УДК 517.95

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ - НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА - БИЦАДЗЕ С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ

С.Л. Хасанова

Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. Зайнаб Биишевой,
ул. Николаева, 10, Стерлитамак, 453118, Россия, e-mail: hasanovasl@rambler.ru

Аннотация. В работе при помощи системы собственных функций построено в виде ряда решение специальной задачи для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе. Изучен также пространственный аналог задачи в цилиндрической области.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение смешанного типа, характеристики, собственные числа, собственные функции, ряд по собственным функциям.

1 Задача Трикоми - Неймана для уравнения Лаврентьева - Бицадзе

Рассмотрим уравнение

$$Bu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области D, когда область D_+ есть сектор единичного радиуса с центром в начале координат: $0 < \varphi < \varphi_0 \leq \pi$, $0 < r < 1$.

Задача Трикоми - Неймана (задача TN). *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{D}) \cap \mathrm{C}^1(D \cup \Gamma_0 \cup AK) \cap \mathrm{C}^2(D_+ \cup D_-), \tag{2}$$

$$Bu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{AK} = 0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\varphi), \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \tag{5}$$

$$\left.u\right|_{AC} = 0,$$

где f - заданная достаточно гладкая функция.

Решая задачу Дарбу для уравнения (1) в области D_- с условиями:

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \in [0,1], \quad u(x,-x) = 0, \quad x \in [0,1/2], \tag{6}$$

можно получить соотношение на отрезке AB оси $y = 0$:

$$u_x(x,0) - u_y(x,0) = 0, \quad x \in (0,1). \tag{7}$$

Теперь решим в области D_+ следующую смешанную задачу для уравнения Лапласа: найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (2) - (5) и (7). Переходя к полярным координатам (r,φ) и разделяя переменные $u(x,y) = v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{\mu^2}{r^2}R(r) = 0,\ 0 < r < 1, \tag{8}$$

$$R(0) = 0, \tag{9}$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0,\ \ 0 < \varphi < \varphi_0, \tag{10}$$

$$\Phi'(\varphi_0) = 0, \tag{11}$$

$$R'(x)\Phi(0) - \frac{R(x)}{x}\Phi'(0) = 0,\ 0 < x < 1, \tag{12}$$

где $\mu \neq 0$ - постоянная разделения.

Решением уравнения (8), удовлетворяющего условию (9), является функция

$$R(r) = r^{\mu},\ \mu > 0. \tag{13}$$

Подставляя функцию (13) в условие (12), получим

$$\mu\Phi(0) - \Phi'(0) = 0. \tag{14}$$

Решая краевую задачу (10), (11), (14), найдем

$$\Phi_n(\varphi) = C_n \sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right),$$

где μ_n - определяется по формуле

$$\mu_n = \frac{\pi}{\varphi_0}\left(n - \frac{3}{4}\right)\ , n = 1, 2, \ldots\ . \tag{15}$$

Следовательно, функции вида

$$v_n(r,\varphi) = C_n r^{\mu_n} \sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$$

удовлетворяют в области D_+ условиям (2) - (4) и (7). Решение задачи (2) - (5) и (7) в области D_+ будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,y) = v(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{\mu_n} \sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right). \tag{16}$$

При любом $r \leq r_0 < 1$ ряд (16) сходится равномерно и допускает почленное дифференцирование по переменным r и φ любое число раз, за исключением точки $(0,0)$.

Предположим, что ряд (16) допускает почленное дифференцирование по переменной r на множестве $0 < r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. Удовлетворяя ряд (16) граничному условию (5), получим

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n f_n \sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right),\ 0 \leq \varphi \leq \varphi_0. \tag{17}$$

2 Построение решения задачи Трикоми - Неймана для уравнения Лаврентьева - Бицадзе с комплексным параметром

Для уравнения Лаврентьева - Бицадзе с комплексным параметром в области D найдем решение следующей задачи.

Задача TN. *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma_0 \cup AK) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{23}$$

$$Lu(x,y) \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \ \ (x,y) \in D, \tag{24}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\varphi), \ \ 0 \le \varphi \le \varphi_0, \tag{25}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{AK} = 0, \tag{26}$$

$$\left. u(x,y)\right|_{AC} = 0, \tag{27}$$

где f *- заданная достаточно гладкая функция.*

Используя собственные функции задачи TN_λ решение задачи (23) - (26) в области D_+ при $\lambda \ne \lambda_{n,m}$ будем искать в виде суммы ряда

$$v(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{\mu_n}(r\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})} \sin\left[\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right], \ 0 < \varphi \le \varphi_0, \tag{28}$$

где коэффициенты f_n определяются по формуле (19), а $\dfrac{J_{\mu_n}(r\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}$ - ортонормированные собственные функции задачи для уравнения

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{r^2}\right) R(r) = 0, \ 0 < r < 1, \tag{29}$$

с граничным условием $R(0) = 0$. На основании асимптотической формулы [4, с. 217]

$$J_n(z) = \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad n \to \infty$$

ряд (28) при любом $r \le r_0 < 1$ сходится равномерно, так как при больших n справедлива оценка

$$\left| f_n \frac{J_{\mu_n}(r\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})} \sin\left(\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant M \cdot \frac{r^{\mu_n}}{\mu_n},$$

где $M = \text{const} > 0$. Можно также показать, что ряд (28) на $D_+ \cup AB$ допускает почленное дифференцирование по переменным r и φ любое число раз.

Удовлетворяя (28) граничному условию (25) получим ряд

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n f_n \sin\left(\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right), \ 0 \le \varphi \le \varphi_0,$$

равномерная сходимость которого обоснована в § 3.

Для построения решения задачи TN в области D_- воспользуемся формулой

$$u_{n,m}(x,y) = c_{n,m}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}\left[\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2-y^2)}\right]. \tag{30}$$

Из формулы (28) находим:

$$v(r,0) = u(x,0) = \tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{\mu_n}(x\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})},\ x\in[0,1], \tag{31}$$

$$u_y(x,0) = \nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\,x}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n f_n \frac{J_{\mu_n}(x\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})},\ x\in(0,1). \tag{32}$$

Если в формуле (30) положить $c_{n,m} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{f_n}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}$, то сумма ряда от функций $u_{n,m}(x,y)$ по переменной n определяет решение задачи Коши для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в области D_- с краевыми условиями (31) и (32):

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}\frac{J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right)}{J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda}\right)}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2 *Если $f(\varphi)\in C^{\alpha}[0,\varphi_0]$, $\alpha\in(0,1]$, то существует решение задачи (23) - (27) при всех $\lambda\neq\lambda_{n,m}$ и оно имеет вид*

$$u(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n\frac{J_{\mu_n}(r\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}\sin\left(\mu_n\varphi+\frac{\pi}{4}\right), & (r,\varphi)\in D_+ \\ \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}\frac{J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right)}{J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda}\right)}, & (x,y)\in D_-, \end{cases}$$

где $\lambda_{n,m}$ - собственные значения задачи TN_λ, f_n - определяются по формуле (19).

3 Пространственная задача Трикоми - Неймана

Рассмотрим уравнение

$$LW \equiv W_{xx} + \operatorname{sgn} y\cdot W_{yy} + W_{zz} = 0, \tag{33}$$

в области $G = D\times(0,\pi)$, где D - область плоскости R^2_{xy}, описанная ранее. Обозначим $S_0 = \Gamma_0\times[0,\pi]$, $S_{AK} = AK\times[0,\pi]$, $z\in[0,\pi]$; $G_+ = G\cap\{y>0\}$; $G_- = G\cap\{y<0\}$.

Задача TN. *Найти функцию $W(x,y,z)$, удовлетворяющую условиям:*

$$W(x,y,z)\in C\left(\overline{G}\right)\cap C^1(G\cup S_0\cup S_{AK})\cap C^2(G_+\cup G_-),$$

$$LW(x,y,z) \equiv 0, \ \ (x,y,z) \in G_+ \cup G_-,$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial N}\right|_{S_0} = \left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=1} = F(\varphi, z), \ \ 0 < \varphi \leq \varphi_0, \ z \in [0,\pi], \tag{34}$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial N}\right|_{S_{AK}} = 0, \tag{35}$$

$$W(x,y,z)\Big|_{y=-x} = 0, \ \ x \in [0, 1/2], \ z \in [0,\pi],$$

$$W(x,y,z)\Big|_{z=0} = W(x,y,z)\Big|_{z=\pi} = 0,$$

где F - заданная достаточно гладкая функция.

В области G, разделив в уравнении (33) переменные $W(x,y,z) = u(x,y)Z(z)$, получим

$$u(x,y) \in \mathrm{C}\,(\,\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^1(D \cup \Gamma_0 \cup AK) \cap \mathrm{C}^2(D_+ \cup D_-), \tag{36}$$

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} - \mu^2 u = 0, \ \ (x,y) \in D, \tag{37}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{AK} = 0, \tag{38}$$

$$u(x,y)\ |_{y=-x} = 0, \ \ x \in [0, 1/2], \tag{39}$$

$$Z'' + \mu^2 Z = 0, \ 0 \leq z \leq \pi, \ Z(0) = Z(\pi) = 0, \tag{40}$$

где $\mu = \mathrm{const} > 0$.

Задача (36) - (39) есть задача (23), (24), (26) и (27), где $\lambda = -\mu^2$. Полагая в формуле

$$u(x,y) = \int\limits_0^{x+y} \nu(t) J_0 \left[\sqrt{\lambda(x+y-t)(x-y-t)}\right] dt, \tag{41}$$

где $J_0(.)$ – функция Бесселя, $\sqrt{\lambda} > 0$ *при* $\lambda > 0$, $\lambda = -\mu^2$, и учитывая, что $J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$, получим соотношение

$$u(x,0) = \mu^2 \int\limits_0^x u_y(t,0) I_0[\mu(x-t)]dt, \ 0 \leq x \leq 1, \tag{42}$$

где $I_0(t)$ - модифицированная функция Бесселя, позволяющее свести полученную задачу к нелокальной эллиптической задаче в области D_+ (см. § 4).

В области D_+, разделяя переменные $u(x,y) = v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, перейдем к задаче

$$R_{rr} + \frac{1}{r}R_r - \left(\mu^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right) R = 0, \ 0 < r < 1, \tag{43}$$

$$R(0) = 0, \ \ | R^{'}(1) | < +\infty, \tag{44}$$

$$\Phi^{''}(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0, \ 0 < \varphi < \varphi_0, \tag{45}$$

$$\Phi^{'}(\varphi_0) = 0, \tag{46}$$

$$\Phi(0)R(r) = \Phi'(0)\int\limits_0^r t^{-1}R(t)I_0(\mu(r-t))dt, \quad 0 < r < 1. \tag{47}$$

Решением уравнения (43), удовлетворяющим условиям (44), является модифицированная функция Бесселя

$$R(r) = I_\nu(\mu r), \quad \operatorname{Re}\nu > 0.$$

Подставив ее в равенство (47), получим второе граничное условие для определения функции $\Phi(\varphi)$:

$$\nu\,\Phi(0) - \Phi'(0) = 0. \tag{48}$$

Решения уравнения (45), удовлетворяющие граничным условиям (46) и (48), являются функции

$$\Phi_k(\varphi) = C_k \sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad C_k = \text{const} \neq 0\ .$$

Таким образом, функции

$$u_k(x,y) = v_k(r,\varphi) = C_k I_{\mu_n}(\mu r)\sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$$

определяют в области D_+ решения уравнения (37), удовлетворяющие условиям (38) и (42).

Решениям задачи (40) являются функции

$$Z_n(z) = B_n \sin nz, \ B_n = \text{const} \neq 0, \quad \mu = n = 1, 2, \cdots .$$

Решение задачи TN в области G_+ будем искать в виде суммы ряда

$$W(x,y,z) = V(r,\varphi,z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk}\sin nz \sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\frac{I_{\mu_n}(nr)}{I_{\mu_n}(n)}. \tag{49}$$

Удовлетворив сумму ряда (49) граничному условию (34), имеем

$$\left.\frac{\partial W}{\partial N}\right|_{r=1} = \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=1} = F(\varphi,z) = \sum_{n,k=1}^{\infty}\mu_n f_{nk}\sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sin nz,$$

где коэффициенты f_{nk} находятся из разложения функции $P_n(\varphi)$ в ряд по системе синусов

$$P_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k f_{nk}\sin\left(\mu_k\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0, \tag{50}$$

а функция $P_n(\varphi)$ определяется по формуле

$$P_n(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi F(\varphi,z)\sin nz dz.$$

Если функция $F(\varphi,z)$ по переменной φ удовлетворяет на сегменте $[0,\varphi_0]$ условию Гёльдера с показателем α, где $0 < \alpha \le 1$, то функция $P_n(\varphi)$ также удовлетворяет с тем же показателем на сегменте $[0,\varphi_0]$ условию Гельдера, поэтому ряд (50) сходится равномерно на $[0,\varphi_0]$.

Ряд (49) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{G}_+$ и там допускает почленное дифференцирование по переменной r, за исключением отрезка $r = 0$, если функция $F(\varphi, z)$ в замкнутой области $0 \le \varphi \le \varphi_0$, $0 \le z \le \pi$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, $0 < \alpha < 1$ [5, с. 364].

Решение задачи TN в области G_- имеет вид:

$$W(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} \frac{I_{\mu_k}\left(n\sqrt{x^2 - y^2}\right)}{I_{\mu_k}(n)}. \tag{51}$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 *Если функция $F(\varphi, z)$ в замкнутой области $0 \le \varphi \le \varphi_0$, $0 \le z \le \pi$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, $0 < \alpha < 1$, то существует решение задачи TN в области G и оно задается формулами (49), (51).*

Литература

1. А.В. Бицадзе. О некоторых задачах для уравнений смешанного типа. // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 4. С. 561-564.

2. М.М. Смирнов. Уравнения смешанного типа, М.: Наука. 1970. 296 с.

3. Е.И. Моисеев. О базисности одной системы синусов. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 177-179.

4. Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. Курс современного анализа. Ч. II. Трансцендентные функции, М.: Физматгиз. 1963. 516 с.

5. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Ч. II, М.: Наука. 1998. 448 с.

ON SOLUTIONS TO TRICOMI-NEUMANN PROBLEMS FOR LAVRENTIEV-BITSADZE EQUATION WITH A COMPLEX PARAMETER

S.L. Hasanova

Sterlitamak State Pedagogical Academy,
Nikolaeva str., 10, Sterlitamak, 453118, Russia, e-mail: hasanovasl@rambler.ru

Abstract. We consider a problem for Lavrentiev-Bitsadze equation of mixed type finding as eigenseries. Also an analogous problem for cylindrical domain is studied.

Keywords: differential equation of mixed type, characteristics, eigenvalues, eigenfunctions, eigenseries.