УДК 517.9

ОБ УСЛОВИИ ШАПИРО-ЛОПАТИНСКОГО В ЗАДАЧЕ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В.А. Полунин, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: soldatov@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается условие Шапиро-Лопатинского краевых задач для трехмерного аналога системы Коши-Римана. Это условие обеспечивает разрешимость задачи Римана-Гильберта для эллиптических систем с частными производными первого порядка и состоит в дополнительном ограничении на матрицу краевого условия. В данной работе получен критерий, позволяющий в явном виде описать условие Шапиро-Лопатинского в терминах матрицы краевого условия и нормального вектора к граничной поверхности.

Ключевые слова: задача Римана-Гильберта, условие Шапиро-Лопатинского, система Моисила-Теодореску, эллиптические системы, граничные задачи.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим эллиптическую систему Моисила-Теодореску [1]

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) u(x) = 0\,, \tag{1}$$

где дифференциальный оператор $M(\zeta) = M(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ определяется матрицей

$$M(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ \zeta_3 & -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а $u(x) = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ – искомый вектор.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракты № П19 от 18.03.2010г., № П693 от 20.05.2010г., № 02.740.11.0613 от 29.03.2010г.)

Отметим некоторые из свойств матричного оператора в (1), которые будут использоваться в дальнейшем. Можно показать, что справедливы соотношения

$$M(\zeta)M^{\top}(\zeta) = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2, \quad \det M(\zeta) = -(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)^2, \quad \zeta_j \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

где $\top$ – символ матричного транспонирования.

Если $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 0$ и $\zeta_j, j = 1, 2, 3$, одновременно в нуль не обращаются, то ранг матрицы $M(\zeta)$ равен двум. Действительно, если $\zeta_1 \neq 0$, то первые две строки $M(\zeta)$ линейно независимы, а третья и четвертая строки являются их линейной комбинацией. Аналогично, при $\zeta_2 \neq 0$ первая и третья строки $M(\zeta)$ образуют линейно независимую систему.

Если же $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 \neq 0$, тогда из (2) следует, что $M(\zeta)$ обратима. При этом обратная $M^{-1}(\zeta)$ и присоединенная $M^{*}(\zeta)$ матрицы имеют вид

$$M^{-1}(\zeta) = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)^{-1} M^{\top}(\zeta), \quad M^{*}(\zeta) = -(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2) M^{\top}(\zeta). \tag{3}$$

В ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей Γ для этой системы (1) ставится задача Римана-Гильберта

$$B(y)u^{+}(y) = f(y), \quad y \in \Gamma, \tag{4}$$

где $B = B(y)$ – заданная на Γ непрерывная 2×4 матрица ранга 2,

$$u^{+}(y) = \lim_{x \to y} u(x), \quad y \in \Gamma, \ x \in D,$$

и $f(y)$ – заданный на Γ непрерывный двухкомпонентный вектор. В этой задаче требуется найти решение $u(x) \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$ системы (1), удовлетворяющее краевому условию (4).

Как известно, условие Шапиро – Лопатинского (условие дополнительности) [2] обеспечивает фредгольмовость задачи (1), (4). Оно представляет собой дополнительное ограничение на матрицу B в (4) и состоит в следующем.

Пусть $\xi = \xi(y)$ и $n = n(y)$, соответственно, касательный и единичный нормальный векторы к поверхности Γ в фиксированной точке y. В силу (2)

$$\det M(\xi + zn) = -(z^2 + |\xi|^2)^2, \quad z \in \mathbb{C},$$

и, следовательно, уравнение $\det M(\xi + zn) = 0$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ имеет один корень $z = i|\xi|$ кратности 2. Тогда условие дополнительности считается выполненным, если для любого ненулевого вектора ξ, касательного к Γ в точке $y \in \Gamma$ и каждого вектора – строки $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ соотношение

$$\lambda B M^{*}(\xi + zn) \equiv 0 \bmod (z - i|\xi|)^2 \tag{5}$$

для многочленов переменной z влечет $\lambda = 0$.

При фиксированном $y \in \Gamma$ условие (5) зависит только от матрицы $B = B(y)$ и нормали $n = n(y)$ к поверхности Γ в точке y. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ единичную сферу S и множество $\mathcal{D}$ – множество нормалей $n \in S$, для которых условие (5) выполнено для заданной матрицы $B = B(y)$. Очевидно, что это множество симметрично, то есть вместе с n ему принадлежит и $-n$.

Пусть $b^{kj} = b_{1k}b_{2j} - b_{1j}b_{2k}$ означают соответствующие миноры второго порядка матрицы B, которые занумеруем $\alpha_1 = b^{12}, \alpha_2 = b^{13}, \alpha_3 = b^{14}, \alpha_4 = b^{23}, \alpha_5 = b^{24}, \alpha_6 = b^{34}$. В этих обозначениях рассмотрим вектор $s = (s_1, s_2, s_3)$ с компонентами

$$s_1 = \alpha_1 + \alpha_6, \quad s_2 = \alpha_2 - \alpha_5, \quad s_3 = \alpha_3 + \alpha_4\,, \tag{6}$$

и две симметрические 3×3 матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2\alpha_6 & -\alpha_2 + \alpha_5 & -\alpha_3 - \alpha_4 \\ -\alpha_2 + \alpha_5 & 2\alpha_1 & 0 \\ -\alpha_3 - \alpha_4 & 0 & 2\alpha_1 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 2\alpha_2 & -\alpha_1 - \alpha_6 & 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_6 & 2\alpha_5 & -\alpha_3 - \alpha_4 \\ 0 & -\alpha_3 - \alpha_4 & 2\alpha_2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Обозначим через $S_j(n)$ множество всех векторов $\xi \in S$, ортогональных векторам $A_j n$ и n. Заметим, что если векторы $A_j n$ и n линейно независимы, то множество $S_j(n)$ состоит из двух элементов $\pm\nu/|\nu|$, где ν есть векторное произведение $[A_j n, n]$. В противном случае, n есть собственный вектор матрицы A_j и множество $S_j(n)$ является окружностью в плоскости, ортогональной к вектору n.

Лемма 1. *Вектор s с компонентами (6) отличен от нуля в каждой точке $y \in \Gamma$.*

$\square$ Предположим противное, то есть в условиях леммы вектор $s = 0$. Пусть $B_{(k)} = (b_{1k}, b_{2k})$ означает k-й столбец матрицы B. Тогда, в наших обозначениях, для некоторого $1 \le j \le 6$ можно записать $\alpha_j = \det(B_{(k)}, B_{(s)})$, $1 \le k < s \le 4$. По условию ранг матрицы B равен двум, так что $\alpha_j \neq 0$ для некоторого j и, следовательно, существует обратная матрица $C = (B_{(k)}, B_{(s)})^{-1}$.

По аналогии с введенным обозначениям α_j будем обозначать через α'_j соответствующие миноры матрицы $B' = CB$. Тогда, с одной стороны, $\alpha'_j = \det(CB_{(k)}, CB_{(s)}) = \alpha_j \det C$ и предположение $s = 0$ переходит в условие $s' = 0$ для вектора s' с компонентами $s'_1 = \alpha'_1 + \alpha'_6$, $s'_2 = \alpha'_2 - \alpha'_5$, $s'_3 = \alpha'_3 + \alpha'_4$. С другой стороны, в силу выбора матрицы C столбцы матрицы B' для некоторых $1 \leq k < s \leq 4$ примут вид $B'_{(k)} = (1, 0)$, $B'_{(s)} = (0, 1)$.

По условию α_j одновременно в нуль не обращаются. Пусть $\alpha_1 \neq 0$, тогда $\alpha'_1 = 1$, $\alpha'_2 = x_2$, $\alpha'_3 = y_2$, $\alpha'_4 = -x_1$, $\alpha'_5 = -y_1$, $\alpha'_6 = x_1 y_2 - x_2 y_1$, где

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения $\alpha'_1 + \alpha'_6 = \alpha'_3 + \alpha'_4 = \alpha'_2 - \alpha'_5 = 0$ приводят к противоречию $x_1^2 + x_2^2 = -1$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что получится такой же результат и в случаях $\alpha_j \neq 0$, $2 \leq j \leq 6$. ■

Рассмотрим подробнее множество нормалей $\mathcal{D}$ для которых выполнено условие (5).

Лемма 2. *Пусть вектор нормали $n = (n_1, n_2, n_3) \in S$ и $n_1 \neq 0$. Тогда $n \in \mathcal{D}$ в том и только том случае, когда выполнено условие*

$$(A_1\xi, \xi) \neq (A_1 n, n), \quad \text{при} \quad \xi \in S_1(n). \tag{8}$$

Если $n_1 = 0$, то вектор $n \in \mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда

$$(A_1\xi, \xi) \neq (A_1 n, n), \quad \text{при} \quad \xi \in S_1(n),\ \xi_1 \neq 0, \tag{9}$$

$$(A_2\xi, \xi) \neq (A_2 n, n), \quad \text{при} \quad \xi \in S_2(n),\ \xi_1 = 0. \tag{10}$$

□ Пусть b_1 и b_2 означают, соответственно, первый и второй вектор – столбцы матрицы $B^\top$. С учетом соотношений (3) выражение (5) примет вид

$$(z + i|\xi|)\lambda B M^\top(\xi + zn) = P(z)(z - i|\xi|), \quad z \in \mathbb{C}$$

с некоторым полиномом $P(z)$. Полагая в последнем $z = i|\xi|$, получим эквивалентное соотношению (5) условие: для любого единичного вектора ξ, касательного к Γ в точке y и каждого вектора-строки $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ соотношение $\lambda B M^\top(\xi + in) = 0$ влечет $\lambda = 0$. Это означает, что ранг матрицы $M(\xi + in)B^\top$ равен двум, то есть равенство

$$\lambda_1 M(\zeta) b_1 + \lambda_2 M(\zeta) b_2 = M(\zeta)(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = 0, \quad \zeta = \xi + in,$$

возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Таким образом, соотношение (5) эквивалентно условию:

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \in \ker M(\zeta), \tag{11}$$

что влечет $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Для дальнейшего изучения (11) найдем размерность и базис $\ker M(\zeta)$. Так как по условию $|\xi| = |n| = 1$ и $\zeta_j = \xi_j + in_j$, получим $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 0$. Тогда, в силу равенств (2), имеем $M(\zeta)M^\top(\zeta) = 0$. Следовательно, вектор-столбцы матрицы $M^\top(\zeta)$, или, что равносильно, вектор-строки матрицы $M(\zeta)$ принадлежат $\ker M(\zeta)$. Кроме того, как было отмечено выше, при условии $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 0$ ранг матрицы $M(\zeta)$ равен двум. Это означает, что базис $\ker M(\zeta)$ состоит из двух линейно независимых вектор-строк матрицы $M(\zeta)$, которые обозначим $c_1 = c_1(\zeta)$, $c_2 = c_2(\zeta)$. Поэтому условие (11) означает линейную независимость векторов b_1, b_2, c_1, c_2.

Так как $|\xi| = |n| = 1$, то комплексные числа $\zeta_j = \xi_j + in_j$, $j = 1, 2, 3$, одновременно в нуль не обращаются. При $\zeta_1 \neq 0$ базис c_1 и c_2 представляет собой, соответственно, первую и вторую вектор-строки матрицы $M(\zeta)$. Поэтому линейная независимость векторов b_1, b_2, c_1, c_2 означает, что

$$h_1(\zeta) = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \zeta_1 \neq 0.$$

В случае $\zeta_2 \neq 0$ базис c_1, c_2 – есть первая и третья вектор-строки матрицы $M(\zeta)$, так что

$$h_2(\zeta) = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \end{pmatrix} \neq 0\,, \quad \zeta_2 \neq 0\,.$$

Тогда с использованием теоремы Лапласа [3], получим

$$h_1(\zeta) = -b^{34}\zeta_1^2 + b^{12}\zeta_2^2 + b^{12}\zeta_3^2 + (b^{24} - b^{13})\zeta_1\zeta_2 - (b^{14} + b^{23})\zeta_1\zeta_3\,,$$

$$h_2(\zeta) = b^{13}\zeta_1^2 + b^{24}\zeta_2^2 + b^{13}\zeta_3^2 - (b^{12} + b^{34})\zeta_1\zeta_2 - (b^{14} + b^{23})\zeta_2\zeta_3\,.$$

Выражения в правых частях последних равенств представляют собой квадратичные формы относительно $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ с матрицами A_j, которые определены в (7), так что можно записать $h_j(\zeta) = (A_j\zeta, \zeta)$, где $(\cdot\,, \cdot)$ означает стандартное скалярное произведение. С учетом последнего условие (10) эквивалентно следующему: вектор $n \in \mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда для $\zeta = \xi + in$, $\xi \perp n$ справедливы соотношения

$$(A_1\zeta, \zeta) \neq 0, \quad \text{если} \quad \zeta_1 \neq 0\,, \tag{12}$$

$$(A_2\zeta, \zeta) \neq 0, \quad \text{если} \quad \zeta_1 = 0\,, \tag{13}$$

в которых учтено, что $\zeta_1 = 0$ влечет $\zeta_2 \neq 0$. В силу симметричности матриц A_j имеем

$$(A_j\zeta, \zeta) = (A_j\xi, \xi) - (A_j n, n) + 2i(A_j n, \xi)\,.$$

Если $n_1 \neq 0$, то для произвольного вектора $\xi \in S_1(n)$ из (12) следует условие (8). Пусть $n_1 = 0$, тогда в силу условия (12) либо $\xi_1 \neq 0$ и имеем условие (9), либо $\xi_1 = 0$, тогда из (13) следует условие (10). Таким образом, условие $n = (0, n_2, n_3) \in \mathcal{D}$ описывается соотношениями (9) и (10) на двух непересекающихся множествах точек $\xi \in S_j(n)$, $j = 1, 2$. ■

На основании леммы 2 сформулируем основной результат данной работы в терминах вектора s с компонентами (6).

Теорема. *Вектор* $n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathcal{D}$ *тогда и только тогда, когда* $(s, n) \neq 0$

□ Рассмотрим подробнее условия (8)-(10) леммы 2.

Покажем, что при $n_1 \neq 0$ условие (8) равносильно тому, что либо $\nu = [A_1 n, n] = 0$, либо

$$|\nu|^2 (A_1 n, n) \neq (A_1\nu, \nu), \quad \nu \neq 0\,. \tag{14}$$

Пусть $\nu = 0$, то есть n является собственным вектором матрицы A_1. Рассмотрим сначала случай, когда

$$(\alpha_2 - \alpha_5)^2 + (\alpha_3 + \alpha_4)^2 \neq 0\,. \tag{15}$$

Обозначим через λ_0 и $\lambda_\pm$ собственные значения матрицы A_1. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид

$$\det(\lambda - A) = (\lambda - 2\alpha_1)(\lambda^2 + 2(\alpha_6 - \alpha_1)\lambda - 4\alpha_1\alpha_6 - (\alpha_3 + \alpha_4)^2 - (\alpha_2 - \alpha_5)^2) = 0\,.$$

и, следовательно, собственные значения выражаются равенствами

$$\lambda_0 = 2\alpha_1, \quad \lambda_\pm = \alpha_1 - \alpha_6 \pm \Delta\,,$$

где $\Delta = \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_6)^2 + (\alpha_5 - \alpha_2)^2 + (\alpha_3 + \alpha_4)^2}$, при этом, в силу (15), имеем $\lambda_- < \lambda_0 < \lambda_+$.

Рассмотрим ортонормированный базис e_0 и $e_\pm$ собственных векторов матрицы A_1, отвечающих собственным значениям λ_0 и $\lambda_\pm$. Непосредственно можно убедиться, что $e_0 = \nu_0/|\nu_0|$, $e_\pm = \nu_\pm/|\nu_\pm|$, где

$$\nu_0 = (0, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_5 - \alpha_2)\,, \quad \nu_\pm = (-\alpha_1 - \alpha_6 \pm \Delta, \alpha_5 - \alpha_2, -\alpha_3 - \alpha_4)\,. \tag{16}$$

Если $n = e_+$, то для любого $\xi = x_- e_- + x_0 e_0$, $x_-^2 + x_0^2 = 1$, условие (8) принимает вид $(A_1\xi, \xi) \neq (A_1 e_+, e_+)$ или $x_-^2\lambda_- + x_0^2\lambda_0 \neq \lambda_+$, и, в силу (15), выполнено. Аналогично можно показать, что (8) выполнено и для $n = e_-$. Если $n = e_0$, то (8) нарушено, так как не выполнено условие $n_1 \neq 0$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда условие (15) не выполнено, то есть когда $\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_5 = 0$. В этом случае собственные значения λ_0, $\lambda_\pm$ и отвечающие им собственные векторы e_0, $e_\pm$ матрицы A_1 определяются равенствами

$$\lambda_0 = -2\alpha_6, \ \lambda_\pm = 2\alpha_1, \quad e_0 = (1, 0, 0),$$

а e_-, e_+ – произвольный ортонормированный базис в плоскости $x_1 = 0$.

Для $n = e_-$, $n = e_+$ не выполнено условие $n_1 \neq 0$, поэтому остается рассмотреть $n = e_0$. В этом случае для любого $\xi = x_- e_- + x_+ e_+$, $x_-^2 + x_+^2 = 1$, условие (8) равносильно соотношению $x_-^2\lambda_- + x_+^2\lambda_+ \neq \lambda_0$ или $\alpha_1 + \alpha_6 \neq 0$, и, в силу леммы 1 всегда выполнено.

Пусть теперь $\nu \neq 0$, то есть множество $S_1(n)$ состоит из двух элементов $\pm\nu/|\nu|$. Подставляя $\xi = \pm\nu/|\nu|$ в неравенство (8) получим соотношение (14).

Перейдем теперь к рассмотрению условий (9) и (10) леммы 2. Покажем, что при выполнении (15) вектор $n \in \mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда

$$n_3(\alpha_3 + \alpha_4) \neq n_2(\alpha_5 - \alpha_2), \quad 2(\alpha_2 - \alpha_5)n_2 n_3 = (\alpha_3 + \alpha_4)(n_2^2 - n_3^2). \tag{17}$$

В предположении (15) рассмотрим сначала условие (9) леммы 2. Пусть сначала $\nu = [A_1 n, n] \neq 0$, тогда для любого $\xi = \pm\nu/|\nu|$ имеем $\xi_1 = 0$, и, следовательно, условие (9) не выполнено. Пусть теперь $\nu = 0$, то есть n является собственным вектором матрицы A_1. В силу (16) остается рассмотреть $n = e_0$. Тогда для любого $\xi = x_- e_- + x_+ e_+$, $x_-^2 + x_+^2 = 1$, вектор $n \notin \mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда

$$x_-^2\lambda_- + x_+^2\lambda_+ = \lambda_0, \quad \text{при} \quad x_-(e_-)_1 + x_+(e_+)_1 \neq 0,$$

где $(e_\pm)_1$ означают первые компоненты векторов $e_\pm$. Последние соотношения несовместны, так как

$$x_\pm = \sqrt{\frac{\Delta \pm (\alpha_1 + \alpha_6)}{2\Delta}}, \quad (e_\pm)_1 = \frac{-(\alpha_1 + \alpha_6) \pm \Delta}{\sqrt{2\Delta(\Delta \mp (\alpha_1 + \alpha_6))}},$$

и, следовательно, $x_-(e_-)_1 + x_+(e_+)_1 = 0$. Таким образом $n \in \mathcal{D}$ равносильно $n \neq e_0$.

Пусть теперь условие (15) не выполнено, то есть $\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_5 = 0$. Тогда условие (9) можно проверить непосредственно. Поскольку $|\xi| = 1$, имеем $(A_1\xi, \xi) = 2\alpha_1 - 2(\alpha_1 + \alpha_6)\xi_1^2$.

С учетом этого (9) примет вид $(\alpha_1+\alpha_6)\xi_1^2 \neq 0$, и, следовательно, выполнено, поскольку числа $\alpha_1+\alpha_6$, $\alpha_2-\alpha_5$, $\alpha_3+\alpha_4$ одновременно в нуль не обращаются.

Рассмотрим теперь условия (10). Предположим сначала, что выполнено условие (15). Пусть $\widetilde{\xi}=(\xi_2,\xi_3)$, $\widetilde{n}=(n_2,n_3)$ означают единичные векторы и рассмотрим диагональный блок матрицы A_2

$$\widetilde{A}_2=\begin{pmatrix} 2\alpha_5 & -\alpha_3-\alpha_4 \\ -\alpha_3-\alpha_4 & 2\alpha_2 \end{pmatrix},$$

Так как в нашем случае $\xi_1=n_1=0$, то условие (10) можно переписать в форме

$$(\widetilde{A}_2\widetilde{\xi},\widetilde{\xi}) \neq (\widetilde{A}_2\widetilde{n},\widetilde{n}) \quad \text{при} \quad (\widetilde{A}_2\widetilde{n},\widetilde{\xi})=(\widetilde{n},\widetilde{\xi})=0\,. \tag{18}$$

Если $\widetilde{A}_2\widetilde{n}$ и $\widetilde{n}$ линейно независимы, то из (18) следует $\widetilde{\xi}=0$, что невозможно. Поэтому $\widetilde{n}$ должен быть собственным вектором матрицы $\widetilde{A}_2$. Характеристическое уравнение этой матрицы

$$(\widetilde{\lambda}-2\alpha_5)(\widetilde{\lambda}-2\alpha_2)-(\alpha_3+\alpha_4)^2=0$$

имеет корни

$$\widetilde{\lambda}_\pm=\alpha_2+\alpha_5\pm\sqrt{(\alpha_2+\alpha_5)^2+(\alpha_3+\alpha_4)^2}\,,$$

и, в предположении (15), имеем $\widetilde{\lambda}_+\neq\widetilde{\lambda}_-$.

Пусть $\widetilde{e}_-$ и $\widetilde{e}_+$ означают ортонормированный базис собственных векторов матрицы A_1, отвечающих собственным значениям $\widetilde{\lambda}_\pm$. Тогда возможны два случая. Если $\widetilde{n}=\widetilde{e}_+$, то $\widetilde{\xi}=\widetilde{e}_-$ и (18) равносильно $\widetilde{\lambda}_+\neq\widetilde{\lambda}_-$. Аналогично рассматривается случай $\widetilde{n}=\widetilde{e}_-$. Поэтому, в предположении (15) условия (10) всегда выполнены. Таким образом, вектор $n\in\mathcal{D}$ равносильно тому, что векторы $\widetilde{A}_2\widetilde{n}$ и $\widetilde{n}$ коллинеарны.

В случае $\alpha_2=\alpha_5$, $\alpha_3+\alpha_4=0$, условия (18) легко проверить непосредственно. В этом случае матрица $\widetilde{A}_2$ скалярна и (18) принимает вид

$$2\alpha_2(\xi_2^2+\xi_3^2-n_2^2-n_3^2)\neq 0\,,\quad \xi_2n_2+\xi_3n_3=0\,.$$

Поскольку $\xi_2^2+\xi_3^2=n_2^2+n_3^2=1$, условия (18) нарушены.

В действительности рассмотренные выше случаи сводятся к одному условию $(s,n)\neq 0$.

Покажем сначала, что условия $n_1\neq 0$, $\nu=0$ и $(s,n)\neq 0$ равносильны. Для этого выпишем компоненты векторного произведения $\nu=[A_1n,n]$ в терминах $s=(s_j)$

$$\nu_1=-n_1[s,n]_1,\quad \nu_2=n_3(s,n)-n_1[s,n]_2\,,\quad \nu_3=-n_2(s,n)-n_1[s,n]_3\,, \tag{19}$$

где $[s,n]_j$, $j=1,2,3$ означают компоненты векторного произведения $[s,n]$. Предположим противное, то есть $(s,n)=0$. Тогда из (19) следует, что $[s,n]_j=0$. Так как $n\in S$, то система равенств $(s,n)=0$, $[s,n]=0$ несовместна. Последнее означает, что $(s,n)\neq 0$.

Обратимся теперь к условию (14). Непосредственной проверкой можно убедиться, что для любого $\xi\in S$ имеет место $(A_1\xi,\xi)=-2\xi_1(s,\xi)+2\alpha_1$. По условию $n_1\neq 0$, так что с учетом предыдущего замечания и выражения для ν_1 в (19), условие (14) перепишем в виде

$$|\nu|^2(s,n)\neq(s_3n_2-s_2n_3)(s,\nu)\,.$$

Последнее неравенство, с учетом того, что $(s,\nu)=(s,n)(s_2n_3-s_3n_2)$, примет вид

$$(s,n)(|\nu|^2+(s_2n_3-s_3n_2)^2)\neq 0\,.$$

По условию $\nu\neq 0$, так что имеем $(s,n)\neq 0$.

Рассмотрим теперь условие (17), которое в наших обозначениях примет вид

$$s_3n_3\neq -s_2n_2,\quad 2s_2n_2n_3=s_3(n_2^2-n_3^2)\,,\quad s_2^2+s_3^2\neq 0,\ n_1=0\,.$$

и покажем, что оно равносильно $(s,n)\neq 0$. Предположим противное, то есть $(s,n)=0$, или $s_2n_2+s_3n_3=0$. Так как по условию компоненты n_2,n_3 одновременно в нуль не обращаются, то можно считать $n_2\neq 0$. Тогда $s_2=-s_3n_3/n_2$ и (17) равносильно $s_2=s_3=0$, что противоречит условию (15). Последнее завершает доказательство теоремы. ■

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.И. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II // Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – 17. – P.35-92.

3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1968. – 432с.

ABOUT THE SHAPIRO-LOPATINSKII CONDITION IN THE RIEMANN-GILBERT PROBLEM OF THE FIRST ORDER ELLIPTIC SYSTEM

V.A. Polunin, A.P. Soldatov

Belgorod State University,

Pobedy st., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: soldatov@bsu.edu.ru

Abstract. The Shapiro-Lopatinski condition of boundary problems is reexamined for the three-dimensional analogue of the Koshi-Riemann system. It is the condition that provides the solvability of the Riemann-Gilbert problem of first-order elliptic systems with partial derivatives and it consists of the additional restriction of the boundary condition matrix. In present work it is obtained the criterion allowing to describe the Shapiro-Lopatinski condition in the explicit form. It is done in terms of the boundary condition matrix and the vector being normal to the boundary surface.

Key words: the problem of Riemann-Gilbert, the condition of Shapiro-Lopatinski, system of Moisil-Theodoresco, elliptic systems, scope problems.