УДК 517.956

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДРОБНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ АДАМАРА И НЕОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Т.А. Манаенкова

Белгородский государственный университет,
ул.Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: manaenkova ta@mail.ru

Аннотация. В банаховом пространстве рассматриваются прямая и обратная задачи типа Коши с левосторонней дробной производной Адамара порядка $\alpha \in (0,1)$. Устанавливается корректная разрешимость рассматриваемых задач с неограниченным оператором. Для обратной коэффициентной задачи указаны достаточные условия её однозначной разрешимости.

Ключевые слова: операторное уравнение, дробная производная Адамара, обратная коэффициенная задача.

Пусть X – банахово пространство, B – линейный, замкнутый, плотно определенный оператор в X с областью определения $D(B)$ и непустым резольвентным множеством. При $0 < \alpha < 1$ рассмотрим обратную коэффициентную задачу

$$ {}^{A}D_{1+}^{\alpha} u(t) = Bu(t) + (\ln t)^{k-1} p, \tag{1} $$

$$ \lim_{t\to 1} {}^{A}I_{1+}^{1-\alpha} u(t) = u_0, \tag{2} $$

$$ \lim_{t\to e} {}^{A}I_{1+}^{\beta} u(t) = u_1, \tag{3} $$

где $k > 0$,

$$ {}^{A}I_{1+}^{\beta} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} u(s)\, \frac{ds}{s} $$

– левосторонний дробный интеграл Адамара порядка $\beta \geq 0$ (при $\beta = 0$ оператор ${}^{A}I_{1+}^{\beta}$ является единичным) (см. [1, с. 250], [2, с. 110]),

$$ {}^{A}D_{1+}^{\alpha} u(t) = \ t\frac{d}{dt} {}^{A}I_{1+}^{1-\alpha} u(t) $$

– левосторонняя дробная производная Адамара порядка $\alpha \in (0,1)$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $u_0, u_1 \in X$.

Как следует из результатов работы [3], корректная постановка начальной задачи для уравнения

$$ {}^{A}D_{1+}^{\alpha} u(t) = Bu(t) + h(t), \qquad t > 1 \tag{4} $$

при $\alpha \in (0,1)$ и достаточно гладкой функции $h(t)$ состоит в задании условия (2).

Определение 1. *Решением задачи(1)-(3) называется пара $(u(t), p)$, где $u(t) \in D(B)$ непрерывная при $t \in (1, e]$ функция такая, что ${}^{A}I_{1+}^{1-\alpha}u(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую при $t \in (1, e]$ функцию, $p \in X$, наконец, $u(t)$ и p удовлетворяют (1)-(3).*

Определение 2. *Задача (4), (2) называется равномерно корректной, если существует заданная на X, коммутирующая с B операторная функция ${}^{A}T_{\alpha}(t)$ и числа $M > 0$, $\omega \in R$ такие, что для любого $u_0 \in D(B)$ функция ${}^{A}T_{\alpha}(t)u_0$ является её единственным решением, и при этом*

$$\left\|{}^{A}T_{\alpha}(t)\right\| \leqslant M\,(\ln t)^{\alpha-1}\,t^{\omega}, \quad t > 1.$$

Замена независимой переменной t и неизвестной функции $u(t)$

$$t = e^{\tau},\ \tau > 0, \quad u(t) = u\left(e^{\tau}\right) = v(\tau) \tag{5}$$

переводит задачу (4), (2), однородную и неоднородную, в уже исследованные задачи для дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля

$$D_{0+}^{\alpha}v(\tau) = \frac{d}{d\tau}I_{0+}^{1-\alpha}v(\tau)\,,$$

где $I_{0+}^{1-\alpha}v(\tau) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^{\tau}(\tau - s)^{-\alpha}\,v(s)\,ds$ — левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\alpha$. Указанные замены переводят уравнение (4), начальное условие (2) в следующие соотношения

$$D_{0+}^{\alpha}v(\tau) = Bv(\tau), \qquad \tau > 0, \tag{6}$$

$$\lim_{\tau \to 0+} I_{0+}^{1-\alpha}v(\tau) = u_0, \tag{7}$$

$$D_{0+}^{\alpha}v(\tau) = Bv(\tau) + h\left(e^{\tau}\right), \qquad \tau > 0. \tag{8}$$

Разрешимость задач (6), (7) и (8), (7) установлена в [3].

В работе [3] приводятся условия на оператор B и функцию $h(t)$, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (8), (7), которые легко переносятся на задачу (4), (2). Эти условия в банаховом пространстве E, обладающем свойством Радона-Никодима (см. [4, с. 15]), формулируются в терминах оценки нормы производных резольвенты $R\left(\lambda^{\alpha}\right) = \left(\lambda^{\alpha}I - B\right)^{-1}$ (λ^{α} – главная ветвь степенной функции), которая существует в точке λ^{α} при $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$. Упомянутые оценки имеют вид

$$\left\|\frac{d^{n}R\left(\lambda^{\alpha}\right)}{d\lambda^{n}}\right\| \leq \frac{M\,\Gamma(n+\alpha)}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^{n+\alpha}}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{9}$$

и являются необходимым и достаточным условием равномерной корректности задачи (4), (2).

В дальнейшем нам понадобятся следующие условия.

Условие 1. *Оператор B таков, что задача (4), (2) равномерно корректна.*

Условие 2. *Выполнено одно из следующих требований:*

a) $h(t) \in C(1,\infty)$, *абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t=1$, *принимает значения в* $D(B)$, $Bh(t) \in C(1,\infty)$ *и также абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t=1$;

b) ${}^A I_{1+}^{1-\alpha} h(t)$ *непрерывна при* $t \geq 1$, *непрерывно дифференцируема при* $t>1$ *и* ${}^A D^\alpha h(t)$ *абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t=1$.

В случае неограниченного оператора B, удовлетворяющего условию 1, решение задачи (4), (2) при $h(t) \equiv 0$ имеет вид (см. [3])

$$u(t) \equiv {}^A T_\alpha(t) u_0 = \frac{1}{2\pi i} {}^A D_{1+}^{1-\alpha} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{\alpha-1} t^\lambda R(\lambda^\alpha)\, u_0 \, d\lambda, \qquad u_0 \in D(B),\ \sigma > \max(0,\omega), \quad (10)$$

а в общем случае

$$u(t) = {}^A T_\alpha(t) u_0 + \int\limits_1^t {}^A T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right) h(s)\, ds\,.$$

При этом функция $h(t)$ должна удовлетворять условию 2.

Установим далее необходимое условие единственности решения обратной задачи (1)-(3) с неограниченным оператором B.

Теорема 1. *Пусть B – линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что обратная задача (1)-(3) имеет решение $(u(t), p)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль μ_n целой функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора B.*

□ Предположим противное, пусть некоторый нуль μ_n из счетного множества нулей функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ является собственным значением оператора B с собственным вектором $h_n \neq 0$.

Введем в рассмотрение функцию $w(t) = \psi(t) h_n$ и подберем скалярную функцию $\psi(t)$ так, чтобы функция $w(t)$ удовлетворяла уравнению (1) при $p = h_n$ и нулевому начальному условию (2). Легко проверить, что функция $\psi(t)$ должна быть решением следующей задачи Коши

$${}^A D_{1+}^\alpha \psi(t) = \mu_n \psi(t) + (\ln t)^{k-1}, \quad (11)$$

$$\lim_{t\to 1} {}^{A}I_{1+}^{1-\alpha}\psi(t) = 0. \tag{12}$$

Задача (11), (12) имеет единственное решение (см. [5]), которое представимо в виде

$$\psi(t) = \int\limits_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\mu_n\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha}\right)(\ln s)^{k-1}\,ds.$$

Поскольку μ_n – нуль функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$, то получаем

$$\lim_{t\to e} {}^{A}I_{1+}^{\beta}\psi(t) = \Gamma(k)E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n) = 0.$$

Таким образом, функция $w(t) = \psi(t)h_n$ удовлетворяет уравнению (1) при $p = h_n$ и нулевым условиям (2) и (3), что противоречит предположению единственности решения, поскольку пара $(u(t) + w(t), p + h_n)$ также является решением задачи (1)-(3). ■

Для установления однозначной разрешимости задачи (1)-(3) с неограниченным оператором B, удовлетворяющим условию 1, сведем эту задачу, учитывая (10), к операторному уравнению

$$Gp = q, \tag{13}$$

где

$$Gp = \frac{1}{\Gamma(k)}\lim_{t\to e} {}^{A}I_{1+}^{\beta}\int\limits_1^t (\ln s)^{k-1}\, {}^{A}T_{\alpha}\left(\frac{t}{s}\right)p\,ds = \lim_{t\to e} {}^{A}I_{1+}^{k+\beta}\, {}^{A}T_{\alpha}(t)p, \quad G: E\to E, \tag{14}$$

$$q = \frac{1}{\Gamma(k)}\left(u_1 - \lim_{t\to e} {}^{A}I_{1+}^{\beta}\, {}^{A}T_{\alpha}(t)u_0\right), \quad q\in D(B). \tag{15}$$

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1)-(3) сводится к задаче о существовании у ограниченного оператора G, заданного соотношением (14), обратного оператора, определенного на некотором подмножестве банахова пространства E. Для выяснения последнего факта мы получим более удобное для исследований представление оператора с помощью резольвенты $R(\lambda^{\alpha}) = (\lambda^{\alpha}I - B)^{-1}$, сузив при этом область определения оператора G до плотного в E множества $D(B)$.

Теорема 2. *Пусть оператор B удовлетворяет условию 1. Тогда для любого $p\in D(B)$ справедливо представление*

$$Gp = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} z^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(z)R(z^{\alpha})\,p\,dz, \tag{16}$$

□ Пусть вначале $p \in D(B^2)$ и, стало быть, $p = R^2(\lambda)p_0$, $p_0 \in E$, где $\lambda \in \rho(B)$, $\rho(B)$ – резольвентное множество оператора B, $\operatorname{Re}\lambda > \sigma > \omega$. Тогда из (14), (10), используя полугрупповое свойство дробного интегрирования и тождество Гильберта, после интегрирования по частям получим

$$Gp = \lim_{t\to e} {}^{A}I_{1+}^{k+\beta A}D_{1+}^{1-\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{t^z}{z^{1-\alpha}}R(z^\alpha)\,R^2(\lambda)p_0\,dz =$$

$$= \lim_{t\to e} {}^{A}I_{1+}^{k+\beta+\alpha-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{t^z}{z^{1-\alpha}}R(z^\alpha)\,R^2(\lambda)p_0\,dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+\alpha+\beta)}\ \lim_{t\to e}\ t\frac{d}{dt}\int\limits_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k+\alpha+\beta-1}\ \frac{ds}{s}\ \times$$

$$\times\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} z^{\alpha-1}s^z\left(\frac{R(z^\alpha)\,p_0}{(\lambda-z^\alpha)^2}-\frac{R^2(\lambda)p_0}{\lambda-z^\alpha}-\frac{R(\lambda)p_0}{(\lambda-z^\alpha)^2}\right)\,dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+\alpha+\beta)}\lim_{t\to e}t\frac{d}{dt}\int\limits_0^{\ln t}(\ln t-\eta)^{k+\alpha+\beta-1}\,d\eta\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\exp(z\eta)R(z^\alpha)\,p_0}{z^{1-\alpha}\,(\lambda-z^\alpha)^2}\,dz\,, \qquad (17)$$

при этом интегралы по прямой $\operatorname{Re} z = \sigma$ от функций вида

$$\frac{z^{\alpha-1}\exp(z\eta)\ R^j(\lambda)p_0}{(\lambda-z^\alpha)^{3-j}},\qquad j = 1,2$$

обратились в нуль в силу леммы Жордана.

Последний интеграл абсолютно сходится. Поэтому, изменив порядок интегрирования и воспользовавшись равенством 1.17 [6]

$$z^\mu E_{1,\mu+1}(\lambda z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^z e^{\lambda s}(z-s)^{\mu-1}\,ds,\quad \mu > 0\,, \qquad (18)$$

из (17) выводим представление

$$Gp = \lim_{t\to e}t\frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(\ln t)^{k+\alpha+\beta}\ R(z^\alpha)\,p_0}{z^{1-\alpha}\,(\lambda-z^\alpha)^2}\ E_{1,k+\alpha+\beta+1}(z\ln t)dz =$$

$$= \lim_{t\to e}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(\ln t)^{k+\alpha+\beta-1}\ R(z^\alpha)\,p_0}{z^{1-\alpha}\,(\lambda-z^\alpha)^2}\ E_{1,k+\alpha+\beta}(z\ln t)dz =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)R\left(z^{\alpha}\right)p_0}{z^{1-\alpha}\left(\lambda-z^{\alpha}\right)^2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)R\left(z^{\alpha}\right)\left(\left(\lambda-z^{\alpha}\right)I+\left(z^{\alpha}I-B\right)\right)(\lambda I-B)p}{z^{1-\alpha}\left(\lambda-z^{\alpha}\right)^2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)}{z^{1-\alpha}\left(\lambda-z^{\alpha}\right)}R\left(z^{\alpha}\right)(\lambda I-B)p\,dz,\quad p\in D\left(B^2\right). \tag{19}$$

Если обозначить $p_1=(\lambda I-A)p$, то $p_1\in D(B)$ и $p=R(\lambda)p_1$. Поэтому равенство (19) примет вид

$$GR(\lambda)p_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)}{z^{1-\alpha}\left(\lambda-z^{\alpha}\right)}R\left(z^{\alpha}\right)p_1\,dz,\quad p_1\in D(B). \tag{20}$$

Левая и правая части равенства (20) представляют собою ограниченные операторы, которые совпадают на $D(B)$. В силу плотности $D(B)$ в E, равенство (20) справедливо при всех $p_1\in E$. Но тогда $p=R(\lambda)p_1\in D\left(B\right)$ и для таких p справедливо представление

$$Gp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)}{z^{1-\alpha}\left(\lambda-z^{\alpha}\right)}R\left(z^{\alpha}\right)\left(\left(\lambda-z^{\alpha}\right)I+\left(z^{\alpha}I-B\right)\right)p\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}z^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(z)R\left(z^{\alpha}\right)p\,dz.\quad\blacksquare$$

Переходим теперь к установлению достаточных условий однозначной разрешимости задачи (1)-(3). Как следует из теоремы 1, нам придется потребовать, чтобы ни один нуль μ_n функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора B. Более того, для установления разрешимости потребуем, чтобы все нули принадлежали резольвентному множеству $\rho(B)$. Учитывая их асимптотику

$$\mu_n^{1/\alpha}=2\pi ni+(k+\beta-1)\left(\ln 2\pi|n|+\frac{\pi i}{2}\,\mathrm{sign}\,n\right)+\ln\frac{\alpha}{\Gamma(k+\beta)}+o(1),\quad n\to\pm\infty, \tag{21}$$

отметим, что при $k+\beta>1$ условие будет налагаться лишь на конечное число нулей μ_n, $n=1,2,...,n_0$ с $\mathrm{Re}\,\mu_n^{1/\alpha}<\sigma$, поскольку остальные автоматически принадлежат $\rho(B)$. В случае $k+\beta\le 1$ нулей с $\mathrm{Re}\,\mu_n^{1/\alpha}<\sigma$ будет счетное множество.

Теорема 3. *Пусть оператор B удовлетворяет условию 1, $k+\beta>1$, $\sigma>\omega$ и $u_0,\ u_1\in D(B^3)$. Если каждый нуль μ_n, $n=1,2,...,n_0$ функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ с* $\mathrm{Re}\ \mu_n^{1/\alpha}<\sigma$ *принадлежит $\rho(B)$, то задача (1)-(3) имеет единственное решение.*

□ Существование единственного решения задачи (1)-(3) (или операторного уравнения (13)) сводится к доказательству существования обратного у ограниченного оператора G, определяемого равенством (14) (или (16)). При $u_0,\ u_1\in D(B^3)$, в силу инвариантности $D(B)$ относительно ${}^{A}T_\alpha(t)$, правая часть уравнения (13) q принадлежит $D(B^3)$. Покажем, что оператор G имеет обратный оператор $G^{-1}:D(B^3)\to E$.

Поскольку каждый нуль $\mu_n^{1/\alpha}$ функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)$ с $\mathrm{Re}\ \mu_n^{1/\alpha}<\sigma$ принадлежит $\rho(B)$, то он принадлежит $\rho(B)$ вместе с некоторой круговой окрестностью Ω_n. Пусть Γ – контур на комплексной плоскости, состоящий из прямой $\mathrm{Re}\ z=\sigma>\omega$ и границ γ_n круговых окрестностей Ω_n, т.е.

$$\Gamma=\{\mathrm{Re}\ z=\sigma\}\bigcup_{Re\ \mu_n^{1/\alpha}<\sigma}\gamma_n\,.$$

Возьмем $\lambda\in\rho(B)$, $\mathrm{Re}\ \lambda>\sigma>\omega$ и рассмотрим ограниченный оператор

$$\Upsilon q=\frac{\alpha}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{z^{\alpha-1}R(z^\alpha)\,q\ dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)\,(z^\alpha-\lambda)^3},\quad \Upsilon:E\to E\,. \tag{22}$$

Отметим, что интеграл в (22) абсолютно сходится в силу выбора контура Γ, оценки (9), асимптотики (21) и известного (см. [6, с. 134]) асимптотического поведения функции Миттаг-Леффлера при $0<\alpha<2$ и $|z|\to\infty$

$$E_{\alpha,\mu}(z)=\frac{1}{\alpha}z^{(1-\mu)/\alpha}\exp\left(z^{1/\alpha}\right)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{z^{-j}}{\Gamma(\mu-\alpha j)}+O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right),\ |\arg z|\le\nu\pi,\ \nu\in(\alpha/2,\min\{1,\alpha\})\,, \tag{23}$$

$$E_{\alpha,\mu}(z)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\mu-\alpha j)\ z^j}+O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right),\quad \nu\pi\le|\arg z|\le\pi\,. \tag{24}$$

Пусть $q\in D(B)$, $\sigma<\sigma_1<\mathrm{Re}\ \lambda$. Тогда, подставляя (16) в (22) и применяя тождество Гильберта, получим

$$\Upsilon Gq=\frac{\alpha}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{z^{\alpha-1}R(z^\alpha)\ dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)\,(z^\alpha-\lambda)^3}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\xi^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(\xi)R(\xi^\alpha)\,q\ d\xi=$$

$$= \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{z^{\alpha-1}\xi^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(\xi)}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^3} \cdot \frac{R(z^\alpha)q - R(\xi^\alpha)q}{\xi^\alpha - z^\alpha} \, d\xi dz \,. \tag{25}$$

Интеграл в (25) абсолютно сходится, поэтому меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\Upsilon G q = \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1}R(z^\alpha)q \, dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^3} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{\xi^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(\xi)\, d\xi}{\xi^\alpha - z^\alpha} -$$

$$-\frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\sigma_1 - \infty}^{\sigma_1 + \infty} \xi^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(\xi)R(\xi^\alpha)q \, d\xi \int\limits_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1}\, dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^3(\xi^\alpha - z^\alpha)} \,. \tag{26}$$

Внутренний интеграл (после замены $\eta = z^\alpha$) во втором слагаемом (26) равен нулю в силу выбора контура Γ и леммы Жордана. А для вычисления интегралов в первом слагаемом, используем равенство (18), формулу (см. [1, с. 33])

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \exp(-t\xi)E_{\alpha,1}(t^\alpha z^\alpha)\, dt = \frac{\xi^{\alpha-1}}{\xi^\alpha - z^\alpha}, \quad \left|\frac{z^\alpha}{\xi^\alpha}\right| < 1 \,,$$

равенство $I^\nu E_{\alpha,1}(t^\alpha z^\alpha) = t^\nu E_{\alpha,\nu+1}(t^\alpha z^\alpha)$ $(\nu > 0)$ и лемму Жордана. Таким образом, для $q \in D(B)$, справедливо равенство

$$\Upsilon G q = \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1}R(z^\alpha)q \, dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^3} \lim_{t\to 1} I^{k+\alpha+\beta-1} \int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{\xi^{\alpha-1}\exp(\xi t)\, d\xi}{\xi^\alpha - z^\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1}R(z^\alpha)q \, dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^3} \lim_{t\to 1} I^{k+\alpha+\beta-1}E_{\alpha,1}(t^\alpha z^\alpha) =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1}R(z^\alpha)q \, dz}{(z^\alpha-\lambda)^3} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\Gamma)_\alpha} \frac{R(\eta)q \, d\eta}{(\eta-\lambda)^3} = R^3(\lambda)q \,,$$

где $(\Gamma)_\alpha$ – контур, полученный из контура Γ после замены $\eta = z^\alpha$: $z \in \Gamma$, $\eta \in (\Gamma)_\alpha$.

Коммутирующие операторы Υ, G, $R(\lambda)$ ограничены и область определения $D(B)$ плотна в E, поэтому равенство $\Upsilon G q = R^3(\lambda)q$ справедливо и для $q \in E$, $\Upsilon G : E \to D(B^3)$. Отсюда следует, что оператор $G^{-1}q = (\lambda I - B)^3 \Upsilon q$ при $q \in D(B^3)$ является обратным по отношению к G. Действительно,

$$GG^{-1}q = G(\lambda I - B)^3\Upsilon q = R^3(\lambda)(\lambda I - B)^3 q = q, \quad q \in D\left(B^3\right) \,,$$

$$G^{-1}Gq = (\lambda I - B)^3 \Upsilon G q = q, \quad q \in E.$$

Что касается решения задачи (1)-(3), то принадлежащий E элемент p имеет вид $p = (\lambda I - B)^3 \Upsilon q$, где элемент $q \in D(B^3)$ определяется равенством (15), оператор Υ – равенством (22), $\lambda \in \rho(B)$, $\operatorname{Re}\lambda > \sigma > \omega$, а для функции $u(t)$ справедливо представление

$$u(t) = {}^A T_\alpha(t) u_0 + \int\limits_1^t {}^A T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right) p \, ds\,. \quad \blacksquare$$

В случае $k + \beta \le 1$ у функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ нулей μ_n с $\operatorname{Re}\mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ будет счетное множество, поэтому мы потребуем выполнения следующего условия.

Условие 3. *Каждый нуль μ_n, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ с $Re\,\mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(B)$ и существуют $\varepsilon \in [0,1)$ и $d > 0$ такие, что*

$$\sup_{Re\,\mu_n^{1/\alpha} < \sigma} \left\| \frac{R(\mu_n)}{\mu_n^\varepsilon} \right\| \le d.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 3, $k + \beta \le 1$ *и* $u_0,\ u_1 \in D(B^3)$. *Тогда задача* (1)-(3) *имеет единственное решение.*

$\square$ Также как и в теореме 3, введем в рассмотрение оператор Υ, определяемый равенством (22). В рассматриваемом случае контур Γ содержит уже счётное множество окружностей γ_n, и для доказательства абсолютной сходимости интеграла в равенстве (22) рассмотрим интеграл по окружностям γ_n, где n достаточно большие ($|n| \ge n_0$). Пусть $(\gamma_n)_\alpha$ – контур, получаемый из γ_n после замены $\xi = z^\alpha$: $z \in \gamma_n$, $\xi \in (\gamma_n)_\alpha$. Тогда

$$\frac{\alpha}{2\pi i} \int\limits_{\bigcup \gamma_n} \frac{z^{\alpha-1} R(z^\alpha) q \, dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha - \lambda)^3} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\bigcup (\gamma_n)_\alpha} \frac{R(\xi) q \, dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\xi)(\xi - \lambda)^3} =$$

$$= \sum_{n=-\infty, |n| \ge n_0}^{+\infty} \frac{R(\mu_n) q}{E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n)(\lambda - \mu_n)^3}\,, \tag{27}$$

при этом, поскольку (см. [6, формула (1.5) на с. 118])

$$E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n) = \frac{1}{\alpha\mu_n}\left(E_{\alpha,k+\alpha+\beta-1}(\mu_n) - (k+\alpha+\beta-1) E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n)\right),$$

то, учитывая асимптотику (23) функции Миттаг-Леффлера и асимптотику (21), получим

$$E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n) = \frac{1}{\alpha\mu_n}\left(\frac{\mu_n^{(2-k-\beta)/\alpha - 1}(2\pi|n|)^{k+\beta-1}\exp\left(i\,\operatorname{Im}\,\mu_n^{1/\alpha}\right)}{\Gamma(k+\beta)} - \frac{1}{\Gamma(k+\beta-1)\mu_n} - \right.$$

$$-\frac{(k+\alpha+\beta-1)\mu_n^{(1-k-\beta)/\alpha-1}(2\pi|n|)^{k+\beta-1}\exp\left(i\ \mathrm{Im}\ \mu_n^{1/\alpha}\right)}{\Gamma(k+\beta)}+\frac{k+\alpha+\beta-1}{\Gamma(k+\beta)\mu_n}+O\left(\frac{1}{|\mu_n|^2}\right)\Bigg).$$

Таким образом,

$$E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n)=\frac{1}{\alpha\ \mu_n^{2-1/\alpha}}\left(\frac{\exp\left(i\ \mathrm{Im}\ \mu_n^{1/\alpha}\right)}{\Gamma(k+\beta)}\cdot\left(\frac{\mu_n^{1/\alpha}}{2\pi|n|}\right)^{1-k-\beta}+O\left(\frac{1}{|\mu_n|^{1/\alpha}}\right)\right). \tag{28}$$

В силу равенства (28), условия 3 и асимптотики (21) ряд (27), а, следовательно и интеграл по $\bigcup\gamma_n$, абсолютно сходятся.

Сходимость же в равенстве (22) интеграла по прямой $\mathrm{Re}z=\sigma$, очевидно, следует из неравенства Хилле-Иосиды и асимптотики (24).

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 3, мы его опускаем и доказательство теоремы 4 тем самым завершено. ■

Заметим, что в работе [5] рассмотрен случай, когда оператор B является генератором экспоненциально ограниченной C_0-полугруппы. В этом случае решение задачи (4), (2) и оператор G имеют другой вид, но условия однозначной разрешимости обратной коэффициентной задачи (1)-(3) остаются прежними.

Рассмотрим обратную коэффициентную задачу с регуляризованной дробной производной Адамара порядка $\alpha\in(0,1)$

$$^{A}\partial^{\alpha}_{a+}u(t)={}^{A}D^{\alpha}_{a+}\left(u(t)-u(a)\right)={}^{A}D^{\alpha}_{a+}u(t)-\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-\alpha}\frac{u(a)}{\Gamma(1-\alpha)},$$

вида

$$^{A}\partial^{\alpha}_{1+}u(t)=Bu(t)+(\ln t)^{k-1}p, \tag{29}$$

$$u(1)=u_0, \tag{30}$$

$$\lim_{t\to e}{}^{A}I^{\beta}_{1+}u(t)=u_1. \tag{31}$$

Учитывая формулу связи между решениями прямых задач с регуляризованной и нерегуляризованной дробными производными Адамара (см. [5])

$$^{A}S_\alpha\left(a\ \exp t\right)u_0=I^{1-\alpha\,A}T_\alpha\left(a\ \exp t\right)u_0,$$

запишем решение прямой задачи (29), (30) в виде

$$u(t)={}^{A}S_\alpha(t)u_0+\int\limits_1^t{}^{A}T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right)h(s)\ ds,$$

где

$$^{A}S_{\alpha}(t)u_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{\alpha-1}t^{\lambda}R\left(\lambda^{\alpha}\right)u_0\,d\lambda, \quad u_0\in D(B),\ \sigma>\max(0,\omega)\,,$$

при этом функция $h(t)$ должна удовлетворять условию 2.

Поскольку влияние неоднородности в случае регуляризованной дробной производной Адамара определяется тем же выражением, что и в случае нерегуляризованной дробной производной Адамара, то условия однозначной разрешимости обратной коэффициентной задачи (29)-(31) при $k\geq 1$ будут таким как и в теоремах 3 и 4.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations. Math. Studies. V.204 / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Elsevier, 2006.

3. Глушак А.В. О задаче типа Коши для неоднородного абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестник ВГУ. Серия: Физика, математика. – Воронеж, 2002. – 1. – С.121-123.

4. Arendt W., Batty C., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems / W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. – Berlin: Birkhäuser Verlag, 2001.

5. Глушак А.В., Манаенкова Т.А. Абстрактные дифференциальные уравнения с дробными производными Адамара // АМАН, 2009.

6. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966.

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR THE ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATION THAT CONTAINS HADAMAR FRACTIONAL DERIVATIVE AND UNBOUNDED OPERATOR

T.A. Manaenkova

Belgorod State University,

Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: manaenkova ta@mail.ru

Abstract. Direct and inverse Cauchy type problems with Hadamar fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$ in the Banach space is considered. It is proved the well-posed solvability of given problems with the unbounded operator. Sufficient conditions of the unique solvability are specified for the inverse problem.

Key words: operator equation, Hadamar fractional derivative, inverse coefficient problem.