УДК 517.983

ВЕСОВЫЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ МАЛЬМСТЕНА[2)]

А.В. Глушак, О.А. Покручин

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Установлены формулы, связывающие решение весовых задач Коши для абстрактного дифференциального уравнения Мальмстена с операторной функцией Бесселя и проинтегрированной косинус-оператор-функцией.

Ключевые слова: весовые задачи Коши, проинтегрированная косинус-оператор-функция, операторная функция Бесселя.

Ослабление требований на разрешающие операторы задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого и второго порядков привело к понятию проинтегрированной полугруппы и проинтегрированной косинус-оператор-функции (в дальнейшем ПКОФ). В работах [1, 2] приводятся формулы, связывающие ПКОФ $C_{k/2}(t)$ с операторной функции Бесселя $Y_k(t)$ – разрешающим оператором задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0\,. \tag{2}$$

В уже цитируемых работах [1, 2] приводится и определение ПКОФ, и формула связи операторной функции Бесселя $Y_k(t)$ с ПКОФ $C_{k/2}(t)$, имеющая вид

$$Y_{2\alpha}(t)u_0 = \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}\,t^\alpha}\left(C_\alpha(t)u_0 - \int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau\right), \tag{3}$$

где $P_{\alpha-1}(\tau)$ – сферическая функция Лежандра [3].

В настоящей работе будет показано, что ОФБ и ПКОФ могут быть использованы и для построения решений весовых задач Коши для уравнения Мальмстена [4, с. 113].

Первая весовая задача Коши. Пусть E – банахово пространство, A – оператор, действующий в E, с областью определения $D(A)$. Рассмотрим следующую весовую задачу Коши для уравнения Мальмстена

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) + \frac{l}{t^2}u(t) = t^m Au(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{4}$$

[2]Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 10-01-00276.

$$\lim_{t\to 0}\left(t^{(k-1-\nu(m+2))/2}u(t)\right) = u_0\,, \tag{5}$$

где параметр $\nu = \dfrac{\sqrt{(k-1)^2-4l}}{m+2} \geq 0$. Отметим сразу, что для рассматриваемого дифференциального уравнения второго порядка не ставится ("снимается") второе начальное условие при $t = 0$, что характерно для ряда уравнений с особенностью в коэффициентах.

Разрешающий оператор задачи (4), (5) будем обозначать $Y_{k,l}^m(t)$, а множество операторов A, для которых задача (4), (5) разрешима, обозначим через $G_{k,l}^m$. Наряду с этим множеством рассмотрим множество G_k операторов A, для которых разрешима задача Коши для уравнения ЭПД (1), (2).

Теорема 1. *Пусть $\nu \geq 0$, $m > -2$, оператор $A \in G_{2\nu+1}$ и $u_0 \in D(A)$. Тогда задача (4), (5) имеет решение, которое представимо в виде*

$$u(t) \equiv Y_{k,l}^m(t)u_0 = t^{(1-k+\nu(m+2))/2}\,Y_{2\nu+1}(\tau)u_0\,, \tag{6}$$

где $\tau = \dfrac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}$.

□ Найдем первую и вторую производные от функции $u(t) = Y_{k,l}^m(t)u_0$. Имеем

$$u'(t) = \left(\frac{1-k+\nu(m+2)}{2}\right)t^{(-1-k+\nu(m+2))/2}Y_{2\nu+1}(\tau)u_0 + t^{(m+1-k+\nu(m+2))/2}Y'_{2\nu+1}(\tau)u_0\,,$$

$$u''(t) = \left(\frac{1-k+\nu(m+2)}{2}\right)\left(\frac{-1-k+\nu(m+2)}{2}\right)t^{(-3-k+\nu(m+2))/2}Y_{2\nu+1}(\tau)u_0 +$$

$$+\left(\frac{m+2}{2} - k + \nu(m+2)\right)t^{(m-1-k+\nu(m+2))/2}Y'_{2\nu+1}(\tau)u_0 + t^{(2m+1-k+\nu(m+2))/2}Y''_{2\nu+1}(\tau)u_0\,.$$

Подставляя найденные производные в левую часть уравнения (4), получим

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) + \frac{l}{t^2}u(t) = t^{(2m+1-k+\nu(m+2))/2}\,Y''_{2\nu+1}(\tau)u_0 +$$

$$+\left(\frac{m+2}{2} + \nu(m+2)\right)t^{(m-1-k+\nu(m+2))/2}\,Y'_{2\nu+1}(\tau)u_0\,. \tag{7}$$

Чтобы вычислить $AY_{k,l}^m(t)\,u_0$, воспользуемся уравнением

$$Y''_{2\nu+1}(\tau)u_0 + \frac{(\nu+1/2)(m+2)}{t^{(m+2)/2}}Y'_{2\nu+1}(\tau)u_0 = AY_{2\nu+1}(\tau)u_0, \tag{8}$$

которому удовлетворяет функция $Y_{2\nu+1}(\tau)u_0$. Из (7), (8) следует, что функция $u(t) = Y_{k,l}^m(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (4).

Справедливость начального условия в (5) вытекает из условий (2), которым удовлетворяет функция $Y_{2\nu+1}(\tau)u_0$. ■

Замечание. При $m > -1$ решение (6) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t\to 0}(t^{(k-1-\nu(m+2))/2}u(t))' = 0\,.$$

Для проверки этого факта воспользуемся формулой [5]

$$Y_k'(t)u_0 = \frac{t}{k+1}Y_{k+2}(t)Au_0\,, \tag{9}$$

на основе которой получаем

$$(t^{(k-1-\nu(m+2))/2}u(t))' = (Y_{2\nu+1}(\tau)u_0)_t' = t^{m/2}Y_{2\nu+1}'(\tau)u_0 = \frac{2}{(m+2)(2\nu+2)}t^{m+1}Y_{2\nu+3}(\tau)Au_0\,.$$

Поскольку по условию замечания $m > -1$, то требуемое соотношение выполнено.

Следствие 1. *Пусть* $\nu \geq 0$, $m > -2$, $\tau = \dfrac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}$ *и* A *– генератор ПКОФ* $C_{\nu+1/2}(t)$. *Тогда*

$$Y_{k,l}^m(t) = \frac{\Gamma(\nu+1)(m+2)^{\nu+1/2}t^{-(2k+m)/4}}{\sqrt{\pi}}\left(C_{\nu+1/2}(\tau) - \int_0^1 P_{\nu-1/2}'(s)C_{\nu+1/2}(s\tau)u_0ds\right)\,.$$

Для доказательства следствия 1 достаточно воспользоваться предыдущей теоремой 1 и формулой (3).

Следствие 2. *Пусть* $k \geq 1$ *и* $A \in G_k$. *Тогда* $G_{k,0}^0 = G_k$ *и* $Y_{k,0}^0(t) = Y_k(t)$.

Для доказательства следствия 2 заметим, что при $k \geq 1$, $l = 0$, $m = 0$ задача (4), (5) превращается в задачу Коши (1), (2) для уравнения ЭПД.

Приводимые далее следствия 3 – 5 вытекают из теоремы 1 и следующей формулы сдвига по параметру (см. [5])

$$Y_m(t) = \frac{2}{B(k/2+1/2, m/2-k/2)}\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^kY_k(ts)\,ds, \qquad m > k\,, \tag{10}$$

где $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функция.

Следствие 3. *Пусть* $\nu \geq 0$, $2\nu+1 > k \geq 0$, $m > -2$ *и* $A \in G_k$. *Тогда имеет место вложение* $G_k \subset G_{k,l}^m$ *и при этом*

$$Y_{k,l}^m(t) = \frac{2t^{(1-k+\nu(m+2))/2}}{B(k/2+1/2, \nu-k/2+1/2)}\int_0^1 (1-s^2)^{(2\nu+1-k)2-1}s^kY_k(\tau s)\,ds\,,\quad \tau = \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\,.$$

Следствие 4. Пусть $\nu \geq 0$, $k \geq 0$, $2\nu+1 < k$, $m > -2$ *и* $A \in G_{k,l}^m$. *Тогда имеет место вложение* $G_{k,l}^m \subset G_k$ *и при этом*

$$Y_k(t) = \frac{2^{1+\nu-(k-1)/(m+2)}\left((m+2)t\right)^{(k-1)/(m+2)-\nu}}{B(\nu+1, k/2-\nu-1/2)} \quad \times$$

$$\times \quad \int_0^1 (1-s^2)^{(2\nu+1-k)2-1} s^{k+(k-1)/(m+2)-\nu} Y_{k,l}^m \left(\left(\frac{m+2}{2} ts \right)^{\frac{2}{m+2}} \right) ds\,.$$

Следствие 5. *Пусть* $\nu \geq 0$, $2\nu+1=k$, $m>-2$. *Тогда* $G_{k,l}^m = G_k$ *и*

$$Y_{k,l}^m(t) = t^{\nu m/2} Y_k(\tau), \quad \tau = \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}\,.$$

Вторая весовая задача Коши. В этом пункте для уравнения Мальмстена рассмотрим еще одну весовую задачу Коши. При $0<\nu<\dfrac{1}{2}$, $m>-1$ будем разыскивать решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\to 0} (t^{(k-1+\nu(m+2))/2} u(t)) = u_0, \quad \lim_{t\to 0} (t^{(k-1+\nu(m+2))/2} u(t))' = 0\,. \tag{11}$$

Покажем, что операторная функция Бесселя может быть также использована для построения решения задачи (4), (11). Разрешающий оператор этой задачи обозначим через $Z_{k,l}^m(t)$, а множество операторов A, для которых задача (4), (11) разрешима, обозначим через $H_{k,l}^m$.

Теорема 2. *Пусть* $0<\nu<\dfrac{1}{2}$, $m>-1$, *оператор* $A \in G_{1/2-\nu}$ *и* $u_0 \in D(A)$. *Тогда задача (4), (11) имеет решение, которое представимо в виде*

$$Z_{k,l}^m(t)u_0 = t^{(1-k-\nu(m+2))/2}\, Y_{1-2\nu}(\tau) u_0, \quad \tau = \frac{2}{m+2} t^{(m+2)}\,. \tag{12}$$

$\square$ Найдем первую и вторую производные от функции $u(t) = Z_{k,l}^m(t)u_0$. Имеем

$$u'(t) = \left(\frac{1-k-\nu(m+2)}{2} \right) t^{(-1-k-\nu(m+2))/2} Y_{1-2\nu}(\tau)u_0 + t^{(m+1-k-\nu(m+2))/2} Y'_{1-2\nu}(\tau)u_0\,,$$

$$u''(t) = \left(\frac{1-k-\nu(m+2)}{2} \right) \left(\frac{-1-k-\nu(m+2)}{2} \right) t^{(-3-k-\nu(m+2))/2} Y_{1-2\nu}(\tau)u_0 +$$

$$+ \left(\frac{m+2}{2} - k - \nu(m+2) \right) t^{(m-1-k-\nu(m+2))/2} Y'_{1-2\nu}(\tau)u_0 + t^{(2m+1-k-\nu(m+2))/2} Y''_{1-2\nu}(\tau)u_0\,.$$

Подставляя найденные производные в левую часть уравнения (4), получим

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) + \frac{l}{t^2}u(t) = t^{(2m+1-k-\nu(m+2))/2} Y''_{1-2\nu}(\tau)u_0 +$$

$$+ \left(\frac{m+2}{2} - \nu(m+2) \right) t^{(m-1-k-\nu(m+2))/2} Y'_{1-2\nu}(\tau)u_0\,. \tag{13}$$

Как и в теореме 1, нам понадобится уравнение, которому удовлетворяет функция $w(\tau) = Y_{1-2\nu}(\tau)u_0$,

$$w''(\tau) + \frac{1-2\nu}{\tau}w'(\tau) = Aw(\tau)\,. \tag{14}$$

Подставив (13), (14) в уравнение (1), убеждаемся, что $u(t) = Z^m_{k,l}(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (1). Справедливость первого начального условия в (11) очевидна, а для проверки второго воспользуемся формулой (9). Будем иметь

$$(t^{(k-1+\nu(m+2))/2}u(t))' = (Y_{1-2\nu}(\tau)u_0)'_t = t^{m/2}Y'_{1-2\nu}(\tau)u_0 = \frac{1}{(m+2)(1-\nu)}\,t^{m+1}Y_{3-2\nu}(\tau)Au_0\,.$$

Поскольку по условию теоремы $m > -1$, то второе начальное условие в (10) также выполнено. ■

Следствие 6. *Пусть* $\nu > 0$, $m > -1$, $\tau = \dfrac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}$ *и* A *– генератор ПКОФ* $C_{1/2-\nu}(t)$. *Тогда*

$$Z^m_{k,l}(t)u_0 = \frac{\Gamma(-\nu+1)(m+2)^{1/2-\nu}t^{-(2k+m)/4}}{\sqrt{\pi}}\times$$

$$\times\left(C_{1/2-\nu}(\tau)u_0 - \int_0^1 P'_{-\nu-1/2}(s)C_{1/2-\nu}(s\tau)u_0ds\right)\,. \tag{15}$$

□ Для доказательства следствия 6 достаточно воспользоваться теоремой 2 и формулой (3). ■

Следствие 7. *Пусть* $0 < k \le 1$ *и* $A \in G_k$. *Тогда* $Z^0_{k,0}(t)u_0 = Y_k(t)u_0$ *и* $H^0_{k,0} = G_k$.

□ Для доказательства следствия 2 заметим, что при $0 < k \le 1$, $l = 0$, $m = 0$ задача (4), (11) превращается в задачу Коши (1), (2) для уравнения ЭПД. ■

И в рассматриваемом случае справедливы аналоги следствий 3 – 5.

Следствие 8. *Пусть* $\nu > 0$, $1-2\nu > k \ge 0$, $m > -1$ *и* $A \in G_k$. *Тогда имеет место вложение* $G_k \subset H^m_{k,l}$ *и при этом*

$$Z^m_{k,l}(t) = \frac{2t^{(1-k-\nu(m+2))/2}}{B(k/2+1/2,1/2-\nu-k/2)}\int_0^1 (1-s^2)^{(1-2\nu-k)2-1}s^kY_k(\tau s)\,ds\,,$$

$$\tau = \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\,.$$

Следствие 9. *Пусть* $0 < \nu < 1/2$, $1-2\nu < k$, $m > -1$ *и* $A \in H^m_{k,l}$. *Тогда имеет место вложение* $H^m_{k,l} \subset G_k$ *и при этом*

$$Y_k(t) = \frac{2^{1-\nu-(k-1)/(m+2)}\,((m+2)t)^{(k-1)/(m+2)+\nu}}{B(1-\nu,k/2+\nu-1/2)}\quad\times$$

$$\times \quad \int_0^1 (1-s^2)^{(1-2\nu-k)2-1} s^{k+(k-1)/(m+2)+\nu} Z_{k,l}^m \left(\left(\frac{m+2}{2} ts \right)^{\frac{2}{m+2}} \right) \, ds \, .$$

Следствие 10. *Пусть* $0 < \nu < 1/2$, $1-2\nu = k$, $m > -1$ *и* $A \in G_k$. *Тогда* $H_{k,l}^m = G_k$ *и*

$$Z_{k,l}^m(t) = t^{-\nu m/2} Y_k(\tau), \quad \tau = \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2} \, .$$

Приводимое далее следствие вытекает из теорем 1, 2 и формулы сдвига по параметру (10).

Следствие 11. *Пусть* $0 < \nu < 1/2$, $m > -1$ *и* $A \in H_{k,l}^m$. *Тогда имеет место вложение* $H_{k,l}^m \subseteq G_{k,l}^m$ *и при этом*

$$Y_{k,l}^m(t) = \frac{2t^{\nu(m+2)}}{B(1-\nu, 2\nu)} \int_0^1 (1-s^2)^{2\nu+1} s^{(k-1)/(m+2)-\nu+1} Z_{k,l}^m (ts^{2/(m+2)}) \, ds \, . \tag{16}$$

□ $Y_{2\nu+1}(t)$ выражается через $Y_{1-2\nu}(t)$ при помощи формулы (10)

$$Y_{2\nu+1}(t) = \frac{2}{B(1-\nu, 2\nu)} \int_0^1 (1-s^2)^{2\nu+1} s^{1-2\nu} Y_{1-2\nu}(ts) \, ds \, . \tag{17}$$

Учитывая в (17) равенства (6) и (12), получим требуемое соотношение (16). ■

Третья весовая задача Коши. В этом пункте мы рассмотрим случай $0 < \nu < 1/2$, $-2 < m \le -1$, не охваченный второй весовой задачей Коши. При постановке третьей весовой задачи Коши мы будем использовать дробную производную Капуто ${}^C\partial^\alpha u(t)$ порядка α при $0 < \alpha < 1$, которая имеет вид

$${}^C\partial^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) \, ds \, ,$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \nu < \dfrac{1}{2}$, $-2 < m \le -1$, *оператор* $A \in G_{1/2-\nu}$ *и* $u_0 \in D(A)$. *Тогда определяемая равенством (12) функция* $u(t) = Z_{k,l}^m(t) u_0$ *удовлетворяет уравнению (4) и начальным условиям*

$$\lim_{t \to 0} (t^{(k-1+\nu(m+2))/2} u(t)) = u_0, \quad \lim_{t \to 0} {}^C\partial^\alpha (t^{(k-1+\nu(m+2))/2} u(t)) = 0 \, . \tag{18}$$

□ Для доказательства теоремы 3 достаточно проверить справедливость второго условия в (18). Учитывая равенство (9) и начальные условия (2), которым удовлетворяет ОФБ, получим

$$\lim_{t \to 0} {}^C\partial^\alpha (t^{(k-1+\nu(m+2))/2} u(t)) = \lim_{t \to 0} {}^C\partial^\alpha Y_{1-2\nu}(\tau) u_0 =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\Gamma(1-\nu(m+2))}\int_0^t \frac{s^{m+1}Y_{3-2\nu}\left(\frac{2}{m+2}s^{(m+2)/2}\right)Au_0}{(1-\nu)(m+2)(t-s)^{\nu(m+2)}}\,ds =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^{(1-\nu)(m+2)}}{\Gamma(1-\nu(m+2))}\int_0^1 \frac{\xi^{m+1}Y_{3-2\nu}\left(\frac{2}{m+2}(t\xi)^{(m+2)/2}\right)Au_0}{(1-\nu)(m+2)(1-\xi)^{\nu(m+2)}}\,d\xi = 0\,. \quad \blacksquare$$

Литература

1. Глушак А.В. О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42;5. – С.583-589.

2. Глушак А.В. Задача Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с генератором проинтегрированной косинус-оператор-функции // Науч. Вед. БелГУ. – 2007. – 6(37);13. – С.3-8.

3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. / Н.Н. Лебедев. – М.:Физматгиз, 1963.

4. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. – М.: Иностранная литература, 1949.

5. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // Доклады РАН. – 1997. – 352;5. – С.587-589.

WEIGHTED CAUCHY PROBLEM FOR ABSTRACT MALMSTEN EQUATIONS

Glushak A.V., Pokruchin O.A.

Belgorod State University,

Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: glushak@bsu.edu.ru

Abstract. Some formulas related to the Cauchy problem solution for the abstract Malmsten equation with the operator Bessel function are found. The equation contains the integrated cosine operator function.

Key words: weighted Cauchy problem, integrated cosine operator function, Bessel operator function.