УДК 517.956

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

А.Н. Зарубин, О.В. Лаштабега

Орловский государственный университет,
ул. Комсомольская, 95, Орел, 302026, Россия, e-mail: aleks_zarubin@mail.ru,tanda80@yandex.ru

Аннотация. Для уравнения смешанного типа с оператором Лаврен-тьева-Бицадзе, негладкой линией вырождения и запаздыванием в производной рассматривается в несимметричной области аналог задачи Трикоми.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, запаздывание, интегро-дифференциально-разностное уравнение

Уравнение

$$Lu(x,y) \equiv u_{xx}(x,y) + sgn(xy)u_{yy}(x,y) - H(x-\tau)u_x(x-\tau,y) = 0, \tag{1}$$

$0 < \tau \equiv const$, $H(\xi)$–функция Хевисайда, рассмотрим в несимметричной полубесконечной области $D = D_1 \bigcup D_2 \bigcup D_3 \bigcup J_1 \bigcup J_2$, где $D_1 = \{(x,y) : x > 0, -x < y < 0\}$, $D_2 = \{(x,y) : -h/2 < x < 0, -x < y < x+h\}$ и $D_3 = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_{3k} = \{(x,y) : x > 0,\ 0 < y < h\}$ – гиперболические и эллиптическая части области D, причем $D_{3k} = \{(x,y) : k\tau < x \leq (k+1)\tau,\ 0 < y < h\}$, $0 < h \equiv const$, $J_1 = \{(x,y) : x > 0,\ y = 0\}$, $J_2 = \{(x,y) : x = 0,\ 0 < y < h\}$.

Задача T. *Найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{D}) \bigcap C^1(D) \bigcap C^2(D \setminus (J_1 \bigcup J_2))$, исчезающее на бесконечности, производные которого $u_x(0,y)$, $u_y(x,0)$ в точке $(0,0)$ ограничены, в точке $(0,h)$ функция $u_x(0,y)$ допускает особенность не выше 1/2 ($u_x(0,y) = o((h-y)^{-1/2})$), а $u_y(x,0)$ исчезает при $x \longrightarrow +\infty$ ($u_y(x,0)=o\big(\exp\big(-(1/4+\varepsilon)\big)x\big)$ $(0 < \varepsilon \leq 1/4)$); удовлетворяющее граничным условиям*

$$u(x,h) = f(x),\ \ 0 \leq x < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,-x) = \psi_1(x),\ \ x \geq 0 \tag{3}$$

$$u(-y,y) = \psi_2(y),\ \ 0 \leq y \leq h/2; \tag{4}$$

условиям сопряжения

$$u(x,-0) = u(x,+0) = \omega_1(x);\ \ u(-0,y) = u(+0,y) = \omega_2(y), \tag{5}$$

$$u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \nu_1(x);\ \ u_x(-0,y) = u_x(+0,y) = \nu_2(y), \tag{6}$$

где $f(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(y)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\omega_j(t)$ и $\nu_j(t)$ $(j = 1,2)$ – соотвественно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции, подлежащие определению.

Теорема 1 *Пусть* $f(x) \in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $f(+\infty) = 0$, $f(x) = o(x^2)$ *при* $x \to 0$; $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\psi_1(+\infty) = 0$ *и* $\psi_i'(t)$, $\psi_i''(t)$ $(i = 1,2)$ *принадлежат классу Гельдера внутри соответствующих промежутков, причем* $\psi_i'(t)=o\big(\exp(\gamma t)\big)$ $(\gamma < -1/2)$ *при* $t \to +\infty$; $(h/2-t)^{1/2}\psi_2'(t) \to 0$ *при* $t \to h/2$. *Тогда существует единственное при* $h \le 2\sqrt{2}$ *решение* $u(x,y)$ *задачи* T.

Доказательство теоремы разобьем на ряд этапов.

I. Единственность решения задачи Т вытекает из ниже следующих утверждений.

Лемма 1 *Если* $u(x,y)$ – *решение уравнения (1) в области* D_3 *из класса* $C(\overline{D}_3)\bigcap C^2(D_3)$, *исчезающее на бесконечности с однородным условием (2) и* $h \le 2\sqrt{2}$, *то*

$$\beta = \int\limits_0^{+\infty} \omega_1(x)\nu_1(x)dx + \int\limits_0^{h} \omega_2(y)\nu_2(y)dy \le 0 \tag{7}$$

и

$$\beta + \iint\limits_{D_3}\Bigg[u_x^2(x,y)\big(1-(h^2-y^2)/8\big) + \Bigg(u_y(x,y) - \frac{1}{2}H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)d\xi\Bigg)^2\Bigg]dxdy \le 0. \tag{8}$$

Доказательство получим из тождества

$$u(x,y)Lu(x,y) \equiv \big(u(x,y)u_x(x,y)\big)_x + \big(u(x,y)u_y(x,y)\big)_y -$$
$$-u_x^2(x,y) - u_y^2(x,y) - H(x-\tau)u(x,y)u_x(x-\tau,y) = 0,$$

интегрируя которое по области $D_3^{\varepsilon\rho}=\{(x,y) : \varepsilon < x < \rho,\ \ \varepsilon < y < h\}$ $(0 < \varepsilon < \rho \equiv const)$, применяя формулу Грина [1] и условия леммы, в пределе при $\rho \to +\infty$, $\varepsilon \to 0$, найдем, в силу (5)—(6), что

$$\beta + \iint\limits_{D_3}\big[u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y) + H(x-\tau)u(x,y)u_x(x-\tau,y)\big]dxdy = 0. \tag{9}$$

Так как, в силу интегрирования по частям и однородности условия (2),

$$\iint\limits_{D_3} H(x-\tau)u(x,y)u_x(x-\tau,y)dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{D_3} u_y(x,y)\Bigg(H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)d\xi\Bigg)dxdy,$$

то (9) можно записать в форме

$$\beta + \iint\limits_{D_3} \left[u_x^2(x,y) + \left(u_y(x,y) - \frac{1}{2} H(x-\tau) \int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)d\xi \right)^2 \right] dxdy =$$

$$= \frac{1}{4} \iint\limits_{D_3} \left(H(x-\tau) \int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)d\xi \right)^2 dxdy,$$

что, в силу неравенства Коши-Буняковского [2] для интеграла

$$\iint\limits_{D_3} \left(H(x-\tau) \int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)d\xi \right)^2 dxdy = \iint\limits_{D_3} \left(\int\limits_0^y u_x(x,\xi)d\xi \right)^2 dxdy \leq$$

$$\leq \iint\limits_{D_3} \left(y \int\limits_0^y u_x^2(x,\xi)d\xi \right) dxdy = \frac{1}{2} \iint\limits_{D_3} (h^2 - y^2) u_x^2(x,y) dxdy,$$

приводит при $h \leq 2\sqrt{2}$ к утверждениям леммы (7) и (8).

Лемма 2 (3). *Если $u(x,y) \in C(\overline{D}_1) \bigcap C^2(D_1)$ $(u(x,y) \in C(\overline{D}_2) \bigcap C^2(D_2))$ – решение уравнения (1), обращающееся в нуль на характеристике $y = -x$ $(x = -y)$, то* $\int\limits_0^{+\infty} \omega_1(x)\nu_1(x)dx \geq 0$ $\left(\int\limits_0^h \omega_2(y)\nu_2(y)dy \geq 0 \right)$.

Утверждение леммы доказано аналогично [3].

II. Для доказательства **существования** решения задачи Т отдельно рассмотрим:
а) в гиперболической области D_1 задачу Коши

$$\begin{aligned} & u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) - H(x-\tau)u_x(x-\tau,y) = 0, \ \ (x,y) \in D_1, \\ & u(x,0) = \omega_1(x), \ \ 0 \leq x < +\infty, \\ & u_y(x,0) = \nu_1(x), \ \ 0 < x < +\infty, \\ & \omega_1'(0) = 0, \ \ \omega_1(+\infty) = 0; \end{aligned} \tag{10}$$

б) в гиперболической области D_2 задачу Коши

$$\begin{aligned} & u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0, \ \ (x,y) \in D_2, \\ & u(0,y) = \omega_2(y), \ \ 0 \leq y \leq h, \\ & u_x(0,y) = \nu_2(y), \ \ 0 < y < h, \\ & \omega_2'(0) = 0, \ \ \omega_2(h) = f(0); \end{aligned} \tag{11}$$

в) в эллиптической области D_3 задачу Неймана-Дирихле

$$\begin{aligned}
&u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)-H(x-\tau)u_x(x-\tau,y)=0,\ \ (x,y)\in D_3,\\
&u_y(x,0)=\nu_1(x),\ \ 0<x<+\infty,\\
&u_x(0,y)=\nu_2(y),\ \ 0<y<h,\\
&u(x,h)=f(x),\ \ 0\le x<+\infty,\\
&\lim_{x\to+\infty}u(x,y)=0,\ \ 0\le y\le h,\\
&f(0)=\omega_2(h),\ \ f(+\infty)=0.
\end{aligned}\tag{12}$$

Исходя из функциональных соотношений между $\omega_j(t)$ и $\nu_j(t)$ $(j=1,2)$, полученных из решений задач Коши (10)—(11) и Неймана-Дирихле (12), в силу соответственно условий (3), (4) и (5), составим полную сингулярную интегральную систему относительно $\nu_j(t)$.

Лемма 4 *Пусть $\omega_1(x)\in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $\nu_1(x)\in C^1(0,+\infty)$, абсолютно интегрируемы на $[0,+\infty)$, $\omega_1'(0)=0$, $\omega_1(+\infty)=0$ и $Q_{1k}=\{(x,y):-y<x<(k+1)\tau+y,\ -(k+1)\tau/2<y<0\}$, $k=0,1,2,....$ Тогда существует единственное решение задачи Коши (10), имеющее вид*

$$u(x,y)=\{u_k(x,y),\ \ (x,y)\in\overline{D}_{1k}=\overline{Q_{1k}\setminus Q_{1(k-1)}}\ \ (k=0,1,2,...)\},\tag{13}$$

если

$$\begin{aligned}
u_k(x,y)=\phi_k(x,y)H(x)+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\cdot\\
\cdot\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{x-m\tau}(x-m\tau)\left((x-m\tau)^2-\eta^2\right)^{m-1}\phi(\eta,y)d\eta,
\end{aligned}\tag{14}$$

где $\gamma_m=\left(m!\Gamma(m)2^{2m-1}\right)^{-1}$,

$$\phi(x,y)=\{\phi_k(x,y),\ \ (x,y)\in\overline{D}_{1k}\ \ (k=0,1,2,...)\},\tag{15}$$

а

$$\phi_k(x,y)=\frac{1}{2}\left[z_k^{\omega_1}(x-y)+z_k^{\omega_1}(x+y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}z^{\nu_1}(\xi)d\xi;\tag{16}$$

$$z^{\omega_1}(x)=\{z_k^{\omega_1}(x),\ \ k\tau\le x\le(k+1)\tau\ \ (k=0,1,2,...)\},\tag{17}$$

когда

$$\begin{aligned}
z_k^{\omega_1}(x)=\omega_1(x)H(x)+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\gamma_m 2^{m-1}(m-1)!H(x-m\tau)\cdot\\
\cdot\frac{d}{dx}\left[x^{m-1}(x-m\tau)\int\limits_0^{x-m\tau}\omega_1(\xi)d\xi\right]+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\cdot\\
\cdot\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x-m\tau}\eta\left(\int\limits_0^{\eta}\omega_1(\xi)d\xi\right)\frac{d^m}{d\eta^m}\left(x^2-\left(\eta+m\tau\right)^2\right)^{m-1}d\eta,
\end{aligned}\tag{18}$$

причем $z^{\nu_1}(x)$ совпадает с $z^{\omega_1}(x)$ из (17)—(18), если там заменить $\omega_1(x)$ на $\nu_1(x)$.

Доказательство утверждения леммы следует из непосредственно проверяемого [4] общего решения уравнения (10_1) в области D_1 вида (13), если там

$$u_k(x,y) = [g_1(x-y) + g_2(x+y)]H(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x-m\tau)\cdot$$
$$\cdot \frac{d^m}{dx^m} \int_0^{x-m\tau} (x-m\tau)\big((x-m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1} \big[g_1(\eta-y) + g_2(\eta+y)\big] d\eta, \tag{19}$$

где $g_i(t)$ $(i=1,2)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые на отрезке $[k\tau,(k+1)\tau]$ функциии.

Действительно, в силу (10_2)—(10_3) и

$$g_1(x) + g_2(x) = z^{\omega_1}(x), \ -g_1^{'}(x) + g_2^{'}(x) = z^{\nu_1}(x), \tag{20}$$

из (19) получим интегро-дифференциально-разностное уравнение Вольтерра

$$z_k^{\omega_1}(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x-m\tau) \frac{d^m}{dx^m} \int_0^{x-m\tau} (x-m\tau)\cdot$$
$$\cdot \big((x-m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1} z^{\omega_1}(\eta) d\eta = \omega_1(x), \ k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{21}$$

решение [5] которого имеет форму (18), или относительно $z^{\nu_1}(x)$ также уравнение типа (21) с правой частью $\nu_1(x)$.

Функции $g_i(t)$ $(i=1,2)$, найденные из системы (20), на основании (19), приведут к обобщенной формуле Даламбера (13)—(14), которая будет решением задачи Коши (10), единственным в силу построения.

Лемма 5 *Пусть $\omega_2(y) \in C[0,h] \bigcap C^2(0,h)$, $\nu_2(y) \in C^1(0,h)$, абсолютно интегрируемы на $[0,h]$ и $\omega_2^{'}(0) = 0$, $\omega_2(h) = f(0)$. Тогда существует единственное решение задачи Коши (11), имеющее вид*

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\big[\omega_2(y-x) + \omega_2(x+y)\big] + \frac{1}{2}\int_{y-x}^{y+x} \nu_2(\xi) d\xi, \ (x,y) \in \overline{D}_2. \tag{22}$$

Доказательство леммы проводится аналогично лемме 4. Форма (22) решения задачи Коши (11) может быть найдена из (13)—(18) при $k=0$ с учетом данных задачи и области ее решения.

Лемма 6 *Если $\nu_1(x) \in C^1(0,+\infty)$, $f(x) \in C[0,+\infty) \bigcap C^2(0,+\infty)$ и $\nu_2(y) \in C^1(0,h)$, абсолютно интегрируемы на $[0,+\infty)$ и $[0,h]$ соответственно, причем $f(0) = \omega_2(h)$, $f(+\infty) = 0$, $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$, то существует единственное при $h \le 2\sqrt{2}$ решение задачи Неймана-Дирихле (12) в области D_3, которое имеет вид*

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) =$$
$$= \{u_{1k}(x,y) + u_{2k}(x,y), \ (x,y) \in \overline{D}_{3k} \ (k=0,1,2,...)\}, \tag{23}$$

где

$$u_{1k}(x,y) = \int\limits_0^h \nu_2(t) G_k^-(x,y;\xi,t)\big|_{\xi=0} dt, \tag{24}$$

$$\begin{gathered} u_{2k}(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi) G_k^+(x,y;\xi,t)\big|_{t=0} d\xi + \\ + \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi) G_{kt}^+(x,y;\xi,t)\big|_{t=h} d\xi, \end{gathered} \tag{25}$$

а

$$\begin{gathered} G_k^{\mp}(x,y;\xi,t) = \overline{G}(x,y;\xi,t)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \big(\mp 1\big)^m \gamma_m H(x-m\tau)\cdot \\ \cdot \frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{+\infty} \big(x-m\tau\big)^{(1\mp1)/2} \eta^{(1\pm1)/2} \big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)_{\mp}^{m-1} \overline{G}(\eta,y;\xi,t) d\eta, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} \overline{G}(x,y;\xi,t) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{\operatorname{ch}\big((x-\xi)\pi/2h\big) - \cos\big((y-t)\pi/2h\big)}{\operatorname{ch}\big((x-\xi)\pi/2h\big) + \cos\big((y-t)\pi/2h\big)} \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{\operatorname{ch}\big((x+\xi)\pi/2h\big) - \cos\big((y+t)\pi/2h\big)}{\operatorname{ch}\big((x+\xi)\pi/2h\big) + \cos\big((y+t)\pi/2h\big)} \right), \end{gathered} \tag{27}$$

$$\big(\xi^2-\eta^2\big)_-^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \xi \ge \eta, \\ \big(\eta^2-\xi^2\big)^{\alpha}, & \xi < \eta; \end{cases} \quad \big(\xi^2-\eta^2\big)_+^{\alpha} = \begin{cases} \big(\xi^2-\eta^2\big)^{\alpha}, & \xi > \eta, \\ 0, & \xi \le \eta; \end{cases}$$

причем $z^{\nu_1}(x)$ и $z^f(x)$ определяются равенствами типа (17)–(18), в которых следует заменить $\omega_1(x)$ соответственно на $\nu_1(x)$ и $f(x)$.

Доказательство единственности решения задачи Неймана-Дирихле (12) в области D_3 из класса $C(\overline{D}_3)\bigcap C^2(D_3)$ следует из того, что однородная задача (12) имеет при $h \le 2\sqrt{2}$ тривиальное решение, так как согласно лемме 1, в силу (8),

$$\iint\limits_{D_3} \left[u_x^2(x,y)\big(1-(h^2-y^2)/8\big) + \left(u_y(x,y) - \frac{1}{2}H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)d\xi \right)^2 \right] dxdy = 0.$$

Решение задачи Неймана-Дирихле (12) в области D_3 найдено в виде суммы (23) решений двух вспомогательных задач

$$\begin{aligned} & u_{jxx}(x,y) + u_{jyy}(x,y) - H(x-\tau)u_{jx}(x-\tau,y) = 0, \\ & u_j(x,h) = (j-1)f(x), \ \ 0 \le x < +\infty, \\ & u_{jy}(x,0) = (j-1)\nu_1(x), \ \ 0 < x < +\infty, \\ & u_{jx}(0,y) = (2-j)\nu_2(y), \ \ 0 < y < h, \\ & \lim_{x\to+\infty} u_j(x,y) = 0, \ \ 0 \le y \le h, \\ & f(0) = \omega_2(h), \ \ f(+\infty) = 0, \ \ (j=1,2). \end{aligned} \tag{28}$$

1. Функция $u_1(x,y)=\{u_{1k}(x,y),(x,y)\in\overline{D}_{3k}\ (k=0,1,2,...)\}$ получена в форме

$$u_{1k}(x,y)=\sum_{l=0}^{+\infty}R_k(x,\lambda_l)\cos\lambda_l y, \tag{29}$$

где

$$R_k(x,\lambda_l)=-\frac{2}{h\lambda_l}T_k(x,\lambda_l)\int\limits_0^h\nu_2(t)\cos\lambda_l t dt, \tag{30}$$

а

$$\begin{gathered}T_k(x,\lambda_l)=e^{-\lambda_l x}H(x)+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\gamma_m H(x-m\tau)\cdot\\ \cdot\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_{x-m\tau}^{+\infty}\eta\big(\eta^2-(x-m\tau)^2\big)^{m-1}e^{-\lambda_l\eta}d\eta,\end{gathered} \tag{31}$$

$k\tau\le x\le(k+1)\tau$, является решением [5; 4] уравнения

$$T^{''}(x,\lambda_l)-\lambda_l^2T(x,\lambda_l)-H(x-\tau)T^{'}(x-\tau,\lambda_l)=0,$$

удовлетворяющим условиям $T^{'}(0,\lambda_l)=-\lambda_l,\ T(+\infty,\lambda_l)=0$, причем $\lambda_l=(l+1/2)\pi/h$.
Подставляя (31), (30) в (29), учитывая [6], что

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}e^{-(2n+1)a}=\frac{1}{4}\ln\frac{\operatorname{ch}a+\cos x}{\operatorname{ch}a-\cos x},$$

найдем $u_{1k}(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}_{3k}$ в форме (24).

2. Решение $u_2(x,y)=\{u_{2k}(x,y),(x,y)\in\overline{D}_{3k}\ (k=0,1,2,...)\}$ построено в виде

$$u_{2k}(x,y)=\int\limits_0^{+\infty}A_k(x,\lambda)\Pi(y,\lambda)d\lambda, \tag{32}$$

где

$$\begin{gathered}A_k(x,\lambda)=H(x)\cos\lambda x+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\cdot\\ \cdot\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{x-m\tau}\big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)^{m-1}\big(x-m\tau\big)\cos\lambda\eta d\eta\end{gathered} \tag{33}$$

удовлетворяет [5; 4] уравнению

$$A^{''}(x,\lambda)+\lambda^2A(x,\lambda)-H(x-\tau)A^{'}(x-\tau,\lambda)=0,$$

и условию $A^{'}(0,\lambda)=0$, а

$$\Pi(y,\lambda)=c_1(\lambda)e^{\lambda y}+c_2(\lambda)e^{-\lambda y},\ \ 0\le y\le h, \tag{34}$$

$c_i(\lambda) \equiv const$ $(i = 1, 2)$, является общим решением уравнения $\Pi''(y, \lambda) - \lambda^2\Pi(y, \lambda) = 0$.

Подставляя (34), (33) в (32), на основании условий (28_2)—(28_3) $(j = 2)$, получим для определения $c_i(\lambda)$ $(i = 1, 2)$ систему интегральных уравнений

$$\begin{gathered}\int_0^{+\infty}\left(c_1(\lambda)e^{\lambda h} + c_2(\lambda)e^{-\lambda h}\right)A_k(x, \lambda)d\lambda = f(x),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau,\\ \int_0^{+\infty}\lambda\left(c_1(\lambda) - c_2(\lambda)\right)A_k(x, \lambda)d\lambda = \nu_1(x),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau.\end{gathered} \tag{35}$$

Пусть

$$\begin{gathered}\int_0^{+\infty}\left(c_1(\lambda)e^{\lambda h} + c_2(\lambda)e^{-\lambda h}\right)\cos\lambda x d\lambda = z_k^f(x),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau,\\ \int_0^{+\infty}\lambda\left(c_1(\lambda) - c_2(\lambda)\right)\cos\lambda x d\lambda = z_k^{\nu_1}(x),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau.\end{gathered} \tag{36}$$

Тогда из (35), в силу (33), получим относительно $z_k^f(x)$ и $z_k^{\nu_1}(x)$ интегро-дифференциально-разностные уравнения Вольтерра типа (21) с правой частью $f(x)$ и $\nu_1(x)$ соответственно, решения [5] которых $z_k^f(x)$ и $z_k^{\nu_1}(x)$ будут иметь вид (18) относительно $f(x)$ и $\nu_1(x)$.

Так как функции $f(x) \in C[0, +\infty)\bigcap C^2(0, +\infty)$, $f(+\infty) = 0$, $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$; $\nu_1(x)$ принадлежит классу Гельдера внутри $(0, +\infty)$ и абсолютно интегрируемы на $[0, +\infty)$, то, очевидно, в силу (18), этими свойствами обладает $z^f(x)$ и $z^{\nu_1}(x)$.

Поэтому, обратив косинус–преобразования Фурье (36) [7] с правыми частями $z^f(x)$, $z^{\nu_1}(x)$ при $x > 0$, получим систему

$$c_1(\lambda)e^{\lambda h} + c_2(\lambda)e^{-\lambda h} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} z^f(t)\cos\lambda t dt,$$

$$c_1(\lambda) - c_2(\lambda) = \frac{2}{\pi\lambda}\int_0^{+\infty} z^{\nu_1}(t)\cos\lambda t dt,$$

из которой

$$c_i(\lambda) = \frac{1}{\pi \operatorname{ch}\lambda h}\int_0^{+\infty}\left[z^f(t) + (-1)^{i+1}\frac{1}{\lambda}e^{(-1)^i\lambda h}z^{\nu_1}(t)\right]\cos\lambda t dt,\ \ (i = 1, 2). \tag{37}$$

Подставляя (34), (33), (37) в (32), используя [6] формулы

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} cx}\cos bx dx = \frac{\pi}{c}\cdot\frac{\cos(a\pi/2c)\operatorname{ch}(b\pi/2c)}{\operatorname{ch}(b\pi/c) + \cos(a\pi/c)},$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} ax}{x \operatorname{ch} cx} \cos bx dx = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch}(b\pi/2c) + \sin(a\pi/2c)}{\operatorname{ch}(b\pi/2c) - \sin(a\pi/2c)}, \ \mathrm{Re} c >| \mathrm{Re} a \mid + \mid \mathrm{Im} b \mid,$$

получим $u_{2k}(x, y)$ в виде (25).

III. 1. **Функциональное соотношение** между $\omega_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное на линию $y = 0$, $0 < x < +\infty$ из области D_1, получим, в силу (13)—(18) и (3), из интегро-дифференциально-разностного уравнения Вольтерра

$$\phi_k(x, -x)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x - m\tau) \frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{x-m\tau} (x - m\tau) \cdot$$
$$\cdot \left((x - m\tau)^2 - \eta^2\right)^{m-1} \phi(\eta, -x) d\eta = \psi_1(x), \ k\tau \le x \le (k+1)\tau,$$

совпадающее с уравнением (21), решение [5] которого имеет форму (18), где следует заменить $\omega_1(x)$ на $\psi_1(x)$, то есть

$$\phi_k(x, -x) = z_k^{\psi_1}(x), \ k\tau \le x \le (k+1)\tau. \tag{38}$$

После подстановки (38) в (16), получим искомое соотношение

$$z_k^{\omega_1}(2x) + z_k^{\omega_1}(0) + \int\limits_{2x}^{0} z^{\nu_1}(\xi) d\xi = 2z_k^{\psi_1}(x), \ k\tau \le x \le (k+1)\tau,$$

или

$$z_k^{\omega_1}(x) + z_k^{\omega_1}(0) + \int\limits_{x}^{0} z^{\nu_1}(\xi) d\xi = 2z_k^{\psi_1}(x/2), \ k\tau \le x \le (k+1)\tau.$$

Значит,

$$z_k^{\nu_1}(x) = \left(z_k^{\omega_1}(x)\right)' - 2\left(z_k^{\psi_1}(x/2)\right)', \ k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{39}$$

искомое функциональное соотношение из D_1.

2. Аналогично, из (22), (4) найдем **функциональное** соотношение между $\omega_2(y)$ и $\nu_2(y)$, принесенное на линию $x = 0$, $0 < y < h$ из области D_2:

$$\nu_2(y) = \omega_2'(y) - \psi_2'(y/2), \ \ 0 < y < h. \tag{40}$$

3. **Функциональные** соотношения между $\omega_j(x)$ и $\nu_j(x)$ $(j = 1, 2)$ на линиях $x = 0$, $0 < y < h$ $(j = 2)$; $y = 0$, $0 < x < +\infty$ $(j = 1)$, принесенные из области D_3, найдем из (23)—(27), используя условия сопряжения (5):

$$\begin{gathered}\omega_2(y) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi) \overline{G}(0, y; \xi, t)\big|_{t=0} d\xi + \\ + \int\limits_0^{h} \nu_2(t) \overline{G}(0, y; \xi, t)\big|_{\xi=0} dt + \int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi) \overline{G}_t(0, y; \xi, t)\big|_{t=h} d\xi, \ \ 0 \le y \le h,\end{gathered} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\omega_1(x) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi) G_k^+(x,0;\xi,t)\big|_{t=0} d\xi + \int\limits_0^h \nu_2(t) G_k^-(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} dt + \\ + \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi) G_{kt}^+(x,0;\xi,t)\big|_{t=h} d\xi,\ k\tau \le x \le (k+1)\tau.\end{aligned} \tag{42}$$

Пусть

$$R(x) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi) \overline{G}(x,0;\xi,t)\big|_{t=0} d\xi. \tag{43}$$

Тогда, в силу (26), равенство (42) можно записать в форме интегро-диффе-ренциально-разностного уравнения Вольтерра

$$\begin{aligned}R(x)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x-m\tau) \frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{x-m\tau} (x-m\tau) \cdot \\ \cdot \left((x-m\tau)^2 - \eta^2\right)^{m-1} R(\eta) d\eta = \omega_1(x) - \int\limits_0^h \nu_2(t) G_k^-(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} dt - \\ - \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi) G_{kt}^+(x,0;\xi,t)\big|_{t=h} d\xi,\ k\tau \le x \le (k+1)\tau,\end{aligned} \tag{44}$$

которое совпадает с уравнением (21).

Поэтому, в силу (18), из (44) найдем

$$\begin{aligned}R(x) = z_k^{\omega_1}(x) - \int\limits_0^h \nu_2(t) \overline{\overline{G}}{}_k^-(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} dt - \\ - \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi) \overline{\overline{G}}{}_{kt}^+(x,0;\xi,t)\big|_{t=h} d\xi,\ k\tau \le x \le (k+1)\tau,\end{aligned} \tag{45}$$

где $z_k^{\omega_1}(x)$ совпадает с (17)—(18), а

$$\overline{\overline{G}}{}_k^-(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} = H(x) \overline{G}{}_k^-(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} - \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x-m\tau) \cdot$$

$$\cdot \frac{d^m}{dx^m} \left(\int\limits_{(k-m)\tau}^{x-m\tau} (x-m\tau)\left((x-m\tau)^2 - \eta^2\right)^{m-1} \overline{\overline{G}}{}^-(\eta,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} d\eta + \right.$$

$$\left. + \sum_{\theta=0}^{k-m-1} \int\limits_{\theta\tau}^{(\theta+1)\tau} (x-m\tau)\left((x-m\tau)^2 - \eta^2\right)^{m-1} \overline{\overline{G}}{}^-(\eta,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} d\eta \right),$$

причем

$$\overline{\overline{G}}^{-}(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0}=\left\{\overline{\overline{G}}_k^{-}(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0},\ k\tau\le x\le(k+1)\tau\ (k=0,1,2,...)\right\}$$

и $\overline{\overline{G}}_{kt}^{+}(x,0;\xi,t)\big|_{t=h}$ имеет выше приведенную форму.

На основании (45), (43) равенство (42) примет вид

$$\begin{gathered}z_k^{\omega_1}(x)=\int\limits_0^{+\infty}z^{\nu_1}(\xi)\overline{G}(x,0;\xi,t)\big|_{t=0}d\xi+\int\limits_0^{h}\nu_2(t)\overline{\overline{G}}_k^{-}(x,0;\xi,t\big|_{\xi=0}dt+\\+\int\limits_0^{+\infty}z^{f}(\xi)\overline{\overline{G}}_{kt}^{+}(x,0;\xi,t)\big|_{t=h}d\xi,\ k\tau\le x\le(k+1)\tau.\end{gathered}\tag{46}$$

Выражения (41), (46) – искомые функциональные соотношения из D_3.

IV. Используя условия сопряжения (5)—(6), функциональные соотношения (39), (40) и, после дифференцирования, (41), (46), придем к полной системе сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{gathered}\nu_2(y)-\frac{2}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\int\limits_0^h\nu_2(t)\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}dt-\\-\frac{2}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\int\limits_0^{+\infty}z^{\nu_1}(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}dt=W_1(y),\ 0<y<h,\end{gathered}\tag{47}$$

$$\begin{gathered}z^{\nu_1}(x)+\frac{2}{h}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{2h}\int\limits_0^h\nu_2(t)\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}dt+\\+\frac{2}{h}\,\mathrm{sh}\frac{\pi x}{2h}\int\limits_0^{+\infty}z^{\nu_1}(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}dt=W_2(x),\ 0<x<+\infty,\end{gathered}\tag{48}$$

где

$$\begin{gathered}W_1(y)=-\psi_2'(y/2)-\frac{2}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\cdot\\\cdot\int\limits_0^{+\infty}z^{f}(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)\left(\mathrm{sh}^2(\pi t/2h)-\cos^2(\pi y/2h)\right)}{\left(\mathrm{ch}(\pi t/h)+\cos(\pi y/h)\right)^2}dt,\end{gathered}\tag{49}$$

$$W_2(x)=-F'(x)+\int\limits_0^{+\infty}z^{f}(\xi)\Phi(x,\xi)d\xi+\int\limits_0^{h}\nu_2(t)T(x,t)dt,\tag{50}$$

причем

$$F(x)=\left\{2z_k^{\psi_1}(x),\ k\tau\le x\le(k+1)\tau,\ (k=0,1,2,...)\right\},$$
$$\Phi(x,\xi)=\left\{\overline{\overline{G}}^{+}_{ktx}(x,0;\xi,h),\ k\tau\le x\le(k+1)\tau\ (k=0,1,2,...)\right\},$$
$$T(x,t)=\left\{\overline{\overline{G}}^{-}_{kx}(x,0;0,t)-\overline{G}_x(x,0;0,t),\ k\tau\le x\le(k+1)\tau\ (k=0,1,2,...)\right\}.$$

Интеграл в формуле (49) и его производная по y сходятся, так как $z^f(+\infty)=0$, а при $y\to h$, $t\to 0$, в силу условия $z^f(t)=o(t^2)$.

Первый интеграл в (50) и его производная по x также сходятся, что следует из аналогичных предыдущему рассуждений, например, для интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi)\overline{\overline{G}}^{+}_{0tx}(x,0;\xi,h)d\xi=\int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi)\overline{G}_{tx}(x,0;\xi,h)d\xi=$$

$$=\frac{2}{h}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)\big(\,\mathrm{sh}^2(\pi t/2h)-\mathrm{ch}^2(\pi x/2h)\big)}{\big(\,\mathrm{ch}(\pi t/h)+\mathrm{ch}(\pi x/h)\big)^2}dt,\ 0<x<\tau.$$

Сходимость второго интеграла в (50) и производной по x обеспечена абсолютной интегрируемостью $\nu_2(y)$ на $[0,h]$ и гельдеровостью внутри $(0,h)$, которая следует из гельдеровости $\psi_2'(y)$.

Интегралы в формулах (49) $\big((50)\big)$ имеют вторые производные по y (по x) на $(0,h)$ $\big((0,+\infty)\big)$, то есть их первые производные удовлетворяют там условию Липшица.

Значит, функции W_j', как и ψ_j'', удовлетворяют условию Гельдера внутри своих промежутков определения, а $W_j\in H_1$.

Регуляризация системы (47)—(48) в классе функций $\nu_2(y)$, $z^{\nu_1}(x)$, ограниченных в нуле, когда $\nu_2(y)=o\big[(h-y)^{-1/2}\big]$ при $y\to h$ и $z^{\nu_1}(x)=o\big(\exp(-(1/4+\varepsilon)x)\big)$ $(\varepsilon>0)$ при $x\to+\infty$, проведена аналогично [8]:

$$\begin{gathered}\nu_2(y)=\frac{1}{2}W_1(y)+\frac{1}{2h}\int\limits_0^h W_1(t)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}dt-\\-\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} W_2(t)\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}dt,\ 0<y<h,\end{gathered}\tag{51}$$

$$\begin{gathered}z^{\nu_1}(x)=\frac{1}{2}W_2(x)+\frac{1}{2h}\int\limits_0^h W_1(t)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}dt-\\-\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} W_2(t)\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}dt,\ 0<x<+\infty.\end{gathered}\tag{52}$$

Из системы (51)—(52), в силу (49)—(50), получим систему

$$\nu_2(y) + \int\limits_0^h \nu_2(s)B(y,s)ds = A(y),\ 0 < y < h, \tag{53}$$

$$z^{\nu_1}(x) - \int\limits_0^h \nu_2(s)\Theta(x,s)ds = L(x),\ 0 < x < +\infty, \tag{54}$$

где

$$B(y,s) = \frac{1}{4h^2}\int\limits_0^{+\infty} T(t,s)\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h) - \cos(\pi y/h)}dt,$$

$$A(y) = -\frac{1}{2}\psi_2'\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{1}{2h}\int\limits_0^h \psi_2'\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h) - \cos(\pi y/h)}dt +$$
$$+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} F'(t)\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h) - \cos(\pi y/h)}dt -$$
$$-\frac{1}{h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(s)\Bigg\{\sin\frac{\pi y}{2h}\cdot\frac{\operatorname{ch}(\pi s/2h)\big(\operatorname{sh}^2(\pi s/2h) - \cos^2(\pi y/2h)\big)}{\big(\operatorname{ch}(\pi s/h) + \cos(\pi y/h)\big)^2} +$$
$$+\frac{1}{h}\int\limits_0^h \left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h) - \cos(\pi y/h)}\sin\frac{\pi t}{2h}\cdot$$
$$\cdot\frac{\operatorname{ch}(\pi s/2h)\big(\operatorname{sh}^2(\pi s/2h) - \cos^2(\pi t/2h)\big)}{\big(\operatorname{ch}(\pi s/h) + \cos(\pi t/h)\big)^2}dt +$$
$$+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h) - \cos(\pi y/h)}\Phi(t,s)dt\Bigg\}ds;$$

$$\Theta(x,s) = \frac{1}{4h}T(x,s) - \frac{1}{4h^2}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\operatorname{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h) - \operatorname{ch}(\pi x/h)}T(t,s)dt,$$

$$L(x) = -\frac{1}{2}F'(x) - \frac{1}{2h}\int\limits_0^h \psi_2'\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}dt+$$

$$+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} F'(t)\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}dt + \frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(s)\Bigg\{\Phi(x,s)-$$

$$-\frac{2}{h}\int\limits_0^h\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}\sin\frac{\pi t}{2h}\cdot\frac{\mathrm{ch}(\pi s/2h)\big(\mathrm{sh}^2(\pi s/2h)-\cos^2(\pi t/2h)\big)}{\big(\mathrm{ch}(\pi s/h)+\cos(\pi t/h)\big)^2}dt-$$

$$-\frac{1}{h}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}\Phi(t,s)dt\Bigg\}ds.$$

Функции $A(y)$, $A'(y)$, $L(x)$, $L'(x)$ принадлежат классу Гельдера; $A(x), L(x) \to 0$ при $x \to 0$; $L(x) = o(\exp(\gamma x))$, $\gamma < -1/2$ при $x \to +\infty$; $\big(h/2-y\big)^{1/2}A(y) \to 0$ при $y \to h/2$.

Ядра $B(x,t)$, $\Theta(x,t)$ непрерывно дифференцируемы в областях определения, ограничены в точке $(0,0)$, допускают обращение в ∞ порядка не выше $1/2$ вблизи $(0,h)$, а вблизи $(+\infty,0)$ исчезают.

Система (53)—(54) является системой уравнений Фредгольма, безусловная разрешимость которой следует из единственности решения задачи Т.

Литература

1. Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу, М.: Высшая школа. 1999. 695 с.

2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа, Ч.1. М.: Наука. 1982. 616 с.

3. Ф.И. Франкль. Избранные труды по газовой динамике, М.: Наука. 1973. 712 с.

4. А.Н. Зарубин. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом, Орел: ОГУ. 1999. 225 с.

5. А.Н. Зарубин. Интегро-дифференциально-разностные уравнения Вольтерра и интегральные преобразования // Труды Всероссийской научно-практической конференции "Современная математика и проблемы математического образования". Орел. 2009.

6. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. Элементарные функции, М: Наука. 1981. 799 с.

7. В.П. Диткин, А.П. Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление, М: Наука. 1974. 544 с.

8. О.И. Маричев. Об уравнении смешанного типа с двумя линиями вырождения в несимметричной области // Известия АН БССР. Серия физико-математических наук. № 6. 1969. С. 74-80.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS OF MIXED TYPE WITH INTERSECTING LINES OF DEGENERACY

A.N. Zarubin, O.V. Lashtabega

Orel State University,

Komsomolskaya str., 95, Orel, 302026, Russia, e-mail: aleks_zarubin@mail.ru,tanda80@yandex.ru

Abstract. For mixed-type equation with the operator of the Lavrent'ev-Bitsadze, nonsmooth line of degeneracy and zapazdyvaenim in the derivative is considered in asymmetric analogue of the Tricomi.

Keywords: equation of mixed type, delay, integro-differential-difference equation.