ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1995, том 340, № 1, с. 18 - 20

МАТЕМАТИКА

УДК 517.44

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЙОСТА ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

 В. В. Катрахов, С. М. Ситник

Представлено академиком С.М. Никольским 08.12.93 г.

Поступило 09.12.93 г.

1. В настоящей работе рассматривается задача о представлении решений Йоста обыкновенного дифференциального уровня

$$L_q\psi_\nu(\lambda, r) = \frac{d^2\psi_\nu}{dr^2} - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2}\psi_\nu - q(r)\psi_\nu = -\lambda^2\psi_\nu(\lambda, r) \quad (1)$$

с сингулярным потенциалом в виде

$$\psi_\nu(\lambda, r) = \mathcal{U}_\nu(\lambda, r) + \int_r^\infty K_\nu(r, t)\mathcal{U}_\nu(\lambda, t)dt, \quad (2)$$

где $\mathcal{U}_\nu(\lambda, t)$ есть некоторое решение невозмущенного уравнения Шредингера

$$L_0\mathcal{U}_\nu(\lambda, r) = \frac{d^2\mathcal{U}_\nu}{dr^2} - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2}\mathcal{U}_\nu = -\lambda^2\mathcal{U}_\nu(\lambda, r), \quad (3)$$

$r > 0$; ν, λ – вещественные постоянные.

Задача о существовании представления Йоста (2) сводится к нахождению дважды непрерывно дифференцируемого ядра $K_\nu(r, t)$ и оценкам этого ядра и его производных в различных нормах. Такое представление сохраняет асимптотику решений $\mathcal{U}_\nu(\lambda, r)$ и их производных на бесконечности. Оценки решений Йоста лежат в основе различных методов квантовой теории рассеяния и обратных задач (см., например, [1 - 3, 7]).

Существование представления (2) впервые было доказано для уравнения Штурма–Лиувилля ($\nu = 0$) в [4]. Случай непрерывного потенциала $q(r)$ рассмотрен в [5].

Значительный интерес представляет рассмотрение потенциалов с особенностями при $r \to 0$, "...поскольку приходится иметь дело с сингулярными потенциалами в физике элементарных частиц и в проблеме многих тел при использовании потенциалов с сильным отталкиванием" [1]. Батманом и Шаданом был введен класс потенциалов [1], которые могут иметь особенность при $r \to 0$ за счет быстрой осцилляции в начале координат. Эти потенциалы удовлетворяют условиям

$$w(r) = -\int_r^\infty q(t)dt \in L_1(0, \infty), \quad \lim_{r\to 0} rw(r) = 0. \quad (4)$$

В частности, потенциал, соответствующий функции

$$w(r) = r^{-\alpha}e^{-\beta r}\sin\left(\exp\frac{1}{r}\right), \quad \alpha < 1, \quad \beta > 0, \quad (5)$$

имеет экспоненциальную особенность в начале координат. Однако и в этот класс входят, например, потенциалы со степенной особенностью вида $q(r) \sim r^{-\varepsilon}$ лишь при $\varepsilon < 1$. В [6] условия на $q(r)$ для справедливости представления (2) ослаблены до оценки $|q(r)| \le \mathrm{const}/r^2$.

В настоящей работе получено представление Йоста (2) для сингулярного потенциала $q(r)$ с произвольной особенностью в начале координат. От q требуется лишь мажорируемость определенной функцией, суммируемой на бесконечности. В частности, к классу допустимых в данной работе относятся: сингулярный потенциал r^{-2}, сильно сингулярный потенциал со степенной особенностью, потенциалы Юкавы, Баргмана и Батмана–Шадана. При этом на функцию $q(r)$ не накладывается никаких дополнительных условий типа быстрой осцилляции в начале координат или знакопостоянства, что позволяет изучать притягивающие и отталкивающие потенциалы единым методом.

Построение решений Йоста (2) эквивалентно задаче о построении оператора преобразования

Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской Академии наук, Владивосток

Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской Академии наук, Владивосток

(сплетающего оператора или трансмутации) вида

$$P_\nu f(r) = f(r) + \int_r^\infty K_\nu(r, t) f(t) dt, \tag{6}$$

определенного на решениях уравнения (3) и сплетающего дифференциальные операторы L_q и L_0 по формуле

$$P_\nu L_0 f = L_q P_\nu f. \tag{7}$$

Общая теория операторов преобразования и их приложений к обратным задачам и теории рассеяния изложена, например, в [7, 8]. В [9 - 12] рассмотрены задачи о построении операторов преобразования для регулярных в нуле решений (1) при различных условиях на потенциалы: $v = 0$ в [9]; $q \in C^0$ в [10]; $|q(r)| \le \text{const} \cdot r^{-3/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ в [11]; $q = 0$ в [12]. Один из классов сплетающих операторов вида (6) применен в [13] для получения точных оценок скорости убывания решений стационарного уравнения Шредингера с радиальным потенциалом. Возможен также другой подход к изучению сингулярного дифференциального уравнения (1) с использованием преобразования Крама–Крейна [2].

2. При помощи стандартных вычислений [12, 10, 5] условия (2), (7) приводят к дифференциальной задаче для неизвестного ядра оператора преобразования (6) $K_\nu(r, t)$, с этой задачей связывается функция Римана R_ν некоторого уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Функция Римана зависит от аргументов $R_\nu = R_\nu(s, \tau; \xi, \eta)$, $0 < \tau < \eta < \xi < s$, $\xi = (t + r)/2$, $\eta = (t - r)/2$ и в рассматриваемом нами случае выражается [12] через функцию Гаусса по формуле

$$R_\nu = \left(\frac{s^2 - \eta^2}{s^2 - \tau^2} \cdot \frac{\xi^2 - \tau^2}{\xi^2 - \eta^2}\right) \times$$
$$\times {}_2F_1\left(-\nu, -\nu;\ 1;\ \frac{s^2 - \xi^2}{s^2 - \eta^2} \cdot \frac{\eta^2 - \tau^2}{\xi^2 - \tau^2}\right), \tag{8}$$

где ${}_2F_1(z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [14]. Мы будем предполагать далее, что $\nu \ge 0$.

Лемма 1. *Функция Римана* (8) *выражается через функцию Лежандра по формуле*

$$R_\nu(s, \tau;\ \xi, \eta) = P_\nu\left(\frac{1 + A}{1 - A}\right),$$
$$A = \frac{\eta^2 - \tau^2}{\xi^2 - \tau^2} \cdot \frac{s^2 - \xi^2}{s^2 - \eta^2}, \tag{9}$$

где $P_\nu(z)$ – *функция Лежандра* 1-*го рода* [14].

Лемма 2. *Функция Римана* R_ν *обладает следующими свойствами*:

а) $R_\nu(s, \tau; \xi, \eta) > 0, \quad 0 < \tau < \eta < \xi < s$;

б) $R_\nu(x, 0; s, \tau) \le R_\nu(x, 0; \xi, \eta)$ *при условиях* $0 < \tau < \eta < \xi < s < x$;

в) $R_\nu(s, \tau; \xi, \eta) \le R_\nu(s, 0; \xi, \eta)$.

Введем необходимую для оценок величину

$$I_q(r, t) = \frac{1}{2}\int_\xi^\infty R_\nu(x, 0;\ \xi, y)|q(x)|\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{t+r}{2}}^\infty P_\nu\left(\frac{y^2(t^2 + r^2) - (t^2 - r^2)}{2try^2}\right)|q(y)|\,dy. \tag{10}$$

Фиксируем условия на потенциал $q(r)$. Мы предполагаем, что существует функция $p(s)$ такая, что:

$$p(s) \ge 0, \quad s > 0, \tag{11}$$

$$\forall \xi > 0:\ \int_\xi^\infty p(t) dt < \infty, \tag{12}$$

$$|q(s + \tau)| \le p(s), \quad \forall \tau, \forall s\colon 0 < \tau < s. \tag{13}$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Если выполнены условия на потенциал* (11) - (13), *то существует представление Йоста* (2), *ядро которого удовлетворяет оценке*

$$|K_\nu(r, t)| \le I_p(r, t)\exp\left[\left(\frac{t - r}{2}\right) I_p(r, t)\right], \tag{14}$$

где $p = p(s)$ – *функция из* (11) - (13), *а величина* I_p *определяется по формуле* (10). *Если, кроме того*, $q(r) \in C^1(0, \infty)$, *то* $K_\nu(r, t) \in C^2(t > r)$ *и функция* (2) *есть решение уравнения* (1).

Неравенство (14) можно преобразовать к менее точной, но и более простой оценке.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *справедлива следующая оценка ядра оператора преобразования*:

$$|K_\nu(r, t)| \le G_p(r, t)\exp\left[\left(\frac{t - r}{2}\right) G_p(r, t)\right],$$
$$G_p(r, t) = P_\nu\left(\frac{t^2 + r^2}{2rt}\right)\int_r^\infty p(x) dx, \tag{15}$$

$P_\nu(z)$ – *функция Лежандра* [14].

При $\nu = 0$ неравенства (14), (15) переходят в известные оценки Б.Я. Левина [4] для решений уравнения Штурма–Лиувилля. Аналогичные (14) неравенства справедливы и для производных ядра $K_\nu(r, t)$.

Перечислим классы потенциалов, которые удовлетворяют условиям (11) - (13). Если $|q(s)|$ монотонно убывает, то можно положить $p(s) = |q(s)|$. Допустимыми являются суммируемые на бесконечности потенциалы с оценкой $|q(s+\tau)| \le \le \mathrm{const}|q(s)|$ и потенциалы, обрезанные нулем на бесконечности. В частности, приведенным условиям удовлетворяют следующие потенциалы, встречающиеся в приложениях: сингулярный потенциал C/r^2, сильно сингулярный потенциал с произвольной степенной особенностью вида $r^{-2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, кулоновский потенциал $1/r$, обрезанный нулем на бесконечности, различные потенциалы Баргмана

$$q_1 = -\frac{\exp(-C_1 r)}{(1 + C_2\exp(-C_1 r))^2},$$

$$q_2 = \frac{C_3}{(1 + C_4 r)^2}, \quad q_3 = -\frac{C_5}{\mathrm{ch}^2(C_6 r)}$$

с положительными константами C_i и Юкавы

$$q_4 = \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad q_5 = \int\limits_r^{\infty} e^{-\alpha r} d\beta(r), \quad \alpha > 0, \beta(r) > 0$$

(см., например, [1]).

Доказательство теоремы 3 использует не явную формулу для функции Римана R_ν, а лишь те свойства этой функции, которые перечислены в лемме 2. Поэтому методами настоящей работы можно доказать существование и оценки ядер для операторов преобразования, сплетающих более общие дифференциальные операторы, чем L_q и L_0. Достаточно лишь выполнения условий леммы 2 для соответствующей функции Римана. Отметим, что эти условия (положительность и монотонность по аргументам) выполнены для широкого класса уравнений. О применении функции Римана к построению операторов преобразования см. также [7, 8].

3. Рассмотрим сильно сингулярные степенные потенциалы вида

$$q(r) = r^{-(2\beta + 1)}, \quad \beta > 0. \tag{16}$$

Для них можно, не снижая точности оценки (14), исключить из (14) интегралы.

Теорема 3. *Для потенциалов вида* (16) *справедлива теорема* 3 *с оценкой*

$$|K_\nu(r, t)| \le L_\beta(r, t)\exp\left[\left(\frac{t-r}{2}\right)L_\beta(r, t)\right],$$
$$L_\beta(r, t) = \frac{\Gamma(\beta)4^{\beta - 1}}{(t^2 - r^2)^\beta} P_\nu^{-\beta}\left(\frac{t^2 + r^2}{2rt}\right), \tag{17}$$

$P_\nu^\mu(z)$ – *присоединенная функция Лежандра* 1-*го рода* [14].

Неравенство (17) доказано в [6] для частного случая потенциала $q(r) = \mathrm{const}/r^2$, $\beta = 1/2$. Из [14] следует, что в этом случае функция Лежандра в (17) выражается через элементарные функции. Другим потенциалом, для которого оценка (17) может быть выражена через элементарные функции, является $q(r) = r^{-(2\nu+1)}$, $\beta = \nu > 0$. В этом случае

$$|K_\nu(r, t)| \le$$
$$\le \frac{1}{4\nu}\frac{t(t^2 + r^2)^\nu}{r^{2\nu+1}}\exp\left[\frac{2^{\nu-2}}{\nu}\left(\frac{t-r}{2}\right)\left(\frac{t^2 + r^2}{2rt}\right)^\nu\right].$$

Неравенства этого пункта справедливы и для потенциалов, которые мажорируются потенциалами (16).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шадан К., Сабатье П.* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980. 408 с.
2. *Агранович З.С., Марченко В.А.* Обратная задача рассеяния. Харьков. 1960. 158 с.
3. *Ньютон Р.* Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. 390 с.
4. *Левин Б.Я.* // ДАН. 1956. Т. 106. № 2. С. 187 - 190.
5. *Сохин А.С.* // Тр. физ.-техн. ин-та низких температур АН УССР. 1969. В. 1. С. 117 - 125.
6. *Ситник С.М.* Операторы преобразования для дифференциального выражения Бесселя. Деп. ВИНИТИ № 535-В87. 1986.
7. *Carroll R.* Transmutation, Scattering Theory and Special Functions. Amsterdam: North-Holland, 1982. 457 p.
8. *Carroll R.* Transmutation Theory and Applications. Amsterdam: North-Holland, 1985. 351 p.
9. *Повзнер А.Я.* // Мат. сб. 1948. Т. 23. В. 65. С. 3 - 52.
10. *Волк В.Я.* // УМН. 1953. Т. 111. В. 4(56). С. 141 - 151.
11. *Сташевская В.В.* // Учен. зап. Харьк. мат. об-ва. 1957. Т. 25. № 5. С. 49 - 86.
12. *Левитан Б.М.* // УМН. 1951. Т. 6. В. 2. С. 102 - 143.
13. *Ситник С.М.* Неклассические уравнения математической физики. Сб. науч. тр. Новосибирск. 1985. С. 139 - 147.
14. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 1. 296 с.