УДК 517.956

ВЗАИМНО-СОПРЯЖЁННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА

Т.Т. Шерияздан

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова,

пр. Абылхайырхана, Актобе, 030000, Казахстан, e-mail: talgatsher72@inbox.ru

Аннотация. В работе исследованы взаимно-сопряженные краевые задачи с отходом от характеристики для многомерного уравнения Чаплыгина.

Ключевые слова: краевая задача, сферические функции, характеристика, многомерные уравнения.

При исследовании смешанной задачи M в [1,2], для уравнения колебания струны изучалась краевая задача с отходом от характеристики, где обращено внимание на важность исследования таких задач для гиперболических уравнений. Для вырождающихся гиперболических уравнений эта задача на плоскости рассмотрена в [3,4]. Однако, многомерные задачи с отходом от характеристики не изучены.

1. Постановка задач и результаты

Пусть D_β – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная плоскостью $t = 0$ и при $t > 0$ коническими поверхностями

$$K_0: \ \ r = \int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi, \quad 0 \le r \le r_0, \quad 0 < r_0 = \text{const} < \frac{1}{2},$$

$$K_\beta: \qquad \beta(r - r_0) + r_0 = \int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi, \quad r_0 \le r \le r_1,$$

$$K_1: \qquad r = 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi, \quad 0 \le t \le t_0, \quad r_1 \le r \le 1,$$

где $r = |x|$ – длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$, а $0 < \beta = \text{const} < 1$, $r_1 = \dfrac{(1 - r_0 + r_0\beta)}{(1+\beta)}$, $t_0 : \dfrac{1}{2} = \int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S, S_0, S_β, S_1 соответственно.

В области D_β рассмотрим многомерное уравнение Чаплыгина

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u - u_{tt} = 0\,, \tag{1}$$

где $g(t) > 0$ при $t > 0$ и $g(0) = 0$, $g(t) \in C([0,t_0]) \cap C^2((0,t_0))$, Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$.

В качестве многомерных аналогов краевых задач с отходом от характеристики рассмотрим следующие

Задача 1. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\bar{D}_\beta \cap C^2(D_\beta))$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(x)\,, \quad u|_{S_0} = \sigma_0(x)\,, \quad u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x)\,, \tag{2}$$

или

$$u_t|_S = \tau(x)\,, \quad u|_{S_0} = \sigma_0(x)\,, \quad u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x)\,. \tag{3}$$

Задача 2. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\bar{D}_\beta \cap C^2(D_\beta))$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_S = \tau(x)\,, \quad v|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x)\,, \quad u|_{S_1} = \sigma_1(x)\,, \tag{4}$$

или

$$v_t|_S = \tau(x)\,, \quad v|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x)\,, \quad u|_{S_1} = \sigma_1(x)\,. \tag{5}$$

Как отмечено в [4] сформулированные задачи возникают при исследовании трансзвуковых проблем.

В дальнейшем, нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

Пусть Ω – проекция области D на плоскость (r, t) с границами

$$\begin{aligned}
\Gamma \;&:\; t = 0\,, \quad 0 \leq r \leq 1\,,\\
\Gamma_0 \;&:\; r = \int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi\,, \quad 0 \leq r \leq r_0\,,\\
\Gamma_\beta \;&:\; \beta(r - r_0) + r_0 = \int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi\,, \quad r_0 \leq r \leq r_1\,,\\
\Gamma_1 \;&:\; r = 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi\,, \quad 0 \leq t \leq t_0\,, \quad r_1 \leq r \leq 1\,;
\end{aligned}$$

$\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, ...$ – пространства Соболева.

Имеет место (см. [5])

Лемма. *Пусть $f(r,\theta) \in W^l_2(S)$. Если $l \geqslant m-1$. Функция $f(r,\theta)$ представляется рядом*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta)\,. \qquad (6)$$

Этот ряд, а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\bar\tau^k_n(r)$, $\bar\nu^k_n(r)$, $\bar\sigma^k_{0n}(r)$, $\bar\sigma^k_{\beta n}(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (6) соответственно функций $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma_0(r,\theta)$, $\sigma_\beta(r,\theta)$.

Введём множество функций

$$B^l(S) = \Bigg\{ f(r,\theta) \,:\, f \in W^l_2(S),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left(\|f^k_n(r)\|^2_{C^2((0,1))} + \|f^k_n(r)\|^2_{C([0,1])}\right)\exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty\,, \quad l > m-1 \Bigg\}\,.$$

Пусть $\tau(r,\theta) = r^3\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) = r^3\nu^*(r,\theta)$, $\sigma_0(r,\theta) = r^2\sigma^*_0(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $\nu^*(r,\theta) \in B^l(S)$, $\sigma^*_0(r,\theta) \in B^l(S_0)$, $\sigma^*_\beta(r,\theta) \in B^l(S_\beta)$.

Тогда справедливы:

Теорема 1. *Задача 1 имеет бесчисленное множество решений.*

Теорема 2. *В классе $C(\bar D_\beta \cap C^2(D_\beta))$ решение задачи 2 единственно.*

2. Доказательство теоремы 1

Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение 1 имеет вид [5]

$$g(t)u_{rr} + \frac{m-1}{r}g(t)u_r - \frac{g(t)}{r^2}\delta u - u_{tt} = 0\,, \qquad (7)$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \quad g_1 = 1\,, \quad g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2\,,\ j > 1\,.$$

Искомое решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta)\,, \tag{8}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению. Подставляя (8) в (7), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ (см. [5]), получим

$$g(t)\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}g(t)\bar{u}_{nr}^k-\bar{u}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\bar{u}_n^k=0\,,\quad \lambda_n=n(n+m-2),\ k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,\ldots. \tag{9}$$

При этом краевые условия (2),(3), с учетом утверждения леммы, соответственно запишутся в виде

$$\begin{gathered}\bar{u}_n^k|_{\Gamma}=\bar{\tau}_n^k(r)\,,\quad 0\le r\le 1\,,\qquad \bar{u}_n^k|_{\Gamma_0}=\bar{\sigma}_{0n}^k(r)\,,\ 0\le r\le r_0\,,\\ \bar{u}_n^k|_{\Gamma_\beta}=\bar{\sigma}_{\beta n}^k(r)\,,\ 0\le r\le r_1\,,\qquad k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,\ldots;\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\bar{u}_{nt}^k|_{\Gamma}=\bar{\nu}_n^k(r)\,,\quad 0\le r\le 1\,,\quad \bar{u}_n^k|_{\Gamma_0}=\bar{\sigma}_{0n}^k(r),\ 0\le r\le r_0\,,\\ \bar{u}_n^k|_{\Gamma_\beta}=\bar{\sigma}_{\beta n}^k(r)\,,\ 0\le r\le r_1\,,\ k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,\ldots.\end{gathered} \tag{11}$$

Произведя в (9) замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r$, $y=\left(\frac{3}{2}\int\limits_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi\right)^{\frac{2}{3}}$, получим

$$yu_{nrr}^k-u_{nyy}^k+\frac{\overline{\lambda}_n y}{r^2}u_n^k-b(y)u_{ny}^k=0\,, \tag{12}$$

$$\overline{\lambda}_n=\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4},\quad b(y)=\frac{1}{2g}\left[\frac{dg}{dy}-\frac{g}{y}\right].$$

Полагая $u_n^k=\omega_n^k\exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(\xi)d\xi\right]$, уравнение (12) приводим к виду

$$y\omega_{nrr}^k-\omega_{nyy}^k+\frac{\overline{\lambda}_n y}{r^2}\omega_n^k=c(y)\omega_n^k\,, \tag{13}$$

$$c(y)=-\frac{1}{4}(b^2+2b'_y)\in C(y>0)\,.$$

Уравнение (13), в свою очередь, с помощью замены переменных $r=r$, $x_0=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ переходит в уравнение

$$\omega_{nrr}^k-\omega_{nx_0x_0}^k-\frac{1}{3x_0}\omega_{nx_0}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\omega_n^k=g_n^k(r,x_0)\,, \tag{14}$$

$$g_n^k(r,x_0) = \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} c\left[\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\omega_n^k\left(r, \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right).$$

При этом краевые условия (10), (11) запишутся в виде

$$\begin{gathered} \omega_n^k(r,0) = \tau_n^k(r)\,, \qquad\qquad \omega_n^k(r,r) = \sigma_{0n}^k(r)\,, \\ \omega_n^k(r,\beta(r-r_0)+r_0) = \sigma_{\beta n}^k(r)\,, \quad k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,...,\quad 0\leqslant r\leqslant 1\,; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \lim_{x_0\to 0} x_0^{1/3}\frac{\partial}{\partial x_0}w_n^k = \nu_n^k(r)\,,\ 0<r<1,\ \ \omega_n^k(r,r) = \sigma_{0n}^k(r)\,, \\ \omega_n^k(r,\beta(r-r_0)+r_0) = \sigma_{\beta n}^k(r)\,, \qquad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots,\ 0\leqslant r\leqslant 1\,; \end{gathered} \tag{16}$$

$$\tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\,\overline{\tau}_n^k(r)\,,\quad \nu_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\,\overline{\nu}_n^k(r)\,,$$

$$\sigma_{0n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\,\overline{\sigma}_{\beta n}^k(r)\,,\quad \sigma_{0n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\,\overline{\sigma}_{\beta n}^k(r)\,.$$

Наряду с уравнением (14) рассмотрим уравнение

$$L_\alpha\omega_{\alpha,n}^k \equiv \omega_{\alpha,nrr}^k - \omega_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0}\omega_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\omega_{\alpha,n}^k = g_{\alpha,n}^k(r,x_0)\,, \tag{17a}$$

$$L_0\omega_{0,n}^k \equiv \omega_{0,nrr}^k - \omega_{0,nx_0x_0}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\omega_{0,n}^k = g_{0,n}^k(r,x_0)\,, \tag{17b}$$

$$g_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha} c\left[\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\omega_{\alpha,n}^k\left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right],$$

$$g_{0,n}^k(r,x_0) = c\,(x_0)\,\omega_{0,n}^k\,(r,x_0)\,,\quad 0<\alpha=\mathrm{const}<1\,.$$

Уравнение (14) совпадает с $(17a)$ при $\alpha = \frac{1}{3}$.

Как показано в [6, 7], имеет место следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений $(17a)$ и $(17b)$.

Утверждение 1. *Если $\omega_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ – решение задачи Коши для уравнения $(17b)$, удовлетворяющее условию*

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r,0) = \tau_n^k(r),\quad \frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{18}$$

то функция

$$\omega_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) = \gamma_\alpha\int\limits_0^1 \omega_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi \equiv \frac{\gamma_\alpha}{2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{\omega_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{19}$$

при $\alpha > 0$ *есть решение уравнения* $(17a)$ *с условиями* (18).

Утверждение 2. *Если* $\omega_{0,n}^{k,1}(r, x_0)$ *является решением задачи Коши для уравнения* (17_0), *удовлетворяющее условиям*

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r,0) = \frac{v_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\,\omega_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0\,, \tag{18a}$$

то при $0 < \alpha < 1$ *функция*

$$\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0) = \gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q \left[x_0^{1-\alpha+2q}\int\limits_0^1 \omega_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right] \equiv$$

$$\equiv \gamma_{2-k+2q}2^{q-1}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{\omega_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right]$$

является решением уравнения $(17a)$ *с начальными данными*

$$\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0, \quad \lim_{x_0\to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0}\,\omega_{\alpha,n}^{k,2} = \nu_n^k(r), \tag{20}$$

где $\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\alpha}{2})\gamma_\alpha = 2\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, D_{ot}^α – оператор Римана-Лиувилля (см. [8]), а $q \geqslant 0$ – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q \geqslant m-1$. При этом функции $g_{\alpha,n}^k(r,x_0)$, $g_{0,n}^k(r,x_0)$ связаны формулами (19) в случае утверждения 1 и (20) в случае утверждения 2.

Сначала рассмотрим задачи $(17b)$, (15) и $(17b)$, (16), где первое условие заменено условием $\dfrac{\partial}{\partial x_0}\,w_n^k = \nu_n^k(r)$. Произведя замену переменной по формуле $\xi = \dfrac{(r+x_0)}{2}$, $\eta = \dfrac{(r-x_0)}{2}$, эти задачи запишем в виде:

$$Lv_n^k = v_{n\xi\eta}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2}v_n^k = c(\xi-\eta)v_n^k(\xi,\eta)\,, \tag{22}$$

$$\begin{gathered} v_n^k(\xi,\xi) = \tau_n^k(\xi)\,,\ 0 \le \xi \le \tfrac{1}{2}\,, \qquad v_n^k(\xi,0) = \sigma_{0n}^k(\xi)\,,\ 0 \le \xi \le \xi_0 = r_0\,, \\ v_n^k(\xi,\gamma(\xi-\xi_0)) = \sigma_{\beta n}^k(\xi)\,,\ \xi_0 \le \xi \le \tfrac{1}{2}\,,\quad k = \overline{1,k_n}\,,\ n = 0,1,...; \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial v_n^k}{\partial \xi} - \frac{\partial v_n^k}{\partial \eta}\right)|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\xi)\,, \qquad v_n^k(\xi,0) = \sigma_{0n}^k(\xi)\,,\ 0 \le \xi \le \xi_0\,, \\ v_n^k(\xi,\gamma(\xi-\xi_0)) = \sigma_{\beta n}^k(\xi)\,,\ \xi_0 \le \xi \le \tfrac{1}{2}\,,\quad k = \overline{1,k_n}\,,\ n = 0,1,...; \end{gathered} \tag{24}$$

$$v_n^k(\xi,\eta) = w_{0,n}^k(\xi+\eta,\xi-\eta)\,,\quad \tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{m-1}{2}}\overline{\tau}_n^k(2\xi)\,,\quad \sigma_{0n}^k(\xi) = \xi^{\frac{m-1}{2}}\,\overline{\sigma}_{0n}^k(\xi)\,,$$

$$\nu_n^k(\xi) = \sqrt{2}(2\xi)^{\frac{m-1}{2}}\,\overline{\nu}_n^k(2\xi)\,, \quad \sigma_{\beta n}^k(\xi) = ((1+\gamma)\xi - \gamma\xi_0)^{\frac{m-1}{2}}\,\overline{\sigma}_{\beta n}^k((1+\gamma)\xi - \gamma\xi_0)\,,$$

$$0 < \gamma = \frac{1-\beta}{1+\beta} < 1\,.$$

Аналогично, как в [7,9], можно записать решение задачи Коши для уравнения (22) следующим образом:

$$v_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\,\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{1}{2}\,\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}\left[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}\,R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,|_{\xi_1=\eta_1}\right]\,d\xi_1 + \tag{25}$$

$$+\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\int\limits_{0}^{\eta} c(\xi_1-\eta_1)v_n^k(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,d\xi_1 d\eta_1\,,\ 0\le\eta<\xi\le\xi_0\,,$$

$$v_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\,\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{1}{2}\,\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}\left[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,|_{\xi_1=\eta_1}\right]\,d\xi_1 + \tag{26}$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\xi}\ \int\limits_{\gamma(\xi-\xi_0)}^{\eta} c(\xi_1-\eta_1)v_n^k(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,d\xi_1 d\eta_1\,, \quad \xi_0\le\xi\le\frac{1}{2}\,,\ 0\le\eta\le\frac{1}{2}\,,$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu\left[\dfrac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения $Lv_n^k = 0$ (см. [10]), $P_\mu(z)$ – функция Лежандра, $\mu = n + \dfrac{(m-3)}{2}$, а

$$\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial N}\right)_{\xi_1=\eta_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial(\cdot)}{\partial\eta_1}\right)_{\xi_1=\eta_1}\,.$$

Из (25), (26) при $\eta = 0$, и $\eta = \gamma(\xi-\xi_0)$, используя краевое условие (23), соответственно получим интегральные уравнения первого рода

$$g_{1n}^k(\xi) = \int\limits_0^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)\,d\xi_1\,,\ 0\le\xi\le\xi_0\,, \tag{27}$$

$$g_{2n}^k(\xi) = \int\limits_{\gamma(\xi-\xi_0)}^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\gamma\xi(\xi-\xi_0)}{\xi_1(\xi+\gamma(\xi-\xi_0))}\right)d\xi_1\,,\ \xi_0\le\xi\le\frac{1}{2}\,, \tag{28}$$

$$g_{1n}^k(\xi) = \sqrt{2}\sigma_{0n}^k(\xi) - \frac{\tau_n^k(\xi)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^\xi \frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1} P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1\,,$$

$$g_{2n}^k(\xi) = \sqrt{2}\sigma_{\beta n}^k(\xi) - \frac{\tau_n^k(\gamma(\xi-\xi_0))}{\sqrt{2}} - \frac{\tau_n^k(\xi)}{\sqrt{2}} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\gamma(\xi-\xi_0)}^{\xi} \tau_n^k(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} - \frac{\partial}{\partial\eta_1}\right) P_\mu\left(\frac{\xi_1-\eta_1+2(\xi_1\eta_1+\gamma\xi(\xi-\xi_1))}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\gamma\xi-\gamma\xi_0)}\right)_{\xi_1=\eta_1} d\xi_1\,.$$

В [6] показано, что уравнение (27) имеет бесконечное множество решений, а в [7] установлено, что уравнение (28) разрешимо единственным образом.

Следовательно, задача (22), (23) сводится к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода (25) и (26) (см. [1]).

Теперь рассмотрим задачу (22), (24). Из (25), (26) при $\eta = 0$, и $\eta = \gamma(\xi-\xi_0)$, с учетом (24), соответственно получим интегральное уравнение

$$\tau_n^k(\xi) = \psi_{1n}^k(\xi) - \int\limits_0^\xi \frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1} P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1\,, \quad 0 \le \xi \le \xi_0 \tag{29}$$

и функционально-интегральное уравнение

$$\tau_n^k(\xi) + \tau_n^k(\gamma(\xi-\xi_0)) = \psi_{2n}^k(\xi) - \int\limits_{\gamma(\xi-\xi_0)}^{\xi} \tau_n^k(\xi_1) G_{2n}(\xi,\xi_1)\, d\xi_1\,, \quad \xi_0 \le \xi \le \frac{1}{2}, \tag{30}$$

$$\psi_{1n}^k(\xi) = 2\sigma_{0n}^k(\xi) - \sqrt{2}\int\limits_0^\xi \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1\,,$$

$$\psi_{2n}^k(\xi) = 2\sigma_{\beta n}^k(\xi) - \sqrt{2}\int\limits_{\gamma(\xi-\xi_1)}^{\xi} \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\gamma\xi(\xi-\xi_0)}{\xi_1(\xi+\gamma(\xi-\xi_0))}\right] d\xi_1\,,$$

$$G_{2n}(\xi,\xi_1) = \frac{(\gamma(\xi-\xi_0)-\xi)}{\xi_1(\xi+\gamma(\xi-\xi_0))} P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\gamma\xi(\xi-\xi_0)}{\xi_1(\xi+\gamma(\xi-\xi_0))}\right]\,,$$

$$|G_{2n}(\xi,\xi_1)| \le \frac{C}{\xi+\gamma(\xi-\xi_0)}\,, \quad C = \text{const}\,.$$

В [6] доказано, что уравнение (29) имеет бесчисленное множество решений.

Далее, так как интегральный оператор, стоящий в правой части равенства (30) вполне непрерывен, то, как показано в [7], функциональное уравнение (30) однозначно разрешима.

Таким образом, задача (22), (24) также приводится к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода (25) и (26)

Теперь будем решать задачу (17a), (15). Её решение ищем в виде

$$w_{\alpha,n}^{k}(r,x_0) = w_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) + w_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)\ ,$$

где $w_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ – решение задачи Коши (17a), (18), а $w_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ – решение краевой задачи для уравнения (17a) с данными

$$\begin{gathered} w_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0\,, \quad w_{\alpha,n}^{k,2}(r,r) = \sigma_{0n}^{k}(r) - w_{\alpha,n}^{k,1}(r,r)\ , \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0\,, \\ w_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta(r-r_0)+r_0) = \sigma_{\beta n}^{k}(r) - w_{\alpha,n}^{k,1}(r,\beta(r-r_0)+r_0)\ , \quad r_0 \leqslant r \leqslant r_1\,, \\ k = \overline{1,k_n}\,, \quad n = 0,1,\ldots . \end{gathered} \tag{31}$$

Учитывая формулы (19), (20), а также обратимость оператора D_{0t}^{α} (см. [8]), задачи (17a), (18) и (17a), (31) соответственно сводим к задаче Коши (17b, (18) и – к задаче для (17b) с данными

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x_0} w_{0,n}^{k,2}(r,0) = 0\,,\ 0 < r < 1\,, \qquad w_{0,n}^{k,2}(r,r) = \varphi_{1n}^{k}(r)\ ,\ 0 \le r \le r_0\,, \\ w_{0,n}^{k,2}(r,\beta(r-r_0)+r_0) = \varphi_{2n}^{k}(r)\ ,\ r_0 \le r \le r_1\,, \quad k = \overline{1,k_n}\,,\ n = 0,1,\ldots, \end{gathered} \tag{32}$$

где $\varphi_{1n}^{k}(r)$, $\varphi_{2n}^{k}(r)$ функции, выражающиеся через $\tau_n^k(r)$, $\sigma_{0n}^{k}(r)$, $0 \le r \le r_0$ и $\tau_n^k(r)$,$\sigma_{\beta n}^{k}(r)$, $r_0 \le r \le r_1$.

Задача Коши (17b), (18), как видно из (25) и (26), приводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Задача (17b), (32), как показано ранее, имеет бесчисленное множество решений.

Далее, используя утверждения 1 и 2, устанавливается, что задача (17a), (15) имеет также бесчисленное множество решений.

Таким образом, задача (1), (2) имеет множество решений вида

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta)\,, \tag{33}$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются из двумерных задач.

Теперь рассмотрим задачу (1), (3), и её решение также будем искать в виде (8). Тогда она сведётся к задаче (17a), (16). Решение этой задачи ищем в виде

$$w_{\alpha,n}^{k}(r,x_0) = w_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) + w_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)\ ,$$

где $w^{k,2}_{\alpha,n}(r,x_0)$ – решение задачи Коши (17a), (21), а $w^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0)$ – решение краевой задачи для уравнения (17a) с условиями

$$\frac{\partial}{\partial x_0} w^{k,1}_{\alpha,n}(r,0) = 0\,,\ 0 < r < 1\,, \qquad w^{k,1}_{\alpha,n}(r,r) = \sigma^k_{0n}(r) - w^{k,2}_{\alpha,n}(r,r)\ ,\ 0 \le r \le r_0,$$

$$w^{k,1}_{\alpha,n}(r,\beta(r-r_0)+r_0) = \sigma^k_{\beta n}(r) - w^{k,2}_{\alpha,n}(r,\beta(r-r_0)+r_0)\ ,\ r_0 \le r \le r_1\,, \tag{34}$$

$$k = \overline{1,k_n}\,,\ n = 0,1,\ldots\ .$$

Учитывая формулы (20), (19), задачи (17a), (21) и (17a), (34), соответственно, сведём к задаче Коши (17b), (18$'$) и к задаче для (17b) с данными (32).

Таким образом, задача (1),(3) также имеет бесчисленное множество решений вида (33), где $u^k_n(r,t)$ находятся из двумерных задач.

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r,t), \nu(r,t), \sigma_0(r,t), \sigma_\beta(r,t)$, аналогично [6, 7], можно доказать, что полученное решение $u(r,\theta,t)$ (33) принадлежит искомому классу.

Теорема 1 доказана.

3. Единственность решения задачи 2

Теперь переходим к доказательству теоремы 2. Сначала рассмотрим задачу (1),(4). Для этого построим $u(r,\theta,t)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям

$$u|_s = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta)\,, \qquad u|_{s_0 \cup s_\beta} = 0\,,\ k = \overline{1,k_n}\,,\ n = 0,1,\ldots\,, \tag{35}$$

$\bar{\tau}^k_n \in V$, где V – множество функций $\tau(r)$ из класса $C^2(0<r<1) \cap C^1(0 \le r \le 1)$.

Очевидно, что множество V плотно в $L_2((0,1))$. Функцию $u(r,\theta,t)$ будем искать в виде (8). Тогда, для $w^k_{\alpha n}(r,x_0)$ получим уравнение (17a) с краевыми условиями

$$w^k_{\alpha,n}(r,0) = \tau^k_n(r)\,,\ 0 \le r \le 1\,, \quad w^k_{\alpha,n}(r,r) = 0\,,\ 0 \leqslant r \leqslant r_0\,,$$

$$w^k_{\alpha,n}(r,\beta(r-r_0)+r_0) = 0\,,\ r_0 \leqslant r \leqslant r_1\,, \quad k = \overline{1,k_n}\,,\ n = 0,1,\ldots\,. \tag{36}$$

Как показано в п.2, задача (17a), (36) имеет бесчисленное множество решений.

Таким образом, решение (1), (35) в виде (33) построено, где $u^k_n(r,t)$ определяются из двумерных задач.

Из определения сопряженных операторов (см. [11])

$$vLu - uLv = -vP(u) + uP(v)\,,$$

где

$$P(u) = g(t)\sum_{i=1}^{m} u_{x_i}\cos\left(N^{\perp}, x_i\right) - u_t\cos\left(N^{\perp}, t\right)\,,$$

а $N^{\perp}$ – внутренняя нормаль к границе ∂D_{β}, по формуле Грина имеем

$$\int\limits_{D_\beta}(vLu - uLv)\,dD_\beta = \int\limits_{\partial D_\beta}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}\right)M\right]ds\,, \tag{37}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial N}$ – конормаль к ∂D_{β}, а $M^2 = (g(t))^2\sum\limits_{i=1}^{m}\cos^2\left(N^{\perp}, x_i\right) + \cos^2\left(N^{\perp}, t\right)$.

Из (37), принимая во внимание граничные условия (4) и тот факт, что на характеристических коноидах K_0, K_1 конормальная производная $\dfrac{\partial}{\partial N}$ совпадает с производной по касательному направлению (см. [11]), получим $\int\limits_S \tau(r,\theta)v_t(r,\theta,0)ds = 0$. Отсюда, поскольку линейная оболочка системы функций $\{\overline{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна (см. [12]) в $L_2(S)$, заключаем, что $v_t(r,\theta,0) = 0$, $\forall(r,\theta)\in S$. Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши (см. [11]): $Lv = 0$, $v(x,0) = v_t(x,0) = 0$, будем иметь $v(x,t) = 0$, $\forall(x,t)\in D_{\beta}$.

Единственность решения задачи (1), (4) доказана. Аналогичным образом, доказывается единственность решения задачи (1), (5).

Заметим, что из примеров, построенных в [6], и из теоремы 1 следует, что однородная задача, соответствующая задаче 1, имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Литература

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа / А.В. Бицадзе. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.

2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

3. Protter M.N. // Dure Math. J. – 1954. – 21,1. – P.1-7

4. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике / Ф.И. Франкль. – М.: Наука, 1973. – 711 с.

5. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С.Г. Михлин. – М.:Физматгиз, 1962. – 254 с.

6. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений / С.А. Алдашев. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.

7. Алдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения / С.А. Алдашев. – Орал: ЗКАТУ, 2007. – 139 с.

8. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высш. шк., 1985. – 301 с.

9. Алдашев С.А. // Укр.матем.журнал. – 2003. – 55,1. – С.100-107.

10. Copson E.T. // J.Rath. Mech. And Anal. – 1958. – 1. – P.324-348

11. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М: Наука, 1981. – Т.4(2). – 550 с.

12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 542 с.

MUTUALLY-ASSOCIATE BOUNDARY PROBLEMS WITH THE DEVIATION FROM CHRACTERISTICS FOR MANY-DIMENSIONAL CHAPLYGIN EQUATION

T.T. Sheriyazdan

Zhubanov Aktiubinsk state university,

Abylkhaiyrkhana Av., Aktobe, 030000, Kazakhstan, e-mail: talgatsher72@inbox.ru

Abstract. Mutually-associate boundary problems with the deviation from characteristics for many-dimensional Chaplygin equation are investigated.

Key words: boundary problem, spherical functions, characteristics, many-dimensional equations.