УТОЧНЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ КОШИ — БУНЯКОВСКОГО И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

С. М. Ситник
(Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Среди нетривиальных обобщений дискретного неравенства Коши — Буняковского [1–2] одним из наиболее известных результатов является теорема Карлица — Элиезера — Дэйкина (CDE) (см. [2–5]), которую мы переформулируем с использованием средних (см. [5–9]).

Теорема CDE. *Уточнение дискретного неравенства Коши — Буняковского вида*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} f^2(x_k, y_k) \sum_{k=1}^{n} g^2(x_k, y_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \tag{1}$$

выполняется тогда и только тогда, когда величины $f(x,y)$, $g(x,y)$ являются парой произвольных взаимно сопряженных средних [5–9], удовлетворяющих свойствам однородности и монотонности по каждому аргументу.

Данная формулировка в терминах средних делает более понятным оригинальный результат, кроме того снабжает его огромным числом конкретных примеров с использованием многочисленных известных средних [5–6]. Прототипом теоремы CDE послужило известное неравенство Милна [1–5].

Рассмотрим интегральный аналог теоремы CDE.

Теорема 1. *Пусть M — произвольное однородное, монотонное по каждому аргументу абстрактное среднее (необязательно симметричное!), $M^* = xy/M(x,y)$ — сопряженное среднее (см. [5–9]). Тогда справедливо обобщение интегрального неравенства Коши — Буняковского вида*

$$\begin{gathered}\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \big(M(f,g)\big)^2\,dx \int_a^b \big(M^*(f,g)\big)^2\,dx \leqslant \\ \leqslant \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx \int_a^b \big(g(x)\big)^2\,dx.\end{gathered} \tag{2}$$

Мои любимые следствия из этой теоремы получаются при выборе арифметико-геометрического среднего Гаусса и максимума–минимума.

Следствие 1. *Справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \left[\frac{\max(f,g)}{K\left(\sqrt{1-\left(\frac{\min(f,g)}{\max(f,g)}\right)^2}\right)}\right]^2 dx \times \\ \times \int_a^b \big(\min(f,g)\big)^2 \left(K\left(\sqrt{1-\left(\frac{\min(f,g)}{\max(f,g)}\right)^2}\right)\right)^2 dx \leqslant \int_a^b f^2\,dx \int_a^b g^2\,dx,\end{gathered}$$

где $K(x)$ есть полный эллиптический интеграл Лежандра 1 рода.

Отметим экзотический характер последнего неравенства: это неравенство между *произвольными* функциями, но которые стоят под знаком *конкретной специальной* функции — эллиптического интеграла Лежандра!

Следствие 2. *Справедливо неравенство* (*см.* [5, 10]):

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \big[\max(f,g)\big]^2 dx \int_a^b \big[\min(f,g)\big]^2 dx \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

Для интегрального случая необходимая часть теоремы CDE не выполняется, что следует из существования найденных автором других обобщений неравенства Коши — Буняковского, которые не приводятся к виду (2), а имеют иную структуру.

Рассматриваются приложения полученных результатов к оценкам специальных функций и решений дифференциальных уравнений. Отметим также разработанную А. Г. Кусраевым технику перенесения результатов для числовых неравенств на равномерно полные числовые решетки и операторы в них. В этой ситуации действует так называемый «*принцип переноса*», высказанный автором и доказанный А. Г. Кусраевым для неравенств типа Роджерса — Гельдера — Рисса в [11–12].

Литература

1. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948.—456 с.
2. *Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M.* Classical and New Inequalities in Analysis.—Kluwer, 1993.—740 p.
3. *Dragomir S. S.* Discrete Inequalities of the Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz Type.—Nova Sci. Publ., 2004.—225 p.
4. *Steel J. M.* The Cauchy–Schwarz Master Class: an Introduction to the Art of Mathematical Inequalities.—Cambridge Univ. Press, 2004.—306 p.
5. *Sitnik S. M.* Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: a Survey.—arXiv: 1012.3864v1.—2010.—51 p.
6. *Ситник С. М.* Уточнения и обобщения классических неравенств // Мат. форум. Т. 3. Исслед. по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—С. 221–266.—(Итоги науки. ЮФО).
7. *Ситник С. М.* Обобщения неравенств Коши — Буняковского методом средних значений и их приложения // Чернозем. альманах науч. исслед. Сер. Фундам. математика.—2005.—Т. 1, № 1.—С. 3–42.
8. *Ситник С. М.* Некоторые приложения уточнений неравенства Коши — Буняковского // Вестн. Самар. гос. эконом. акад.—2002.—Т. 1, № 8.—С. 302–313.
9. *Ситник С. М.* Уточнение интегрального неравенства Коши— Буняковского // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2000.—№ 9.—С. 37–45.
10. *Ситник С. М.* Обобщение неравенства Коши — Буняковского в терминах максимумов и минимумов функций // Мат. форум. Т. 10, ч. 1. Исслед. по мат. анализу, диф. уравнениям и их прилож.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016.—С. 79–98.—(Итоги науки. Юг России).
11. *Kusraev A. G., Buskes G.* Representation and extension of orthoregular bilinear operators // Vladikavk. Math. J.—2007.—Vol. 9, № 1.—P. 1–17.
12. *Kusraev A. G.* Hölder type inequalities for orthosymmetric bilinear operators // Vladikavk. Math. J.—2007.—Vol. 9, № 3.—P. 3–37.