при $\mu \to +\infty$. Более того, $\left\|(B-\lambda A)^{-1}\right\| \sim \frac{C}{|\lambda|^p}$ $\lambda \to 0$ тогда и только тогда, когда $l = \max\limits_{i,n} l_{in} - p + 1$, где p — максимальная длина цепочек в полном каноническом A-жордановом наборе.

Замечание 2. Если rank $B = N - 1$, то $\max\limits_{i,n} l_{in} = \operatorname{rank} B$, $p = N - l$. Если $\operatorname{rank} B = l$, то необходимо $p = 1$, т. к. $\max\limits_{i,n}\{l_{in}, l\} \leqslant \operatorname{rank} B$. В этом случае приходим к критерию «ранг-степень» (см. библиографию в [3]), широко используемому в теории алгебро-дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
2. *Логинов Б.В., Треногин В.А.* Обобщенная жорданова структура в теории ветвления // Прямые и обр. задачи для дифференц. уравнений в частных производных и приложения. ФАН, 1978. с.133–148.
3. *Чистяков В.Ф, Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 2003.
4. *Сидоров Н.А., Абдуллин В.Р.* Сплетаемые уравнения разветвления в теории нелинейных уравнений // Матем. сборник. 2001. Т.192, № 7, с.107–124.

УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ОПЕРАТОРАМИ ХАРДИ

Ситник С.М.

Воронежский институт МВД, Россия

e-mail: mathsms@yandex.ru

В нескольких недавних работах найдены простые доказательства того факта, что сдвинутые операторы Харди [1–3] являются унитарными в пространстве $L_2(0,\infty)$

$$H_1 f = f(x) - \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(y)\,dy, H_2 f = f(x) - \int\limits_x^\infty \frac{f(y)}{y}\,dy. \qquad (1)$$

На самом деле это частный случай унитарности более общих операторов преобразования со специальными функциями в ядрах, полученных ранее автором [4–7] в поисках унитарных обобщений известных операторов Сонина и Пуассона [8–10].

Определение 1. Введём операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам

$$S_1 f = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt, S_2 f = (-\frac{d}{dx})\int\limits_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt, \tag{2}$$

$$P_1 f = \int\limits_0^x P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) \frac{df(t)}{dt}\,dt, P_2 f = \int\limits_x^\infty P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) (-\frac{df(t)}{dt})\,dt, \tag{3}$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$ — функция Лежандра.

Теорема 1. *Операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости S_1, S_2 на подходящих функциях являются операторами преобразования типа Сонина, а P_1, P_2 —типа Пуассона, они действуют по формулам*

$$S_\nu L_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = L_\nu P_\nu, L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2}\,. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для унитарности в $L_2(0,\infty)$ операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости* (2) – (3) *необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым.*

При значениях $\nu = 1, 2, 3$ получается

Следствие. *Следующие операторы унитарны в $L_2(0,\infty)$, их спектр совпадает с единичной окружностью:*

$$H_1 f = f(x) - \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(y)\,dy, H_2 f = f(x) - \int\limits_x^\infty \frac{f(y)}{y}\,dy,$$

$$H_3 f = f + \int\limits_0^x f(y)\,\frac{dy}{y}\,,\ H_4 f = f + \frac{1}{x}\int\limits_x^\infty f(y)\,dy,$$

$$H_5 f = f + 3x\int\limits_0^x f(y)\,\frac{dy}{y^2}\,,\ H_6 f = f - \frac{3}{x^2}\int\limits_0^x y f(y)\,dy,$$

$$H_7 f = f + \frac{3}{x^2}\int\limits_x^\infty y f(y)\,dy,\ H_8 f = f - 3x\int\limits_x^\infty f(y)\frac{dy}{y^2}\,,$$

$$H_9 f = f + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left(\frac{15x^2}{y^3} - \frac{3}{y}\right) f(y)\,dy,$$

$$H_{10} f = f + \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty \left(\frac{15y^2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) f(y)\,dy.$$

Разумеется, приведённый список можно легко расширить. На мой взгляд подобных простых явных примеров очень не хватает в курсах функционального анализа.

Получение унитарных при всех ν операторов преобразования типа Сонина и Пуассона требует более сложных выкладок. Приведём окончательный результат.

Теорема 3. *Следующие операторы являются операторами преобразования типа Сонина и Пуассона, взаимно обратными и унитарными при всех* ν*:*

$$S_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int\limits_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\Bigl(\int\limits_0^x \left(x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy -$$

$$-\int\limits_x^\infty \left(y^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy\Bigr),$$

$$P_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\Bigl(\int\limits_0^x P_\nu\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d}{dy}\right)f(y)\,dy -$$

$$-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\Bigl(\int\limits_0^x \left(x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy -$$

$$-\int\limits_x^\infty \left(y^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\Bigr)\Bigr),$$

где P_ν — функция Лежандра первого рода, Q_ν^1 — функция Лежандра второго рода, $\mathbb{Q}_\nu^1$ — функция Лежандра второго рода на разрезе [11].

Таким образом, можно сделать вывод, что введённые автором в [4–7] операторы преобразования Бушмана–Эрдейи различных типов являются полезными обобщениями классических операторов Харди [1–2]. При некоторых условиях они обладают сплетающим свойством и являются унитарными.

Список литературы

1. *Opic B., Kufner A.* Hardy–Type Inequalities. – Longman, 1990.
2. *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted Inequalities of Hardy Type. World Scientific, Singapore, 2003.
3. *Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E.* The Hardy Inequality. – Pilsen, 2007. – 162 P.
4. *Ситник С.М.* Унитарность и ограниченность операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости // Препринт института автоматики и процессов управления ДВО РАН. – Владивосток, 1990. – 45 С.
5. *Ситник С.М.* Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи // ДАН СССР. – 1991. – т.320. – №6. – С.1326–

1330.
6. *Sitnik S.M.* Factorization and estimates of the norms of Buschman–Erdelyi operators in weighted Lebesgue spaces. Soviet Mathematics Doklades. 1992, Vol. 44, No. 2, P. 641–646.
7. *Ситник С.М.* Операторы преобразования и их приложения. В книге: «Исследования по современному анализу и математическому моделированию», Владикавказ: Изд-во ИПМИ ВНЦ РАН, 2008. – 70 с.
8. *Delsarte J.* Sur certaines transformation fonctionnelles relative aux équations linéares aux dèrivées partielles du seconde ordre // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1938. – 206. – 1780–1782.
9. *Carroll R.* Transmutation, Scattering Theory and Special Functions. – North Holland, 1982. – 457 p.
10. *Левитан Б.М.* Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. – 1951. – Т. 6. – Вып. 2. – С. 102–143.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. т.1. – М.: Наука, Гл. ред. ФМЛ, 1973. – 296 с.

ГРАНИЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ

Солдатенков А.О.
МГТУ им. Н.Э. Баумана
e-mail: a_sold@mail.ru

Рассмотрим в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ смешанную задачу для одномерного линейного гиперболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами:

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x + c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \nu(t),\ u(l,t) = \mu(t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x). \tag{3}$$

Будем предполагать, что $a \in C^2(\overline{Q_T})$, $b, c \in C^1(\overline{Q_T})$, и существует константа a_1, такая что $0 < a_1 \leqslant a(x,t)$ в Q_T.

Рассмотрим задачу точного граничного управления для уравнения (1). Пусть заданы начальные данные $u_0(x)$, $u_1(x)$. Требуется найти такие функции $\nu(t)$, $\mu(t)$, чтобы решение задачи (1)–(3) удовлетворяло условиям

$$u(x,T) = 0,\ u_t(x,T) = 0. \tag{4}$$

Для доказательства разрешимости данной задачи и для исследования свойств управлений используется метод HUM (Hilbert Uniqueness Method), представленный в работе [1]. При этом вопрос о точной управляемости для уравнения (1) сводится к исследованию наблюдаемости для сопряженного ему уравнения. Для того, чтобы доказать существование управлений $\nu(t)$