ОБОБЩЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА КОШИ–БУНЯКОВСКОГО МЕТОДОМ СРЕДНИХ

Ситник С.М.

Воронежский институт МВД, Россия

e-mail: `mathsms@yandex.ru`

Среди известных обобщений дискретного неравенства Коши–Буняковского одним из наиболее известных результатов является теорема Карлица–Элиезера–Дэйкина (CDE)(см. [1–2]). Мы переформулируем и обобщим этот результат с использованием средних значений.

Теорема CDE. *Уточнение дискретного неравенства Коши–Буняковского вида*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} f^2(x_k, y_k)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} g^2(x_k, y_k)\right) \leqslant \\ \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \quad (1)$$

выполняется тогда и только тогда, когда величины $f(x, y), g(x, y)$ являются парой произвольных взаимно сопряжённых средних [4], [5], [6], *удовлетворяющих свойствам однородности и монотонности по каждому аргументу.*

Данная формулировка в терминах средних делает более понятным оригинальный результат, кроме того снабжает его огромным числом конкретных примеров с использованием многочисленных известных средних [4–6]. Прототипом теоремы CDE послужило известное неравенство Милна [2–3].

Рассмотрим интегральный аналог теоремы CDE. Оказывается, что справедлив следующий неожиданный результат: сохраняется лишь достаточная часть теоремы.

Теорема 1. *Пусть M — произвольное однородное, монотонное по каждому аргументу абстрактное среднее (необязательно симметричное!), $M^* = xy/M(x, y)$ — сопряжённое среднее (см. [4–6]). Тогда справедливо обобщение интегрального неравенства Коши–Буняковского вида*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b (M(f,g))^2 dx \int_a^b (M^*(f,g))^2\,dx \leqslant \\ \leqslant \int_a^b (f(x))^2\,dx \int_a^b (g(x))^2\,dx. \quad (2)$$

При выборе арифметико-геометрического среднего Гаусса и максимума-минимума получаем два следствия.

Следствие 1. *Справедливо неравенство:*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \left[\frac{\max(f,g)}{K\left(\sqrt{1-\left(\frac{\min(f,g)}{\max(f,g)}\right)^2}\right)}\right]^2 dx\times$$

$$\times\int_a^b (\min(f,g))^2\left(K\left(\sqrt{1-\left(\frac{\min(f,g)}{\max(f,g)}\right)^2}\right)\right)^2 dx \leqslant \int_a^b f^2\,dx \int_a^b g^2\,dx,$$

где $K(x)$ есть полный эллиптический интеграл Лежандра 1 рода.

Отметим экзотический характер последнего неравенства: это неравенство между *произвольными* функциями, но которые стоят под знаком *конкретной специальной* функции — эллиптического интеграла Лежандра!

Следствие 2. *Справедливо неравенство:*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b [\max(f,g)]^2\,dx\cdot\int_a^b [\min(f,g)]^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Для интегрального случая необходимая часть теоремы CDE не выполняется, что следует из существования найденных автором других обобщений неравенства Коши–Буняковского, которые не приводятся к виду (2), а имеют иную структуру.

Рассматриваются приложения полученных результатов к оценкам специальных функций и решений дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. *Mitrinović D.S., Pečarić J.E., Fink A.M.* Classical and new inequalities in analysis. – Kluwer, 1993.
2. *Dragomir S.S.* A Survey on Cauchy – Buniakowsky – Schwartz Type Discrete Inequalities. – http://rgmia.vu.edu.au/monographs, 2003.
3. *Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ИЛ. – 1948.
4. *Ситник С.М.* Обобщения неравенств Коши–Буняковского методом средних значений и их приложения // Чернозёмный альманах научных исследований. Серия «Фундаментальная математика». – 2005. – № 1(1). – С. 3 – 42.
5. *Ситник С.М.* Некоторые приложения уточнений неравенства Коши–Буняковского // Вестник Самарской государственной экономической академии. – 2002. – № 1(8). – С. 302 – 313.
6. *Ситник С.М.* Уточнение интегрального неравенства Коши–Буняковского // Вестник Самарского гос. тех. университета. Сер. «Физико-математические науки». – 2000. – № 9. – С. 37 – 45.