**Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:** тез. докл. международной научной конференции, 2011.


# ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛАМБЕРТА В ЗАДАЧАХ ОБ ОЦЕНКАХ ХАРАКТЕРИСТИК РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

**С. М. Ситник** (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

В работе А. Ю. Попова [1] решены важные задачи об оценках некоторых достаточно тонких характеристик роста целых функций. При этом получены выражения и оценки этих характеристик через величину

$$C(p) = \max_{x>0} \frac{\ln(1+x)}{x^p}, \quad p \in (0,1). \tag{3}$$

Эти исследования были продолжены в [2, 3].

Основным результатом доклада является тот факт, что характеристики роста целых функций из указанных работ [1–3] могут быть выражены через известную специальную функцию — функцию Ламберта [4, 5]. С помощью функции Ламберта получены асимптотические выражения и неравенства для указанных характеристик роста целых функций, при этом оценки из указанных работ выводятся единообразным методом, а некоторые из них удается усилить [6].

Приведем некоторые результаты.

**Теорема 1.** *Величина $x = x(p)$, для которой достигается максимум в (1), выражается через функцию Ламберта по формуле*

$$x(p) = -\frac{1}{p\,W\Big(-\frac{1}{pe^{\frac{1}{p}}}\Big)} - 1, \quad p \in (0;1).$$

**Теорема 2.** *Для величины $x(p)$, реализующей максимум в (1), справедлива формула*

$$x(p) = \frac{W_{-1}(z)}{W_0(z)} - 1,$$

*где $W_{-1}$, $W_0 = W$ — побочная и главная действительные ветви функции Ламберта при $z \in (-\frac{1}{e}; 0)$, а величины $z$ и $p \in (0;1)$ связаны соотношениями*

$$z = -\frac{1}{pe^{\frac{1}{p}}}, \quad -\frac{1}{p} = W_{-1}(z), \quad p = -\frac{1}{W_{-1}(z)}.$$

**Теорема 3.** *При значениях $p \in (0;1)$ справедливы представления функции $C(p)$, определяемой соотношением (1), как функции аргумента $p$ через функцию Ламберта по формуле*

$$C(p) = \frac{\frac{1}{p} + W(z)}{e\left(\frac{z}{W(z)} - e^{-\frac{1}{p}}\right)^p} = \frac{1}{pe} \cdot \frac{1 + p\,W(z)}{\left(\frac{z}{W(z)} - e^{-\frac{1}{p}}\right)^p} =$$
$$= \frac{W(z) - W_{-1}(z)}{e\left(e^{W(z)} - e^{W_{-1}(z)}\right)^p}, \quad z = -\frac{1}{pe^{\frac{1}{p}}}.$$

*Также справедливо представление функции $C(p)$, определяемой соотношением* (1), *как функции аргумента $z$ через функцию Ламберта по формуле*

$$C(p) = C(p(z)) = (W(z) - W_{-1}(z)) \left(e^{W(x) - W_{-1}(z)} - 1\right)^{\frac{1}{W_{-1}(z)}}.$$

Полученные представления через функцию Ламберта позволяют вывести новые неравенства для величин из [1–3], а ряд из них уточнить. Например, справедлива

**Теорема 4.** *Для величины $x(p)$ при $p \in (0;1)$ справедливы неравенства:*

$$\exp\left(\frac{1}{p} - 1\right) - 1 \leqslant x(p) \leqslant \exp\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p} - 1 \leqslant \exp\left(\frac{1}{p}\right) - 1,$$

$$\frac{1}{p} - 1 \leqslant x(p) \leqslant \frac{1}{p^2} - 1,$$

*а при $p > 0,72$ неравенство для величины $C(p)$ из* (1)

$$C(p) \leqslant \left(\frac{1}{p^2} - 1\right)^{1-p}.$$

Отметим, что верхние оценки из теоремы 4 точнее соответствующих неравенств из работы [1] и справедливы в более широком диапазоне параметра. Аналогичные результаты получены для характеристик роста целых функций, рассматриваемых в работах [2, 3]. Также получен ряд новых неравенств для самой функции Ламберта.

Насколько известно автору, в данной работе впервые рассматриваются приложения функций Ламберта в комплексном анализе. Это подтверждает известное высказывание знаменитого математика Пола Турана, предложившего называть специальные функции другим термином — *полезные функции*!

### Литература


1. *Попов А. Ю.* Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней $\rho$ плотности // Вестн. Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика.—2005.—№ 1.—С. 31–36.
2. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О типе целой функции порядка $\rho \in (0;1)$ с нулями на луче // Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям / Под ред. Ю. Ф. Коробейника, А. Г. Кусраева.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010.—С. 9–21.—(Итоги науки. Сер. мат. форум. Т. 4.).
3. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0;1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. мат.—2011.—Т. 75, № 1.—С. 3–28.
4. *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* On the Lambert $W$ function // Adv. Comput. Math.—1996.—Vol. 5.—P. 329–359.
5. *Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К.* $W$ — функция Ламберта и ее применения в математических задачах физики.—Саров, 2006.—160 с.
6. *Sitnik S. M.* Application of Lambert function to estimation of growth of entire functions.—2011.—17 p.—(Preprint. Arhiv Math.).