УДК 621.397

О ФОРМИРОВАНИИ КВАЗИЦИКЛИЧЕСКИХ КОМПОНЕНТ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ЗАДАННЫМИ ЧАСТОТНЫМИ СВОЙСТВАМИ

В. В. КРАСИЛЬНИКОВ
А. А. ЧЕРНОМОРЕЦ

Белгородский государственный университет

В работе изложен метод формирования компонент изображений, энергия которых сосредоточена в заданном частотном интервале. Приведены результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующих работоспособность данного метода.

Ключевые слова: изображение, внедрение, частотный интервал, сосредоточенность энергии, собственный вектор.

Введение

Задача формирования квазициклических компонент изображений с заданными частотными свойствами возникает при совершенствовании средств информационного обмена – при решении проблем уплотнения информации (повышения коэффициента сжатия за счет передачи в одном файле нескольких изображений), ее скрытия (использования стеганографических систем при создании скрытого канала передачи данных) и др. Так, например, при создании систем защиты от копирования, защиты авторских прав в процессе распространения в цифровом виде музыкальных, графических и других произведений широко используется внедрение в мультимедийные объекты «цифровых водяных знаков». Большинство методов создания «водяных знаков» не обладают устойчивостью к внешним разрушающим воздействиям. В данной работе изложены теоретические положения метода формирования компонент изображения, энергии которых полностью находятся в заданных частотных интервалах, что может быть использовано при создании устойчивых методов уплотнения и скрытия информации.

Предлагаемый метод формирования указанных компонент изображения базируется на положениях теории обработки изображений на основе частотных представлений [1, 2].

1. Теоретические основы обработки изображений на основе частотных представлений

Пусть $\Phi=(f_{ik})$, $i=1,2,\ldots, N_1$, $k=1,2,\ldots, N_2$, – некоторое изображение (дискретный двумерный сигнал), заданное матрицей яркости, размерности $N_1 x N_2$, в которой значения элементов задаются яркостью соответствующих пикселей рассматриваемого изображения.

В работах [2, 3] показано, что точное значение P_Ω доли энергии изображения Φ в симметричной двумерной частотной области Ω, названной субинтервалом,

$$\Omega : \{(u,v) \mid (u \in [\alpha_1, \alpha_2], v \in [\beta_1, \beta_2]) \cup (u \in [\alpha_1, \alpha_2], v \in [-\beta_2, -\beta_1]) \cup \\ \cup (u \in [-\alpha_2, -\alpha_1], v \in [-\beta_2, -\beta_1]) \cup \ (u \in [-\alpha_2, -\alpha_1], v \in [\beta_1, \beta_2])\}, \quad (1)$$

где $0 \le \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \le \pi$,

может быть вычислено без перехода в частотную область на основании выражения

$$P_\Omega = trec(A^T \cdot \Phi \cdot B \cdot \Phi^T), \quad (2)$$

где Φ – матрица исходного изображения (двумерного сигнала),

$A=(a_{i_1 i_2})$ и $B=(b_{k_1 k_2})$– субполосные матрицы [1], размерности $N_1 x N_1$. и $N_2 x N_2$., значения элементов которых определяются на основании следующих выражений:

$$a_{i_1 i_2} = \begin{cases} \dfrac{Sin(\alpha_2(i_1 - i_2)) - Sin(\alpha_1(i_1 - i_2))}{\pi(i_1 - i_2)}, i_1 \neq i_2, \\ \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{\pi}, \quad i_1 = i_2, \end{cases} \qquad b_{k_1 k_2} = \begin{cases} \dfrac{Sin(\beta_2(k_1 - k_2)) - Sin(\beta_1(k_1 - k_2))}{\pi(k_1 - k_2)}, k_1 \neq k_2, \\ \dfrac{\beta_2 - \beta_1}{\pi}, \quad k_1 = k_2. \end{cases} \tag{3}$$

В работе [2] также показано, что выражение

$$Y_\Omega = A^T \cdot \Phi \cdot B \tag{4}$$

определяет результат Y_Ω фильтрации изображения Ф в частотной области Ω, оптимальный в смысле евклидовой нормы отклонения трансформанты Фурье $Z(u,v)$ результата фильтрации Y_Ω, в заданном частотном интервале Ω, от трансформанты Фурье $F(u,v)$ исходного изображения Ф и от нуля – вне данного интервала, т.е.

$$\iint_{(u,v)\in\Omega} |F(u,v) - Z(u,v)|^2 dudv + \iint_{(u,v)\notin\Omega} |Z(u,v)|^2 dudv \Rightarrow \min . \tag{5}$$

Определенный таким образом результат фильтрации не допускает растекания энергии двумерного сигнала (изображения) за пределы заданной частотной области.

Субполосные матрицы являются симметрическими, неотрицательно определенными, следовательно, матрицы A и B представимы в виде произведения матриц

$$A = Q^A \cdot L^A \cdot Q^{A^T}, \qquad B = Q^B \cdot L^B \cdot Q^{B^T}, \tag{6}$$

где

$$L^A Q^A = A Q^A, \quad L^B Q^B = B Q^B,$$

Q^A, Q^B – матрицы, столбцами которых являются собственные векторы матриц A и B,

$$Q^A = (q_1^A, q_2^A, ..., q_{N_1}^A), \qquad Q^B = (q_1^B, q_2^B, ..., q_{N_2}^B), \tag{7}$$

L^A, L^B – диагональные матрицы, составленные из собственных чисел матриц A и B,

$$L^A = diag(\lambda_1^A, \lambda_2^A, ..., \lambda_{N_1}^A), \qquad L^B = diag(\lambda_1^B, \lambda_2^B, ..., \lambda_{N_2}^B). \tag{8}$$

Предполагается, что собственные числа упорядочены по убыванию

$$\lambda_1^A > \lambda_2^A > ... > \lambda_{N_1}^A, \qquad \lambda_1^B > \lambda_2^B > ... > \lambda_{N_2}^B.$$

Известны [1] свойства собственных векторов и собственных чисел субполосных матриц:

а) собственные векторы отдельной субполосной матрицы, например, матрицы A образуют ортогональную систему:

$$(q_i^A, q_i^A) = 1, \quad \forall i, \tag{9}$$

$$(q_{i_1}^A, q_{i_2}^A) = 0, \quad i_1 \neq i_2, \quad \forall i_1, i_2;$$

б) собственные векторы субполосных матриц A_{r1} и A_{r2}, одинаковой размерности NxN, соответствующих непересекающимся частотным интервалам r_1 и r_2, ортогональны, т.е. если

$$\lambda_i^{A_{r1}} q_i^{A_{r1}} = A_{r_1} q_i^{A_{r1}} \text{ и } \lambda_k^{A_{r2}} q_k^{A_{r2}} = A_{r_2} q_k^{A_{r2}},$$

то

$$(q_i^{A_{r1}}, q_k^{A_{r2}}) = 0, \quad \forall i, k = 1,2,...,N; \tag{10}$$

в) собственные числа субполосных матриц принимают значения в интервале]0,1]:

$$0 < \lambda_i^A \leq 1, \quad \forall i, \quad 0 < \lambda_k^B \leq 1, \quad \forall k. \tag{11}$$

2. Формирование двумерных сигналов с минимальной долей просачивания энергии за пределы заданного частотного интервала

2.1. Формирование отдельного двумерного сигнала с заданными частотными свойствами.

Определим требования, при которых энергия $P_\Omega(W)$ некоторого двумерного сигнала W сосредоточена в одном частотном субинтервале Ω. Данные требования могут быть сформулированы в результате решения следующей вариационной задачи

$$\|W\|^2 - P_\Omega(W) \to \min_W . \tag{12}$$

Отметим, что так как

$$\|W\|^2 - P_\Omega(W) \geq 0 ,$$

то минимальное возможное значение задачи (2.1) соответствует случаю, когда

$$\|W\|^2 - P_\Omega(W) = 0 , \tag{13}$$

т.е. энергия сигнала W целиком сосредоточена только в частотном субинтервале Ω.

Используя равенство

$$\|W\|^2 = trec(WW^T)$$

и соотношение (2), можно выполнить следующие преобразования:

$$\|W\|^2 - P_\Omega(W) = trec(WW^T) - trec(AWBW^T) =$$
$$= trec((W - AWB)W^T) .$$

Используя представление субполосных матриц с помощью их собственных чисел и векторов (6), получим

$$trec((W - Q_A L_A Q_A^T W Q_B L_B Q_B^T)W^T) =$$
$$= trec(Q_A\ (Q_A^T W Q_B - L_A Q_A^T W Q_B L_B)\ Q_B^T W^T) .$$

Рассмотрим некоторый двумерный сигнал Y:

$$Y = Q_A^T W Q_B . \tag{14}$$

Тогда вариационная задача (12) может быть записана в виде:

$$trec(Q_A\ (Y - L_A Y\, L_B)\ Q_B^T W^T) \to \min_W . \tag{15}$$

Очевидно, что условием оптимальности решения задачи (1) является использование в преобразованиях над сигналами только собственных чисел, равных 1, и соответствующих им собственных векторов. В этом случае будем иметь

$$Y - L_A Y\, L_B = Z ,$$

где Z – нулевая матрица.

Выполним некоторые преобразования, которые помогут найти оптимальное решение задач (12), (15).

Обозначим, J_{1A} и J_{1B} – количество собственных чисел субполосных матриц A и B, равных 1 (единичные собственные числа субполосных матриц существуют на основании их свойств).

Обозначим также Q_{1A} и Q_{1B} – матрицы, составленные из собственных векторов, соответствующих единичным собственным числам субполосных матриц A и B. Размерности матриц Q_{1A} и Q_{1B} равны (N_1, J_{1A}) и (N_2, J_{1B}) соответственно.

Напомним, что размерности матриц Q_A и Q_B соответственно равны (N_1,N_1) и (N_2,N_2), размерность сигналов W и Y равна (N_1,N_2).

Рассмотрим произвольный двумерный сигнал Y_1, размерности (J_{1A}, J_{1B}) и матрицу Y_{11}, определяемую значениями сигнала Y_1:

$$Y_{11} = Y_1 .$$

Рассмотрим далее сигнал W', задаваемый выражением

$$W' = \begin{bmatrix} Q_{1A} & Q_{0A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1B}^T \\ Q_{0B}^T \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где Q_{0A} и Q_{0B} – нулевые матрицы, дополняющие матрицы Q_{1A} и Q_{1B} до матриц размерности (N_1,N_1) и (N_2,N_2) соответственно, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22} – нулевые матрицы, дополняющие матрицу Y_{11} до матрицы, размерности (N_1,N_2), скобки [ ] – операция составления некоторой матрицы из блоков других матриц.

Вычислим значение функции цели задачи (12), (15) для двумерного сигнала W' (16). Для этого рассмотрим сигнал Y', заданный с помощью выражения (14) для сигнала W', он имеет вид

$$Y' = Q_A^T W' Q_B =$$

$$= Q_A^T \begin{bmatrix} Q_{1A} & Q_{0A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1B}^T \\ Q_{0B}^T \end{bmatrix} Q_B =$$

$$= \begin{bmatrix} Q_{1A}^T \\ Q_{2A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1A} & Q_{0A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1B}^T \\ Q_{0B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1B} & Q_{2B} \end{bmatrix},$$

где Q_{2A} и Q_{2B} – матрицы, столбцы которых составлены из собственных векторов с номерами, начиная с J_{1A} +1 и J_{1B} +1, субполосных матриц A и B соответственно.

Учитывая свойство ортогональности собственных векторов субполосных матриц, имеем

$$Y' = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда для сигналов Y' и W' разность в выражении (2.4) имеет вид

$$Y' - L_A Y' L_B = Y' - L_A \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} L_B = Y' - Y' = Z,$$

где Y_{12}, Y_{21}, Y_{22} и Z – нулевые матрицы.

Таким образом, доказано, что для двумерного сигнала W', задаваемого с помощью выражения (16), имеем

$$\|W'\|^2 - P_\Omega(W') = 0.$$

Покажем, что с сигналом W' совпадает двумерный сигнал W_1, полученный в результате преобразования

$$W_1 = Q_{1A} Y_1 Q_{1B}^T. \tag{17}$$

Выполним следующие преобразования:

$$W' = \begin{bmatrix} Q_{1A} & Q_{0A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1B}^T \\ Q_{0B}^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1B}^T \\ Q_{0B}^T \end{bmatrix} =$$

$$= S_{11} Q_{1B}^T + S_{12} Q_{0B}^T = S_{11} Q_{1B}^T = Q_{1A} Y_1 Q_{1B}^T,$$

где

$$S_{11} = Q_{1A} Y_{11} + Q_{0A} Y_{21} = Q_{1A} Y_{11} = Q_{1A} Y_1,$$

$$S_{12} = Q_{1A} Y_{12} + Q_{0A} Y_{22} = Z_{12},$$

Z_{12} – нулевая матрица.

Таким образом, для выражений (16) и (17) имеем

$$W_1 = W'.$$

Следовательно, справедливо следующее утверждение: для того чтобы энергия некоторого сигнала W_Ω, размерности (N_1,N_2) была сосредоточена только в одном частотном субинтервале Ω, достаточно, чтобы он был сформирован на основании другого сигнала Y_1, размерности (J_{1A}, J_{1B}) и матриц Q_{1A} и Q_{1B}, столбцы которых составлены из собственных векторов, соответствующих единичным собственным числам субполосных матриц A и B (матрицы A и B соответствуют частотному субинтервалу Ω):

$$W_\Omega = Q_{1A} Y_1 Q_{1B}^T. \tag{18}$$

Для восстановления сигнала Y_1 из сигнала W_Ω следует выполнить преобразование

$$Y_1 = Q_{1A}^T W_\Omega Q_{1B}. \tag{19}$$

2.2. Свойства суммы двумерных сигналов с заданными частотными свойствами.

Покажем, что из суммы нескольких сигналов, сформированных с помощью выражения (18) для различных двумерных частотных интервалов, можно восстановить каждый из использованных сигналов.

Предположим, что суммарный двумерный сигнал, содержащий формируемые сигналы, имеет размерность (N_1,N_2).

Пусть двумерная частотная область разбита на множество непересекающихся равновеликих частотных интервалов $\{\Omega_{r1r2}\}$, $r_1=1,2,\dots,R_1$; $r_2=1,2,\dots,R_2$, для каждого из которых вычислены субполосные матрицы A_{r1} и B_{r2}.

Для всех субполосных матриц найдем собственные числа и упорядочим их по убыванию (отдельно для каждой субполосной матрицы).

Определим значения J_{1A}, J_{1B} – минимальное количество единичных собственных чисел соответственно субполосных матриц A_{r1}; $r_1=1,2,\dots,R_1$, и B_{r2}, $r_2=1,2,\dots,R_2$,

$$J_{1A} = \min_{r_1=1,2,\dots,R_1}\{J_{1A_{r1}}\},$$

$$J_{1B} = \min_{r_2=1,2,\dots,R_2}\{J_{1B_{r2}}\}.$$

Зададим матрицы Q_{1Ar1} и Q_{1Br2}, $r_1=1,2,\dots,R_1$, $r_2=1,2,\dots,R_2$, столбцы которых составлены из J_{1A} и J_{1B} собственных векторов, соответствующих указанным выше единичным собственным числам субполосных матриц A_{r1} и B_{r2}.

Зададим произвольные двумерные сигналы $\{Y_{r1r2}\}$, $r_1=1,2,\dots,R_1$, $r_2=1,2,\dots,R_2$, размерностью (J_{1A}, J_{1B}).

Сформируем сигнал W как сумму преобразованных (в соответствии с выражением (18)) сигналов:

$$W = \sum_{i=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} Q_{1Ai} Y_{ik} Q_{1Bk}^T. \tag{20}$$

Выполним восстановление исходного сигнала Y_{r1r2}, $r_1=1,2,\dots,R_1$, $r_2=1,2,\dots,R_2$, на основании выражения (19), умножив матрицу W слева и справа на соответствующие матрицы собственных векторов. Учтем тот факт, что собственные векторы субполосных матриц ортогональны. Тогда

$$Q_{1Ar_1}^T W Q_{1Br_2} = Q_{1Ar_1}^T \left(\sum_{i=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} Q_{1Ai} Y_{ik} Q_{1Bk}^T\right) Q_{1Br_2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} Q_{1Ar_1}^T Q_{1Ai} Y_{ik} Q_{1Bk}^T Q_{B1r_2} = Q_{1Ar_1}^T Q_{A1r_1} Y_{r_1r_2} Q_{1Bk}^T Q_{1Br_2} = Y_{r_1r_2}. \tag{21}$$

Соотношение (21) указывает на тот факт, что одновременно в различные частотные интервалы можно «разместить» несколько исходных сигналов, которые затем можно «извлечь» из суммарного сигнала.

Поскольку изображения представляют собой двумерные сигналы, то приведенные выше соотношения (18)-(19) и (20)-(21), определяющие метод формирования сигналов с заданными частотными свойствами, справедливы при обработке изображений и их квазициклических компонент, соответствующих различным частотным интервалам.

Следовательно, если (с учетом размерностей изображений) некоторое изображение W было получено в результате суммирования произвольного изображения и матрицы W_{Ω}, сформированной на основании другого изображения Y_1 с помощью выражений (18), (20), то изображение Y_1 всегда может быть восстановлено с помощью выражений (19), (21).

3. Проверка работоспособности метода

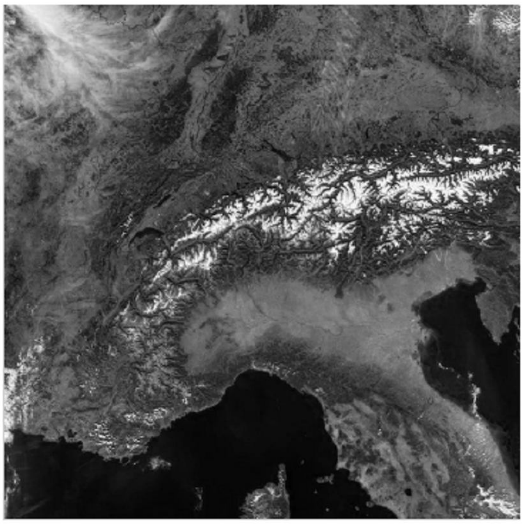
Для проверки работоспособности предлагаемого метода формирования квазициклических компонент изображений с заданными частотными свойствами был проведен ряд вычислительных экспериментов над реальными изображениями – фотографиями земной поверхности.

Так, при проведении вычислительных экспериментов рассматривалось изображение-контейнер W_0 (изображение 512х512 пикселей, рис. 1а), в которое внедрялся фрагмент Y_0 другого изображения (рис. 2а). При этом частотная область $\{0 \le u, \upsilon \le \pi\}$ была разбита на 16 равных по величине субинтервалов (рис. 2в). Для заданного изображения-контейнера было произведено внедрение (рис. 1б) фрагмента в субинтервал Ω_{13}, которому соответствует доля энергии исходного изображения-контейнера меньше, чем 99% от его суммарной энергии.

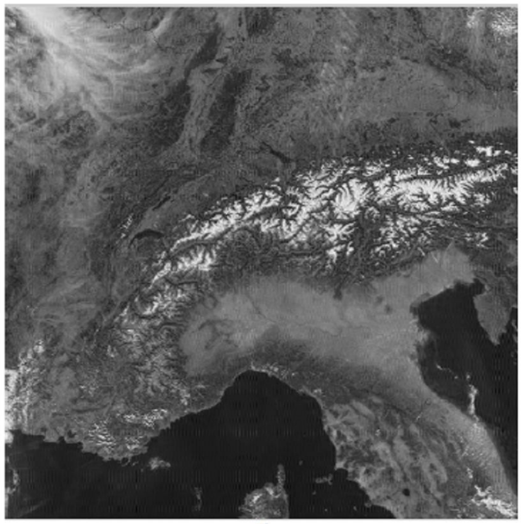
Так как в данном эксперименте количество единичных собственных чисел используемых в вычислениях субполосных матриц равно 122, то внедряемый фрагмент изображения был выбран размером (122,122) пикселей.

Результат W внедрения фрагмента Y_0 в контейнер W_0 был получен на основании следующего соотношения (предварительно из изображения-контейнера был удален результат фильтрации Y_{Ω} (1.4)):

$$W = W_0 + Q_{1A1} Y_0 Q_{1B3}^T .$$



а



б

Рис. 1. Изображение-контейнер:
исходное (а), с внедренным фрагментом (б)

Визуально изображения W и W_0 практически не отличаются (рис. 1). Значение среднеквадратического отклонения для данных изображений равно 0.067.

Далее на изображение-контейнер с внедренным фрагментом был наложен случайный шум с отношением шум/сигнал, равным 0.03. При восстановление фрагмента из зашумленного контейнера было получено изображение Y_n, среднеквадратическое отклонение которого от исходного фрагмента равняется 0.15 (рис. 2б).

а б в

Рис. 2. Внедряемый фрагмент (а), результат восстановления фрагмента при зашумленном контейнере (б), разбиение частотной области (в)

Выводы

Предложенный метод позволяет формировать компоненты изображений, энергия которых сосредоточена в заданном частотном интервале, внедрять и восстанавливать их в изображениях.

Вычислительные эксперименты продемонстрировали работоспособность данного метода и некоторую устойчивость внедренной в изображение информации к случайному шуму.

Литература

1. Жиляков, Е.Г. Методы анализа и построения функций по эмпирическим данным на основе частотных представлений / Е.Г. Жиляков. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.

2. Жиляков, Е.Г. Вариационные алгоритмы анализа и обработки изображений на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жиляков, А.А. Черноморец. – Белгород: Изд-во ООО ГиК, 2009. – 146 с.

3. Жиляков, Е.Г. Метод определения точных значений долей энергии изображений в заданных частотных интервалах / Е.Г. Жиляков, А.А. Черноморец, И.В. Лысенко // Вопросы радиоэлектроники. – Сер. РЛТ. – 2007. – Вып. 4. – С. 115-123.

Исследование выполнено при поддержке ФЦП «Науные и научно-педагогические кадры инновационной России», Государственный контракт №14.740.11.0390

ON FORMING QUASICYCLIC IMAGE COMPONENTS WITH SPECIFIED FREQUENCY PROPERTIES

A. A. CHERNOMORETS
V. V. KRASILNIKOV

Belgorod State University

In this work we propose a method of forming image components that have their energy concentrated in specified frequency interval. We give results of computational experiments that demonstrate the efficiency of the method.

Key words: image, implementation, frequency interval, energy concentration, eigenvector.