Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 130–131.

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ НЕРАВЕНСТВА ВИЛЬЯМА ЯНГА

С. М. Ситник (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

В 1912 г. английский математик Вильям Генри Янг, фамилию которого почему-то в русском языке принято онемечивать и искажать, опубликовал два своих знаменитых неравенства. Первое их них оценивает норму свертки и получило впоследствии имена Янга и Хаусдорфа. Второе — это неравенство для пары взаимно обратных функций [1], которое обычно приводится в частном случае степенных функций в виде

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$

Этот результат, например, используется для вывода так называемого неравенства Гёльдера, которое также исторически справедливо было бы называть неравенством Роджерса — Гёльдера — Рисса [1].

Оказывается, что неравенств Янга для двух чисел не одно, а два (а для нескольких чисел еще больше)! Второе из них имеет вид

$$xy \leqslant \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p}. \tag{2}$$

Тогда возникает задача о сравнении приведенной пары неравенств.

Теорема 1 [2]. 1. *Если $y \geqslant x \geqslant 1$, то оценка (1) лучше, чем (2).*

2. *Если $1 \geqslant y \geqslant x \geqslant 0$, то оценка (2) лучше, чем (1).*

3. *Если $y \geqslant 1 \geqslant x \geqslant 0$, то при данном x существует единственное критическое значение $y = y_{\rm cr}$, которое является решением трансцендентного уравнения*

$$\frac{x^p}{p} - \frac{x^q}{q} = \frac{y^p}{p} - \frac{y^q}{q}.$$

В этом случае при $1 \leqslant y \leqslant y_{\rm cr}$ оценка (2) лучше, чем (1), а при $y \geqslant y_{\rm cr}$ оценка (1) лучше, чем (2).

Приведем численные примеры на все эти случаи.

Пример 1. $x = 5$, $y = 130$, $p = 4$, $q = 4/3$; $xy = 650$, $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 650,16502$, $\frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 71402508$.

В этом случае неравенство (1) лучше (на пять порядков!).

Пример 2. $x = 0,2$, $y = 0,5$, $p = 4$, $q = 4/3$; $xy = 0,1$, $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 0,29803$, $\frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 0,10334$.

А в этом случае неравенство (2) лучше (примерно в три раза).

Пример 3. $x = 0,5$, $p = 4$, $q = 4/3$. Тогда расчет, который мы опускаем, дает критическое значение $y_{\rm cr} \approx 1,35485$. Выберем $x = 0,5$, $y = 1,3 < y_{\rm cr}$; тогда получаем $xy = 0,65$,

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 1,07973, \quad \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 1,01166.$$

Как и следует из теоремы 1, в этом случае лучше оценка (2).

А теперь пусть $x = 0,5$, $y = 1,4 > y_{\rm cr}$; тогда получаем $xy = 0,7$,

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 1,19025, \quad \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 1,25804.$$

Как и следует из теоремы 1, в этом случае лучше оценка (1).

Теорема 2. *Справедливо уточнение дискретного неравенства Роджерса — Гёльдера — Рисса, следующее из теоремы* 1*:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A}\frac{b_k}{B} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{[\max\left(\frac{a_k}{A}, \frac{b_k}{B}\right)]^p}{p} + \frac{[\min\left(\frac{a_k}{A}, \frac{b_k}{B}\right)]^q}{q} \right) \leqslant 1, \qquad (3)$$

где A — *это* l_p, *а* B — l_q *нормы соответствующих векторов.*

В [2] рассмотрены обобщения оценок (1)–(2) для произвольных дополнительных функций Янга, а также степеней преобразований Лежандра.

Отметим, что существует разработанная А. Г. Кусраевым техника перенесения результатов для числовых неравенств на более общий случай векторных решеток и билинейных операторов в них. Эта техника может быть применена и для рассмотренных неравенств.

Литература

1. *Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M.* Classical and new inequalities in analysis.—Dordrecht: Kluwer, 1993.—740 p.
2. *Ситник С. М.* Уточнения и обобщения классических неравенств // Мат. форум. Т. 3. Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—С. 221–266.