УДК 532.72

ВЛИЯНИЕ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ НА ДИФФУЗИОФОРЕТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ КРУПНОЙ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ВЯЗКОЙ ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЕ[4)]

К.С. Рязанов

Белгородский государственный университет

ул.Студенческая, 14, г.Белгород, 308007, Россия, e-mail: rksb@rambler.ru

Найдено аналитическое решение задачи стационарного движения при малых числах Рейнольдса крупной испаряющейся капли сферической формы, находящейся в бинарной газовой смеси при наличии градиента концентрации. Предполагается, что средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей её газообразной среды. В процессе решения газодинамических уравнений получены аналитические выражения для силы диффузиофореза с учётом влияния движения среды.

Ключевые слова: диффузиофорез, задача Адамара-Рыбчинского.

1. Рассмотрим каплю, находящуюся в бинарной газовой смеси, первая компонента которой образована молекулами вещества капли. Если на больших расстояниях от центра капли значения относительной концентрации C_1 паров вещества капли меньше, чем значения C_1 у поверхности капли, то при этом происходит испарение капли. Такие капли называют летучими. Нелетучими называют капли, на поверхности которых фазовый переход не происходит. Будем предполагать, что испарение капли происходит в диффузионном режиме, т.е. основным механизмом переноса молекул является диффузия. Математически это означает, что при малых концентрациях молекул паров капли мы имеем соотношение вида $C_1 \ll 1$.

Каплю, радиус которой много меньше длины волны свободного пробега λ молекул газовой смеси, окружает тонкий слой газа, имеющий толщину сравнимую с λ. Этот слой называют слоем Кнудсена. В слое Кнудсена происходят столкновения молекул, вылетающих с поверхности капли, с молекулами, летящими к поверхности капли. Если слой Кнудсена оказывает слабое влияние на скорость роста или испарения капли, то каплю называют крупной, т.е. $\lambda/R \ll 1$, где R – радиус капли. Потому в слое Кнудсена поверхность капли оказывает существенное влияние на диффузиофоретическое движение, и задача решается с помощью математических методов кинетической теории газов, а вне слоя Кнудсена – с помощью системы уравнений газовой динамики.

Движение капель относительно центра инерции неоднородной по составу газовой смеси при наличии градиентов относительных концентраций её компонентов называется диффузиофоретическим [1,2]. Когда дифузиофоретическая сила уровновешивает силу вязкого сопротивления, капля приобретает постоянную скорость диффузиофореза. Когда капля находится в поле бегущей плоской волны монохроматического излучения интенсивностью I_0 и длиной волны λ_0, то в результате поглощения электромагнитной энергии происходит нагрев частицы, который может быть описан некоторой функцией внутренних источников

[4]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы, ГК № П1923 от 29.10.09

тепла q_i. Молекулы газа, взаимодействующие с более нагретой частью поверхности капли, сообщают ей бо́льший импульс, чем от холодной. В результате, происходит движение капли, получившее название фотофорез. В случае одностороннего направленного излучения источники q_i принимают вид

$$q_i(\mathbf{r}) = 2\,n\,k\,d\,I_0\left|\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right|^2.$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda_0$ – волновое число, $m = n + id$ – комплексный показатель преломления вещества частицы, $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ – напряженность электрического поля внутри частицы. Точное решение для амплитуд компонент напряженности электрического поля внутри сферической частицы дано, например, в [5,6].

Явлениям диффузиофореза крупных летучих частиц при малых относительных перепадах температуры были посвящены работы [1-3]. Учёт конвективных членов в уравнениях теплопроводности и диффузии на диффузиофотофорез в [1-3] не проводился. В данной работе проводится оценка этого влияния.

При описании термодиффузиофотофореза предполагается, что относительный перепад температуры мал, т.е. $(T_S - T_\infty)/T_\infty \ll 1$. При выполнении этого условия коэффициенты теплопроводности, диффузии, динамической вязкости и плотности можно считать постоянными величинами. В бинарной газовой смеси поддерживается малый постоянный градиент относительных концентраций первого и второго компонентов бинарной газовой смеси ∇C_{1e} и ∇C_{2e}. Будем предполагать, что при движении капля сохраняет сферическую форму. Это предположение справедливо, если силы поверхностного натяжения значительно больше сил вязкого сопротивления. Аналитически условие сохраняемости формы капли имеет вид

$$\frac{\sigma}{R} \gg \frac{\mu_e\left|\mathbf{U}\right|}{R},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения капли, $\mathbf{U}$ – скорость капли, величина которой имеет порядок

$$\mathbf{U} \sim D_{12}\left|\nabla C_{1e}\right|.$$

Здесь и далее индексы "e" и "i" относятся к газообразной среде и капле, соответственно, индексом "∞" обозначены значения физических величин, характеризующие газ вдали от капли, а индексом "s" – значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности капли, равной T_S.

Диффузиофоретическое движение будем описывать в сферической системе координат r, θ, φ, начало которой жёстко связано с мгновенным положением центра масс капли. Полярная ось $z = r\cos\theta$ направлена в сторону градиента ∇C_{1e}. Капля движется с постоянной скоростью $\mathbf{U}$ в отрицательном направлении оси OZ. Распределения скорости и давления должны быть симметричны относительно оси, проходящей через центр капли и параллельны вектору скорости $\mathbf{U}$. В рамках сформулированных допущений, распределения массовой скорости $\mathbf{U}$, давления P, температуры T и относительной концентрации первого компонента C_{1e} описываются следующей системой уравнений [7,8]:

$$\mu_e \triangle \mathbf{U_e} = \nabla P_e\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{U_e} = 0\,,$$

$$\rho_e\, c_{pe}\left(\mathbf{U_e}\nabla\right) T_e = \lambda_e\,\Delta\, T_e\,, \quad \left(\mathbf{U_e}\nabla\right) C_{1e} = D_{12}\Delta\, C_{1e}, \tag{1}$$

$$\mu_i \Delta \mathbf{U_i} = \nabla P_i\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{U_i} = 0\,, \quad \rho_i\, c_{pi}\left(\mathbf{U_i}\nabla\right) T_i = \lambda_i\,\Delta\, T_i + q_i\,. \tag{2}$$

Система газодинамических уравнений (1), (2) решалась со следующими граничными условиями в сферической системе координат r, θ, φ [8]:

$r = R$,

$$n_{2e}\left(U_r^e + U\cos\theta\right) + D_{12}\frac{n_e^2 m_1}{\rho_e}\frac{\partial C_{1e}}{\partial r} = 0\,, \tag{3}$$

$$n_{1e}\left(U_r^e + U\cos\theta\right) - D_{12}\frac{n_e^2 m_2}{\rho_e}\frac{\partial C_{1e}}{\partial r} = n_{1i}(U_r^i + U\cos\theta)\,, \tag{4}$$

$$U_\theta^e - U_\theta^i = -K_{TS}^e\frac{\nu_e}{R\,T_e}\frac{\partial T_e}{\partial\theta} + K_{TS}^i\frac{\nu_i}{R\,T_i}\frac{\partial T_i}{\partial\theta} - K_{DS}^e\frac{D_{12}}{R}\frac{\partial C_{1e}}{\partial\theta}\,, \tag{5}$$

$$\mu_e\left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^e}{\partial\theta} - \frac{\partial U_\theta^e}{\partial r}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial\sigma}{\partial T_i}\frac{\partial T_i}{\partial\theta} = \mu_i\left(\frac{\partial U_\theta^i}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^i}{\partial\theta} - \frac{\partial U_\theta^i}{\partial r}\right), \tag{6}$$

$$T_e = T_i\,, \tag{7}$$

$$-\lambda_e\frac{\partial T_e}{\partial r} + \lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial r} = LD_{12}\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e}\frac{\partial C_{1e}}{\partial r}\,, \tag{8}$$

$$n_{1e} = n_{1e}(T_S) + \frac{\partial n_{1e}}{\partial T_i}\delta T_i\,, \tag{9}$$

$$r \to \infty, \qquad \mathbf{U_e} \to 0\,, \quad P_e \to P_{e\infty}\,, \quad T_e \to T_{e\infty}\,,$$
$$C_{1e} \to C_{1e\infty} + |\nabla C_{1e}|\, r\cos\theta\,, \tag{10}$$

$$r \to 0\,, \qquad \mathbf{U}_i \neq \infty\,, \qquad P_i \neq \infty\,, \qquad T_i \neq \infty\,. \tag{11}$$

Здесь U_r^e и U_θ^e – радиальная и касательная компоненты массовой скорости $\mathbf{U_e}$; $\rho_e = \rho_{1e}+\rho_{2e}$, $\rho_{1e} = n_{1e}m_1$, $\rho_{2e} = n_{2e}m_2$, n_{1e}, m_1 и n_{2e}, m_2 – концентрация и масса первого и второго компонентов бинарной газовой смеси; $U = |\mathbf{U}|$, c_{pk}, λ_k, μ_k, ν_k, D_{12} – удельная теплоемкость при постоянном давлении и коэффициенты теплопроводности, динамической и кинематической вязкостей и диффузии соответственно при $k = e, i$; L – удельная теплота фазового перехода первой компоненты бинарной газовой смеси; K_{TS}^e, K_{TS}^i и K_{DS}^e – коэффициенты (внешнего и внутреннего) теплового и диффузионного скольжений, зависящие от коэффициентов аккомодации тангенциального импульса и энергии. Они определяются методами кинетической теории газов и могут быть взяты из [9,10]. Уравнение конвективной диффузии (1) позволяет дать полное решение задачи о распределении концентраций в системе частица-внешняя среда, в силу соотношения $C_{1e} + C_{2e} = 1$. Здесь $C_{1e} = n_{1e}/n_e$, $C_{2e} = n_{2e}/n_e$.

В качестве граничных условий на поверхности капли взяты: непроницаемость для радиального потока второго компонента бинарной газовой среды (3); непрерывность радиального потока первой компоненты бинарной газовой смеси, испытывающий фазовый переход (4); равенство разности касательных составляющих внешней и внутренней скоростей сумме теплового (внешнего и внутреннего) и диффузионного скольжений, пропорциональных соотвественно коэффициентам K_{TS}^e, K_{TS}^i и K_{DS}^e (5); непрерывность касательных составляющих тензора напряжений (6); непрерывность температуры (7); непрерывность потока тепла с учётом тепла, затрачиваемого на фазовый переход (8); выражение для концентрации молекул первой компоненты газовой смеси, испытывающей фазовый переход с учётом зависимости насыщенной концентрации от температуры (9). Граничные условия на бесконечности приняты в (10), а конечность физических величин учтена в (11).

В задаче имеется малый параметр $\varepsilon = R|\nabla C_{1e}|$. Поэтому решение уравнений гидродинамики и тепло- массопереноса ищем в виде:

$$\mathbf{U_e}(y,\theta) = \mathbf{U_e}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{U_e}^{(1)}, \qquad P_e(y,\theta) = P_e^{(0)} + \varepsilon P_e^{(1)}, \tag{12}$$

$$\mathbf{U_i}(y,\theta) = \mathbf{U_i}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{U_i}^{(1)}, \qquad P_i(y,\theta) = P_i^{(0)} + \varepsilon P_i^{(1)}, \tag{13}$$

$$t_e(y,\theta) = t_e^{(0)}(y) + \varepsilon \cdot t_e^{(1)}(y,\theta), \quad t_i(y,\theta) = t_i^{(0)}(y) + \varepsilon \cdot t_i^{(1)}(y,\theta),$$

$$C_{1e}(y,\theta) = C_{1e}^{(0)}(y) + \varepsilon \cdot C_{1e}^{(1)}(y,\theta). \tag{14}$$

Подставляя (12 - 14) в систему газодинаминамических уравнений (1), (2), получаем:

а) решение уравнений гидродинамики –

$$U_r^e(y,\theta) = U\,\frac{A_5}{y^2} + U\,\cos\theta\left(\frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3}\right), \; U_\theta^e(y,\theta) = -U\,\sin\theta\left(\frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{2y^3}\right),$$

$$P_e(y,\theta) = P_{e\infty} + \frac{\mu_e U}{R\,y^2}\cos\theta\,A_2,$$

$$U_r^i(y,\theta) = U\,\cos\theta\left(A_3 + A_4 y^2\right), \qquad U_\theta^e(y,\theta) = -U\,\sin\theta\left(A_3 + 2A_4 y^2\right),$$

$$P_i(y,\theta) = P_0 + 10A_4 y^2\,\frac{\mu_i U}{R}\cos\theta.$$

б) решение уравнений тепло- массопереноса имеет вид –

$$t_e^{(0)} = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}, \quad t_i^{(0)} = B_0 + \frac{R^2 J_0}{3\lambda_i T_{e\infty}\,y} + \int\limits_1^y \frac{\psi_0}{y}dy - \frac{1}{y}\int\limits_1^y \psi_0 dy,$$

$$C_{1e}^{(0)} = C_{1e\infty} + \frac{M_0}{y}, \quad t_e^{(1)} = \cos\theta\left\{\frac{\Gamma_1}{y^2} + \omega_1\left(\frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{4y^3}\right)\right\},$$

$$C_e^{(1)} = \cos\theta\left\{y + \frac{M_1}{y^2} + \omega_2\left(\frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{4y^3}\right)\right\},$$

$$t_i^{(1)} = \cos\theta\left\{B_1\,y + \frac{RJ_1}{3\lambda_i T_{e\infty}\,y^2} + \frac{\beta_1\Omega}{3y^2} + \frac{1}{3}\left[y\int\limits_1^y \frac{\chi_1}{y^2}dy - \frac{1}{y^2}\int\limits_1^y \chi_1 y dy\right]\right\}.$$

Здесь

$$\Gamma_0 = t_S - 1, \quad t_S = T_S/T_{e\infty}, \; V = \frac{4}{3}\pi R^3, \; J_0 = \frac{1}{V}\int q_i dV, \; J_1 = \frac{1}{V}\int q_i z dV,$$

$$z=\cos\theta,\ M_1=-1-\omega_2\left(\frac{A_2}{2}-\frac{A_1}{4}\right)+C_S^*\left[\Gamma_1+\omega_1\left(\frac{A_2}{2}-\frac{A_1}{4}\right)\right],$$

$$M_0=C_S-C_{1e\infty},\quad C_S^*=\frac{\partial C_{1e}}{\partial T_i},\ \omega_1=\Gamma_0\,\beta_0,\quad \beta_0=\frac{\rho_e c_{pe} D_{12}}{\lambda_e},\ \ \omega_2=M_0,$$

$$y=r/R,\ \ \beta_1=\frac{\rho_i c_{pi} D_{12}}{\lambda_i},\ \ \chi=\psi_1+\beta_1\Omega\left(A_3+A_4y^2\right),\ \ \Omega_0=\int\limits_0^y\psi_0 dy,$$

$$\Gamma_1=\frac{RJ_1}{\lambda_i T_{e\infty}\delta}+3LD_{12}\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e T_{e\infty}\lambda_i\delta}+\frac{A_1}{4}\omega_1\left(1+\frac{\lambda_e}{\lambda_i\delta}\right)-\frac{A_2}{2}\omega_1\left(1-\frac{\lambda_e}{\lambda_i\delta}\right)+$$

$$+LD_{12}\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e T_{e\infty}\lambda_i\delta}\omega_2\left(\frac{A_2}{2}+\frac{A_1}{4}\right),$$

$$\delta=1+2\frac{\lambda_e}{\lambda_i}+2C_S^*LD_{12}\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e T_{e\infty}\lambda_i},$$

$$\psi_n=-\frac{(2n+1)R^2y^2}{2\lambda_i T_{e\infty}}\int\limits_{-1}^{1}q_i(r,\theta)P_n(cos\theta)d(\theta)\,.$$

Постоянные интегрирования A_m $(m=1,2,...,5)$, B_0, B_1, входящие в выражения для полей температур, относительных концентраций, массовой скорости и давления, определяются из граничных условий на поверхности частицы (3 - 9). В частности, для коэффициента A_2 имеем

$$A_2=-\frac{3}{2}\frac{1+2\mu_e/3\mu_i}{1+\mu_e/\mu_i}-\frac{\varepsilon}{U\left(1+\mu_e/\mu_i\right)}\left\{K\left(\Gamma_1^*-\frac{5}{8}\kappa_3\frac{1+4\mu_e/5\mu_i}{1+\mu_e/\mu_i}\right)+\right.$$
$$+D_{12}\frac{n_e^2 m_1}{\rho_e n_{2e}R}\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu_e}{\mu_i}+\frac{\rho_e}{\rho_{1i}}\right)\left[3-2C_S^*\Gamma_1^*+\left(2C_S^*\frac{\omega_1\lambda_e}{\lambda_i\delta}-\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\omega_2}{\delta}\left(1+2\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)\right)\frac{1+4\mu_e/5\mu_i}{1+\mu_e/\mu_i}\right]\right\},$$

где

$$K\ =\ K_{TS}^e\frac{\nu_e}{R\,t_S}-K_{TS}^i\frac{\nu_i}{R\,t_S}+\frac{1}{3\mu_i}\frac{\partial\sigma}{\partial t_i}+K_{DS}^e C_S^*\frac{D_{12}}{R}\ ,$$

$$\kappa_3=\frac{\omega_1\lambda_e}{\lambda_i\delta}+LD_{12}\,\omega_2\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e T_{e\infty}\lambda_i\delta}\ ,$$

$$\Gamma_1^*=\frac{RJ_1}{\lambda_i T_{e\infty}\delta}+3LD_{12}\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e T_{e\infty}\lambda_i\delta}\,.$$

Средняя температура поверхности капли T_S определяется из следующего выражения:

$$T_S=T_{e\infty}+\frac{1}{4\pi R\lambda_e}\int\limits_V q_i\,dV+LD_{12}\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e\lambda_e}\left(C_{1e\infty}-C_S\right).$$

Сила же, действующая на каплю, определяется интегрированием тензора напряжений по её поверхности, и в сферической системе координат находится по формуле [7,8]

$$\mathbf{F}_z = 4\pi R\mu_e U A_2 \mathbf{n}_z \; . \tag{15}$$

Выражение (15) позволяет оценивать общую силу, которая действует на крупную испаряющуюся каплю сферической формы в бинарной газовой смеси во внешнем заданном поле градиента концентрации с учетом движения среды. При этом внутри капли имеются неравномерно распределённые по её объёму тепловые источники. Конвективные члены в уравнении диффузии влияют на движение в поле градиента концентрации. Это может иметь большое значение в практических приложениях, например, при описании движения испаряющихся капель в диффузионных полях. Поскольку задача решается при малых относительных перепадах температуры, то вклад движения может составить не более 10%.

Чтобы оценить, какой вклад в силу диффузиофореза оказывает влияние движения среды (учет конвективных членов в уравнении теплопроводности и диффузии), необходимо конкретизировать природу тепловых источников. В этом случае выражения для J_0 и J_1 находятся в явном виде. В настоящее время достаточно хорошо разработаны численные методы, позволяющие решить задачу Ми внутри частицы [5,6].

Литература

1. Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах / В.С. Галоян, Ю.И. Яламов. – Ереван: Луйс,1985. – 208 с.

2. Вальтберг А.Ю. Теоретические основы охраны атмосферного воздуха от загрязнения промышленными аэрозолями / А.Ю. Вальтберг, П.М. Исянов, Ю.И. Яламов. – СПб.: Нииогаз-фильтр,1993. – 236 с.

3. Дерягин Б.В., Яламов Ю.И. Теория движения капель растворов в диффундирующей бинарной газовой смеси // ДАН СССР. – 1967. – 175;1. – С.59-62.

4. Щукин Е.Р. Избранные вопросы физики аэрозолей: учеб. пособие для студ. и асп. / Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов, З.Л. Шулиманова. – М.: МПУ,1992. – 298 с.

5. Борен К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К. Борен, Д. Хафмен. – М.: МИР, 1986. – 660 с.

6. Пришивалко А.П. Распределение энергии внутри светорассеивающих частиц / А.П. Пришивалко, Л.Г. Астафьева. – Мн., 1974. – 288 с.

7. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д.Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука,1986. – 736 с.

8. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж.Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1960. – 630 с.

9. Яламов Ю.И., Юшканов А.А. Диффузионное скольжение бинарной газовой смеси вдоль искривленной поверхности // ДАН СССР. – 1977. – 237;2. – С.303-306.

10. Яламов Ю.И., Поддоскин А.Б., Юшканов А.А. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны // ДАН СССР. – 1980. – 254;2. – С.1047-1050.

INFLUENCE OF MEDIUM MOVEMENT ON DIFFUSIOPHORESIS OF LARGE VAPOR DROP OF SPHERICAL FORM IN VISCOUS GASEOUS MEDIUM

K.S. Ryazanov

Belgorod State University

Studencheskaya St.,14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: rksb@rambler.ru

It is found the analytic solution of the stationary movement problem at small Reinolds numbers corresponding to large vapor drop of spherical form which is in the gas binary mixture when the concentration gradient exists. It is supposed that the average temperature of the particle surface differs negligibly from the temperature of the surrounding gas medium. During the solving of the equation system of gas dynamics analytic expressions of the force and the velocity of diffusiophoresis are obtained with the account of the medium movement influence.

Key words: diffusiophoresis, Hadamar-Rybchinskii problem.