,0\right)=u_1\left(1\right). \tag{10}$$

Отметим, что задавать дополнительное условие в виде (4), вообще говоря, нельзя. Например, при $u_0(x)\equiv1$ мы получим уравнение $\dfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}=u_1(t)$, неразрешимое при произвольном выборе $u_1(t)$. Следовательно, необходимо фиксировать финальный момент наблюдения. Промежуток $t\in[0,1]$ выбран для компактности записей. Такого рода задача рассматривается, по-видимому, впервые и мы ее называем обратной параметрической задачей.

При $\beta>0$, $\phi\in L_p\left(0,\infty\right)$, $1\le p<\infty$, учитывая равенство (6), из условия (10) получим уравнение

$$\beta\int_1^\infty\left(\tau-1\right)^{\beta-1}\tau^{-\beta-1/2}\left[L\phi\right]\left(\tau\right)\,d\tau=\beta\int_0^1\left(1-s\right)^{\beta-1}s^{-1/2}\left[L\phi\right]\left(\frac{1}{s}\right)\,ds=u_1(1).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$f\left(\beta\right)=\begin{cases}\beta\displaystyle\int_0^1\left(1-s\right)^{\beta-1}s^{-1/2}\left[L\phi\right]\left(\frac{1}{s}\right)\,ds, & \beta>0,\\ [L\phi](1), & \beta=0,\end{cases} \tag{11}$$

где, по-прежнему, $\phi\left(x\right)=\dfrac{u_e\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}}$ — заданная функция.

Для «достаточно хороших» $\phi\left(\tau\right)$, функция $f\left(\beta\right)$ непрерывна при $\beta\ge0$ (см. теоремы 2.6, 2.7 [4]). Таким образом, исходная задача сводится к задаче нахождения числа $\beta\ge0$ из условия

$$f\left(\beta\right)=u_1\left(1\right). \tag{12}$$

Если число $u_1\left(1\right)$ принадлежит множеству значений функции f, т.е. если $u_1\left(1\right)\in f\left([0,\infty)\right)$, то поставленная задача разрешима. В противном случае, ее естественно видоизменить следующим образом: найти число $\beta_0\ge0$ минимизирующее разность $\left|f\left(\beta\right)-u_1(1)\right|$. К сожалению, точное решение указанных задач не всегда возможно.

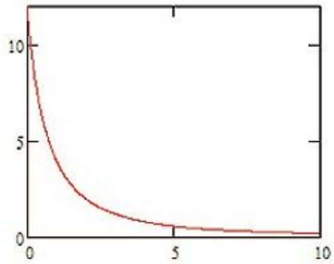

Рис. 1: График функции $f(\beta)$ для $u_0(x) = x^4$.

Пример 2. Пусть $u_0(x) = x^\delta$, $\delta > -1$. Тогда

$$\phi(x) = \frac{(2\sqrt{x})^\delta}{\sqrt{\pi x}}, \quad [L\phi](p) = \frac{2^\delta\ \Gamma(\delta/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi}\ p^{\delta/2+1/2}}, \quad [L\phi]\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{2^\delta\ \Gamma(\delta/2+1/2)}{\sqrt{\pi}}\ s^{\delta/2+1/2},$$

$$f(\beta) = \begin{cases} \dfrac{2^\delta \beta\ \Gamma(\delta/2+1/2)}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} s^{\delta/2}\, ds, & \beta > 0, \\ \dfrac{2^\delta\ \Gamma(\delta/2+1/2)}{\sqrt{\pi}}, & \beta = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2^\delta \Gamma(\beta+1)\Gamma(\delta/2+1/2)\Gamma(\delta/2+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\delta/2+\beta+1)}, & \beta > 0, \\ \dfrac{2^\delta\ \Gamma(\delta/2+1/2)}{\sqrt{\pi}}, & \beta = 0. \end{cases} =$$

$$= \frac{2^\delta \Gamma(\beta+1)\Gamma(\delta/2+1/2)\Gamma(\delta/2+1)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\delta/2+\beta+1)}, \ \beta \geq 0.$$

В частности, если $u_0(x) = x^4$ или $u_0(x) = |x|$, то, соответственно получим (см. рис. 1 и рис. 2)

$$f(\beta) = \frac{24}{(\beta+1)(\beta+2)}, \ \beta \geq 0, \qquad f(\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+3/2)}, \ \beta \geq 0.$$

В первом случае задача нахождения неизвестного параметра β элементарна. Во втором же случае, как и во многих других, следует применять численные методы решения, в частности, методы численного решения алгебраических уравнений или методы численной минимизации функций одной переменной. Отметим, что решение осложняется наличием операции интегрирования в формуле (11), задающей функцию $f(\beta)$ и тем, что преобразование Лапласа нужно найти до процедуры численного решения.

Приведем еще несколько примеров нахождения функции $f(\beta)$.

Пример 3. Пусть $u_0(x) = \exp(-x^2)$. Тогда (см. рис. 3)

$$\phi(x) = \frac{\exp(-4x)}{\sqrt{\pi x}}, \quad [L\phi](p) = \frac{1}{\sqrt{p+4}}, \quad [L\phi]\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4s+1}},$$

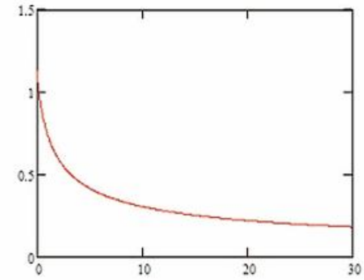

Рис. 2: График функции $f(\beta)$ для $u_0(x) = |x|$.

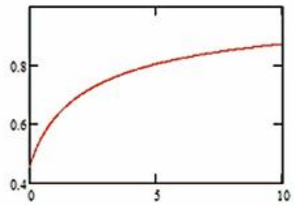

Рис. 3: График функции $f(\beta)$ для $u_0(x) = \exp(-x^2)$.

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta \displaystyle\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} (1+4s)^{-1/2}\, ds, & \beta > 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}, & \beta = 0. \end{cases}$$

Пример 4. Пусть $u_0(x) = \sin^2 x$. Тогда (см. рис. 4)

$$\phi(x) = \frac{\sin^2(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}}, \quad [L\phi](p) = \frac{1}{\sqrt{p}}(1 - \exp(-4/p)), \quad [L\phi]\left(\frac{1}{s}\right) = \sqrt{s}(1 - \exp(-4s)),$$

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta \displaystyle\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} (1 - \exp(-4s))\, ds, & \beta > 0, \\ 1 - \exp(-4), & \beta = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 - \beta \displaystyle\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} \exp(-4s)\, ds, & \beta > 0, \\ 1 - \exp(-4), & \beta = 0. \end{cases}$$

3 Численное решение задачи п. 2

. Для численного решения задачи п. 2 для уравнения теплопроводности на языке программирования Borland Delphi 7 была написана программа поиска минимума, на основе использования метода квадратичной интерполяции. Метод, был выбран путем сравнения

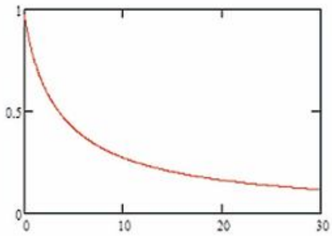

Рис. 4: График функции $f(\beta)$ для $u_0(x) = \sin^2 x$.

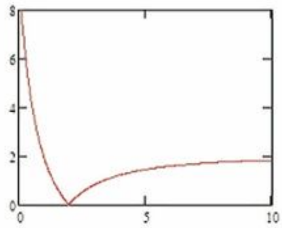

Рис. 5: График функции $\left|\dfrac{24}{(\beta+1)(\beta+2)} - 2\right|$, $\beta \geq 0$.

(учитывалась скорость сходимости, точность), как наилучший среди методов нулевого порядка (см. [6], [7]). Алгоритм поиска экстремума основывается на аппроксимации по трем точкам. Точки должны быть взяты вблизи минимума, в противном случае алгоритм будет расходящимся и искомое решение не будет найдено. Начальная точка поиска выбирается исходя из построенного графика функции $f(\beta)$. В отдельном блоке программы задается функция $f(\beta)$, содержащая интеграл, также отдельно введен алгоритм вычисления интеграла методом Симпсона.

Пример 5. Пусть в задаче (1), (2), (10) $u_0 = x^4$, $u_1(1) = 2$. Тогда уравнение (12), с учетом примера 2, примет вид

$$\frac{24}{(\beta+1)(\beta+2)} = 2, \quad \beta \geq 0,$$

и, следовательно, $\beta = 2$ — точное решение (см. рис. 5).

Пример 6. Пусть в задаче (1), (2), (10) $u_0 = |x|$, $u_1(1) = 1$. Тогда уравнение (12), с учетом примера 2, примет вид

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+3/2)} = 1, \quad \beta \geq 0.$$

В этом случае $u_1(1) = 1 \in f([0,\infty))$ (см. рис. 6) и метод квадратичной интерполяции (см. [6], с. 127), при точности 0,001, дает $\beta = 0,221$.

Если же $u_1(1) = 2 \notin f([0,\infty))$, то в качестве решения следует взять (см. рис. 7) значение

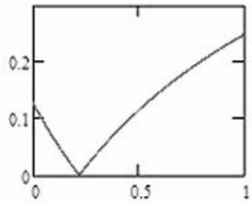

Рис. 6: График функции $\left|\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+3/2)}-1\right|,\ \beta\geq 0.$

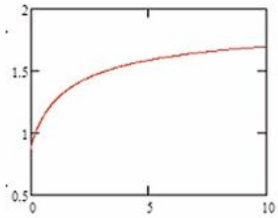

Рис. 7: График функции $\left|\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+3/2)}-2\right|,\ \beta\geq 0.$

$\beta=0$, минимизирующее разность

$$\left|\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+3/2)}-2\right|.$$

4 Другие функционалы наблюдения в обратной параметрической задаче.

Возможна и иная постановка дополнительного условия нахождения порядка среднего. Вместо условия (10) можно задать, например условие вида

$$\lim_{t\to 1}\Gamma\left(\beta+1\right)t^{-\beta}I^{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda x\ u\left(t,x\right)dx=v_1. \tag{13}$$

Подставляя задаваемую равенством (3) функцию $u\left(t,x\right)$ в (13) и считая выполненным условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda\xi\ u_0\left(\xi\right)\ d\xi<\infty,$$

после элементарных вычислений, получим

$$\Gamma\left(\beta+1\right)E_{1,\beta+1}\left(-\lambda^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda\xi\ u_0\left(\xi\right)\ d\xi=v_1,$$

или, используя равенство 5.2.7.20 [6], приходим к уравнению

$$e^{-\lambda^2}\int_0^1 \exp\left(\lambda^2 s^{1/\beta}\right) ds \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda\xi\; u_0(\xi)\; d\xi = v_1,$$

из которого при $\lambda \neq 0$ число β ищется методом, изложенным в п. 3.

5 Задача определения источника тепла (обратная коэффициентная задача).

Если внутри рассматриваемого тела имеется независящий от времени источник тепла, то вместо уравнения (1) следует рассмотреть неоднородное уравнение

$$u'_t = u''_{xx} + h(x), \quad t \in (0,T], \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{14}$$

Как известно, решение уравнения (14), удовлетворяющее нулевому начальному условию

$$u(0,x) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{15}$$

имеет вид

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) h(\xi)\; d\xi d\tau. \tag{16}$$

Обратная коэффициентная задача состоит в нахождении функции $h(x)$ так, чтобы определяемая равенством (16) функция $u(t,x)$ удовлетворяла условию (4). Нулевое начальное условие (15) взято для упрощения записей. Ненулевое начальное условие приведет лишь к изменению задаваемой функции $u_1(t)$.

Пусть $\beta > 0$, подставляя заданную равенством (16) функцию $u(t,0)$ в левую часть соотношения (4), получим

$$\Gamma(\beta+1)\, t^{-\beta} I^{\beta} u(t,0) =$$
$$= \beta t^{-\beta}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\; ds \int_0^s \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi(s-\tau)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(s-\tau)}\right) h_e(\xi)\; d\xi d\tau =$$
$$= \frac{\beta}{t^\beta}\int_0^{\infty} h_e(\xi)\; d\xi \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{\pi(s-\tau)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(s-\tau)}\right)\; d\tau ds =$$
$$= \frac{\beta}{\sqrt{\pi}\; t^\beta}\int_0^{\infty} h_e(\xi)\; d\xi \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \int_0^s \tau^{-1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right)\; d\tau ds =$$
$$= \frac{\beta}{\sqrt{\pi}\; t^\beta}\int_0^{\infty} h_e(\xi)\; d\xi \int_0^t \tau^{-1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) \int_\tau^t (t-s)^{\beta-1}\; ds d\tau =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\; t^\beta}\int_0^{\infty} h_e(\xi)\; d\xi \int_0^t (t-\tau)^{\beta}\, \tau^{-1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right)\; d\tau =$$
$$= t^{-\beta}\int_0^t (t-s)^{\beta} \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta}{s}\right) \eta^{-1/2}\; h_e(2\sqrt{\eta})\; d\eta ds = u_1(t), \tag{17}$$

где $h_e(x) = \dfrac{1}{2}\left(h_0(x) + h_0(-x)\right)$.

Равенства (17) аналогичны равенствам (6) и отличаются лишь тем, что отсутствует множитель β перед интегралами, а под знаком интеграла записано $(t-\tau)^{\beta}$ вместо $(t-\tau)^{\beta-1}$. Поэтому аналогично п. 1 получим соотношения

$$\Gamma(\beta+1)\, K^{-}_{1/2,\beta+1}\,[L\psi]\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\, u_1(t), \quad \psi(\eta) = \frac{h_e(2\sqrt{\eta})}{\sqrt{\pi\eta}}, \tag{18}$$

$$[L\psi](t) = D^{-}_{1/2,\beta+1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)\sqrt{\tau}}\, u_1\left(\frac{1}{\tau}\right)\right](t) := \tilde{w}_{1,\beta}(t),$$

$$\frac{h_e(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} = \left[L^{-1}\tilde{w}_{1,\beta}\right](x).$$

Заметим, что последние три равенства справедливы и при $\beta = 0$.

Также как и в п. 1 можно применить и другой способ нахождения $h_e(x)$. Из равенств (4) и (16), как и в п. 1 (второй способ), выводим уравнение

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)\, h_e(\xi)\, d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta+1)} D^{\beta+1/2}\left(t^{\beta}u_1(t)\right),$$

из которого с помощью обратного преобразования Лапласа будем иметь

$$\frac{h_e(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{x}\right)^{k+1}\hat{w}^{(k)}_{1,\beta}\left(\frac{1}{x}\right),$$

где $\hat{w}_{1,\beta}(x) = \dfrac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta+1)}\, D^{\beta+1/2}\left(t^{\beta}u_1(t)\right)$ при $t = 1/x$.

6 Задача определения порядка среднего по заданному источнику тепла (обратная параметрическая задача).

Для функций, определяемых равенством (16) при $t \in [0,1]$ найдем порядок средней температуры β так, чтобы при заданных $h(x)$ и $u_1(1)$ выполнялось равенство (10).

Учитывая (17), (18), из условия (10) получим уравнение

$$\int_1^{\infty}(\tau-1)^{\beta}\,\tau^{-\beta-3/2}\,[L\psi](\tau)\, d\tau = \int_0^1 (1-s)^{\beta}\, s^{-1/2}\,[L\psi]\left(\frac{1}{s}\right)\, ds = u_1(1).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$g(\beta) = \int_0^1 (1-s)^{\beta}\, s^{-1/2}\,[L\psi]\left(\frac{1}{s}\right)\, ds,$$

где, по-прежнему, $\phi(x) = \dfrac{u_e(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}}$ — заданная функция. Тогда задача сводится к задаче нахождения числа $\beta \geq 0$ из условия $g(\beta) = u_1(1)$ и решается аналогично п. 3.

Литература

1. Э. Хилле , Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Иностранная литература. 1962.
2. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York. Basel: Marcel Dekker. 2000.
3. А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: УРСС. 2007.
4. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника. 1987.
5. A.A. Kilbas,H.M. Srivastava,J.J. Trujillo. Theory and application of fractional differential equations. Math. Studies. V. 204. Elsevier. 2006.
6. А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. Методы оптимизации в примерах и задачах. Москва. Высшая школа. 2005.
7. А. Жилинскас, В. Шалтянис. Поиск оптимума. М.: Наука. 1989.
8. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. 1981.

ABOUT THE INVERSE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION ON THE INFINITE LINE WITH A GIVEN AVERAGE

A.V. Glushak, F.S. Dedikov

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: aleglu@bsu.edu.ru

Abstract. Consider the problem of determining the initial state for a given average temperature and determining the order of the average for a given initial state and given the average temperature in the final time point.

Keywords: heat equation, the average temperature, numerical minimization of functions of one variable.