УДК 511.3

ДРОБНЫЕ МОМЕНТЫ РЯДОВ ДИРИХЛЕ ИЗ КЛАССА СЕЛЬБЕРГА

Д.Б. Демидов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Demidovnext@yandex.ru

Аннотация. Получена асимптотическая формула и нижняя оценка дробных моментов рядов Дирихле из класса Сельберга.

Ключевые слова: ряд Дирихле, дробные моменты.

1. Введение

Пусть $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, s – комплексная переменная. В книге [1, с. 155] приведена теорема А.Е. Ингама о том, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}}\,,$$

где $\dfrac{1}{2}<\sigma<1,\ \ 0<k\le 2$, $\tau_k(n)$ – коэффициенты ряда Дирихле для $\zeta^k(s)$ при $\mathrm{Re}s>1$.

В 1981 году Р.Т. Турганалиев [2] доказал асимптотическое равенство со степенным понижением для дробного момента дзета-функции. Результат Турганалиева изложен в нижеследующем утверждении.

Пусть $\dfrac{1}{2}<\sigma<1,\ \ 0<k<2$, *тогда выполняется*

$$\int\limits_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt=T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}}+O(T^{1-\xi})\,,$$

где $0<\xi=\xi(\sigma,k)$.

Основная идея его работы заключалась в приближении дробной степени дзета-функции конечным отрезком ряда Дирихле.

D.R. Heath-Brown в своей работе [3] получил правильные по порядку верхнюю и нижнюю оценки для дробных моментов на критической прямой. Его результат представлен в следующих утверждениях.

1. *Пусть k – рациональное число, $k>0$, тогда*

$$\int\limits_1^T |\zeta(1/2+it)|^{2k}dt\gg T\log^{k^2}T\,.$$

2. *При $k=1/n$, n – натуральное число, тогда справедливо неравенство:*

$$\int\limits_1^T |\zeta(1/2+it)|^{2k}dt\ll T\log^{k^2}T\,.$$

В 1985 году И.Ш. Джаббаров [4] получил асимптотическую формулу для дробных моментов $\zeta(\sigma+it)$ при σ стремящемся к $1/2$ с ростом T.

Пусть $\dfrac{1}{2}+\dfrac{(\ln\ln\ln T)^2}{\ln\ln T}\le\sigma<1,\ 0<k\le 2,\ T\ge 10^3$. *Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt = T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}}+O\left(\Delta\left(T^{1-\frac{2\sigma-1}{2(3-2\sigma)}}+T^{1-\frac{2\sigma-1}{2-\sigma}(1-k(1-\sigma))}\right)\right),$$

где

$$\Delta=\exp\left\{c_0\frac{(\ln\ln\ln T)^2}{\ln\ln T}\right\},\quad c_0>0\,.$$

В 2007 г. A. Laurincikas и J. Steuding [5] изучали свойства дробных моментов от специального вида дзета-функций, ассоциированных с параболическими формами. Для формулировки теоремы A. Laurincikas и J. Steuding нам понадобятся следующие определения.

Пусть $SL_2(\mathbb{Z})$ – полная модулярная группа, состоит из целочисленных матриц с определителем равным единице.

Функция $f(z)$ – мероморфная на верхней полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$, r – целое число. Предположим, что $f(z)$ удовлетворяет соотношению

$$f(\gamma z)=(cz+d)^r f(z)\ \text{для всех}\ \ \gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})\,.$$

Далее предположим, что $f(z)$ обращается в нуль на бесконечности, т.е. $f(z)$ имеет разложение в ряд Фурье

$$f(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}c(n)e^{2\pi iz}\,,$$

Она называется параболической формой веса r относительно $SL_2(\mathbb{Z})$. Функция

$$\phi(s,f)=1+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{c(m)}{m^s},\ \ s=\sigma+it\,,$$

называется дзета-функция, ассоциированная с параболической формой $f(z)$. Функция $\phi(s,f)$ удовлетворяет функциональному уравнению вида:

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\phi(s,f)=(-1)^{r/2}(2\pi)^{s-r}\Gamma(r-s)\phi(r-s,f)\,,$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера.

Основное утверждение статьи [5] заключается в следующем.

Пусть $k=1/n$, n *– натуральное число. Тогда при* $T\to\infty$

$$\int\limits_0^T |\phi(r/2+it,f)|^{2k}dt \gg T(\ln T)^{k^2}\,.$$

Пусть, далее, выполняется аналог гипотезы Римана для $\phi(s,f)$ и n – натуральное чётное число. Тогда

$$\int_0^T |\phi(r/2+it,f)|^{2k}dt \ll T(\ln T)^{k^2}.$$

В настоящей работе выводится асимптотическая при $T \to \infty$ формула для интеграла

$$I_k(\sigma,T) = \int_1^T |F(\sigma+it)|^{2k}dt$$

и правильная по порядку нижняя оценка для интеграла $I_k(1/2,T)$, где $F(s)$ – функция из класса Сельберга степени 2. Этот класс был определен в 1992 году А. Сельбергом [6] следующим образом:

Определение 1. *Рядом Дирихле из класса S называется функция $F(s), s=\sigma+it$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \quad \mathrm{Re}s > 1;$

2) существует неотрицательное целое число m такое, что функция $(s-1)^m F(s)$ целая;

3) коэффициенты Дирихле $a(n)$ удовлетворяют неравенствам

$$a(n) \ll_\epsilon n^\varepsilon$$

для любого положительного ε, причем $a(1)=1$;

4) существует функция $\gamma_F(s)$ вида

$$\gamma_F(s) = \varepsilon_1 Q^s \prod_{l=1}^{k} \Gamma(\lambda_l s + \mu_l),$$

где

$$|\varepsilon_1| = 1, \quad Q>0, \quad \lambda_l > 0, \quad \mathrm{Re}\,\mu_l \ge 0,$$

и такая, что для функции $\Phi(s) = \gamma_F(s)F(s)$ справедливо тождество

$$\Phi(s) = \overline{\Phi}(1-\overline{s}); \tag{1}$$

5) при $\sigma > 1$ функция $F(s)$ раскладывается в эйлерово произведение:

$$F(s) = \prod_p (1 + a(p)p^{-s} + a(p^2)p^{-2s} + \cdots),$$

здесь и далее, p обозначает простые числа;

$$\ln F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s},$$

где $b(n) = 0$, если n не равно положительной степени простого числа, причем $b(n) \ll n^{\theta}$ для некоторого $\theta \leq 1/2$.

Определение 2. *Степенью функции $F(s)$ из класса Сельберга называется число d_F, которое определяется следующим образом:*

$$d_F = 2\sum_{l=1}^{k} \lambda_l \,.$$

Определение 3. *Примитивной функцией из класса S степени 2 называется функция $F(s)$, которая не представляется в виде $G_1(s)G_2(s)$, где $G_1(s)$, $G_2(s) \in S$.*

Для примитивных функций Сельберг сформулировал в [6] ряд гипотез, в частности нам понадобится в дальнейшем следующая.

Гипотеза 1. *При $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{p \leq x} \frac{|a(p)|^2}{p} = \ln\ln x + O(1), \tag{2}$$

где $a(n)$ – коэффициенты Дирихле примитивной функции $F(s)$.

Пусть в дальнейшем коэффициенты Дирихле функции $F(s)$ удовлетворяют гипотезе, которая представлена в [7]:

Гипотеза 2. *При $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{n \leq x} |a(n)|^2 = A_F x + O\left(x \ln^{-4} x\right), \tag{3}$$

где $a(n)$ – коэффициенты Дирихле примитивной функции $F(s)$.

Пусть $k = \dfrac{u}{v}$, $0 < k < 1$, u, v – взаимно простые натуральные числа, $T \geq 10$, $F(s)$ – примитивная функция Дирихле из класса Сельберга степени 2, $s = \sigma + it$. Определим мультипликативную функцию $d_k(n)$ следующим образом:

$$F^k(s) = \prod_p (1 + a(p)p^{-s} + a(p^2)p^{-2s} + \ldots)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s},$$

где $s = \sigma + it, \sigma > 1$. Основной результат работы изложен в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $T > T_0 > 0$, $0 < k < 1$, $k = \dfrac{u}{v}$, u, v – взаимно простые натуральные числа, $F(s)$ – функция из класса Сельберга степени 2, $s = \sigma + it$, и пусть коэффициенты Дирихле $a(n)$ функции $F(s)$ удовлетворяют формулам (2), (3). Тогда для функции $I_k(\sigma, T)$ выполняется:*

$$I_k(\sigma, T) = T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(\frac{T}{(\ln\ln T)^k}\right),$$

при $\dfrac{1}{2} + \dfrac{c\ln\ln T}{\ln T} \leq \sigma < 1$, $c = \dfrac{2}{3}u + \dfrac{1}{2}$.

Для $I_k(1/2, T)$ справедлива оценка

$$I_k\left(\frac{1}{2}, T\right) \gg T\left(\ln T\right)^{k^2}.$$

2. Вспомагательные результаты

Лемма 1 (см. [8, с. 112]). *Пусть $f(s)$ – регулярная в полосе $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$ и конечная для $\alpha \le \operatorname{Re} s \le \beta$. Кроме того, $f(s) \to 0$ при $|\operatorname{Im} s| \to \infty$, $\alpha \le \operatorname{Re} s \le \beta$. Тогда для $\alpha \le \gamma \le \beta$ и $q > 0$ выполняется:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\gamma+it)|^q\,dt \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\alpha+it)|^q dt\right)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\beta+it)|^q dt\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

Лемма 2 (см. [9]). *Пусть c_n – произвольная последовательность комплексных чисел такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2$ сходится. Тогда*

$$\int_0^T \left|\sum_{n=1}^{N} c_n n^{it}\right|^2 dt = \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 (T + O(n)).$$

Лемма 3 (см. см. в [7]). *Пусть ε – произвольно малое положительное число, $F(s)$ – функция из класса Сельберга степени 2, $s = \sigma + it$, $0,5T \le t \le 2,5T$ и $T \ge T_0 > 0$. Тогда справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\exp\left(-n/T\right)}{n^s} +$$
$$+ \bar{\varepsilon}_2^2 (Q_1 t)^{1-2s} \exp\left(2it - 2iQ_2 \ln t\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}(n)}{n^{1-s}} \left(1 - \exp\left(-\frac{Q_1^2 t^2}{nT}\right)\right)\right) + O(T^{\varepsilon - \frac{1}{2}}),$$

где

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \exp\left(i\left(\sum_{l=1}^{k} (\operatorname{Im}\mu_l)\ln\lambda_l + \frac{\pi}{2}\sum_{l=1}^{k}\operatorname{Re}\mu_l - \frac{\pi}{4}(k-1)\right)\right),$$

$$Q_1 = Q\exp\left(\sum_{l=1}^{k} \lambda_l \ln\lambda_l\right), \quad Q_2 = \sum_{l=1}^{k} \operatorname{Im}\mu_l,$$

$\varepsilon_1, Q, \lambda_l, \mu_l$ – постоянные из функционального уравнения (1) для функции $F(s)$.

Лемма 4. *Пусть $F(s)$ – функция из класса Сельберга степени 2, $s = \sigma + it$, $\dfrac{\ln\ln T}{2\ln T} \le \sigma < 1$. Справедливо неравенство*

$$\int_{T/2}^{T} |F(\sigma+it)|^2 dt \ll T\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

□ Применяя лемму 3 к функции $F(s), s=\sigma+it, \sigma \geq \dfrac{\ln\ln T}{2\ln T}$, имеем

$$\int\limits_{T/2}^{T}|F(\sigma+it)|^2dt \ll \int\limits_{T/2}^{T}\left|\sum_{n\leq T}\frac{a(n)}{n^{\sigma+it}}\right|^2 dt + T^{1-2\sigma}\int\limits_{T/2}^{T}\left|\sum_{n\leq T}\frac{\bar{a}(n)}{n^{1-\sigma-it}}\right|^2 dt +$$

$$+U_1+U_2+U_3+U_4+T^{2\varepsilon},$$

где

$$U_1=\int\limits_{T/2}^{T}\left|\sum_{n\leq T}\frac{a(n)}{n^{\sigma+it}}\left(1-e^{-\frac{n}{T}}\right)\right|^2 dt\,;$$

$$U_2=\int\limits_{T/2}^{T}\left|\sum_{n>T}\frac{a(n)}{n^{\sigma+it}}e^{-\frac{n}{T}}\right|^2 dt\,;$$

$$U_3=T^{1-2\sigma}\int\limits_{T/2}^{T}\left|\sum_{n\leq T}\frac{\bar{a}(n)}{n^{1-\sigma-it}}e^{-\frac{Q_1^2t^2}{nT}}\right|^2 dt\,;$$

$$U_4=T^{1-2\sigma}\int\limits_{T/2}^{T}\left|\sum_{n>T}\frac{\bar{a}(n)}{n^{1-\sigma-it}}\left(1-e^{-\frac{Q_1^2t^2}{nT}}\right)\right|^2 dt\,.$$

Повторяя рассуждения работы [7, с. 11] для интегралов U_1, U_2, U_3, U_4, получим

$$\int\limits_{T/2}^{T}|F(\sigma+it)|^2dt \ll \int\limits_{T/2}^{T}\left|\sum_{n\leq T}\frac{a(n)}{n^{\sigma+it}}\right|^2 dt + T^{1-2\sigma}\int\limits_{T/2}^{T}\left|\sum_{n\leq T}\frac{\bar{a}(n)}{n^{1-\sigma-it}}\right|^2 dt + T\,.$$

Пользуясь равенством

$$\left|\sum_{n\leq T}\frac{a(n)}{n^{\sigma+it}}\right|^2=\sum_{n\leq T}\frac{a(n)}{n^{\sigma+it}}\sum_{n\leq T}\frac{\overline{a}(n)}{n^{\sigma-it}}\,,$$

имеем

$$\int\limits_{T/2}^{T}|F(\sigma+it)|^2dt \ll T\sum_{n\leq T}\frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}}+\sum_{n\leq T}\sum_{m\leq T, m\neq n}\frac{|a(n)||\overline{a}(m)|}{(nm)^{\sigma}\ln(n/m)}+$$
$$+T^{2-2\sigma}\sum_{n\leq T}\frac{|a(n)|^2}{n^{2-2\sigma}}+T^{1-2\sigma}\sum_{n\leq T}\sum_{m\leq T, m\neq n}\frac{|a(n)||\overline{a}(m)|}{(nm)^{1-\sigma}}+T\,. \tag{4}$$

Применяя формулу частного суммирования к первой и третьей суммам из правой части последнего неравенства и пользуясь гипотезой 2, получим

$$T\sum_{n\le T}\frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}}+T^{2-2\sigma}\sum_{n\le T}\frac{|a(n)|^2}{n^{2-2\sigma}}\ll T(\sigma-1/2)^{-1}+T\,.$$

Теперь рассмотрим сумму

$$\sum_{n\le T}\sum_{m\le T,m\ne n}\frac{|a(n)||\overline{a}(m)|}{(nm)^\sigma\ln(n/m)}\ll\sum_{1\le h\le T}\frac{1}{h}\sum_{m\le T}\frac{|a(m+h)||\overline{a}(m)|m}{((m+h)m)^\sigma}\ll$$

$$\ll\sum_{1\le h\le T}\frac{1}{h}\sqrt{\sum_{m\le T}\frac{|a(m)|^2}{m^{2\sigma-2}}\sum_{l\le T}\frac{|a(l)|^2}{l^{2\sigma}}}\,.$$

Применим к последним суммам формулу частного суммирования и гипотезу 2. Тогда

$$\sum_{n\le T}\sum_{m\le T,m\ne n}\frac{|a(n)||\overline{a}(m)|}{(nm)^\sigma\ln(n/m)}\ll T^{2-2\sigma}\ln T\,.$$

Таким же образом можно оценить следующую сумму

$$T^{1-2\sigma}\sum_{n\le T}\sum_{m\le T,m\ne n}\frac{|a(n)||\overline{a}(m)|}{(nm)^{1-\sigma}}\ll T^{2-2\sigma}\ln T\,.$$

Подставляя получившиеся неравенства в соотношение (4), получаем утверждение леммы. ■

Лемма 5 (см. [3, с. 70].) *Пусть $F(s)$ – функция из класса S степени 2, $s=\sigma+it$, $\frac{1}{2}\le\sigma<1$ и $T\ge T_0>0$. Тогда для рационального числа $0<k<1$ справедливо неравенство*

$$J(\sigma)\ll T^{\sigma-1/2}J(1/2)^{3/2-\sigma}+e^{-\frac{kT^2}{8}}\,,$$

где

$$J(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\sigma+it)|^{2k}w(t)dt\,,\tag{5}$$

$$w(t)=\int_{T}^{2T}e^{-2k(t-\tau)^2}d\tau\,,\tag{6}$$

Лемма 6. *Пусть $F(s)$ – функция из класса Сельберга степени 2 и $s=\sigma+it$. Пусть далее $1/2\le\sigma_0<\sigma<1, k=u/v$, где $u<v$ с натуральными числами u,v и $T\ge T_0>0, N\le T^{15/16}$. Тогда выполняется неравенство*

$$K(\sigma)\ll K(\sigma_0)^{\frac{5-4\sigma}{5-4\sigma_0}}(TN^{-\frac{5}{4v}})^{\frac{4\sigma-4\sigma_0}{5-4\sigma_0}}+K(1/2)^{\frac{5-4\sigma}{5-4\sigma_0}}e^{-\frac{kT^2}{8}(\sigma-\sigma_0)}\,,$$

где

$$K(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma+it)|^{\frac{2}{v}}w(t)dt, \tag{7}$$

$w(t)$ *– определяется формулой (6),*

$$g(\sigma+it)=F^{u}(\sigma+it)-\left(\sum_{n\leq N}\frac{d_k(n)}{n^{\sigma+it}}\right)^{v}, \tag{8}$$

$d_k(n)$ *– коэффициенты Дирихле для функции* $F^k(s)$.

□ Пусть $F(s)$ – функция из класса Сельберга степени 2, тогда существует неотрицательное число m такое, что функция $(s-1)^mF(s)$ – целая. Мы будем пользоваться леммой 1. Возьмем

$$f(s)=(s-1)^{mu}g(s)e^{u(s-i\tau)^2},$$

$\gamma=\sigma,\alpha=\sigma_0,\beta=5/4$ и $q=2/v$ в лемме 1, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma+it)|^{2/v}dt\leq\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma_0+it)|^{2/v}dt\right)^{\frac{5-4\sigma}{5-4\sigma_0}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(5/4+it)|^{2/v}dt\right)^{\frac{4\sigma-4\sigma_0}{5-4\sigma_0}}. \tag{9}$$

Рассмотрим отдельно интегралы в формуле (9)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma+it)|^{2/v}e^{-2k(t-\tau)^2}dt\ll\int\limits_{\tau/2}^{3\tau/2}|g(\sigma+it)|^{2/v}e^{-2k(t-\tau)^2}dt+e^{-\frac{2k\tau^2}{5}}\ll$$

$$\ll\tau^{-2mk}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma+it)|^{2/v}dt+e^{-\frac{2k\tau^2}{5}},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma_0+it)|^{2/v}dt\ll\tau^{2mk}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma_0+it)|^{2/v}e^{-2k(t-\tau)^2}dt+e^{-\frac{2k\tau^2}{5}},$$

аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(5/4+it)|^{2/v}dt\ll\tau^{2mk}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(5/4+it)|^{2/v}e^{-2k(t-\tau)^2}dt+e^{-\frac{2k\tau^2}{5}}. \tag{10}$$

Для подынтегральной функции в формуле (10) справедливо

$$g(5/4+it)=\sum_{n>N}\frac{A_k(n)}{n^{5/4+it}},$$

где

$$A_k(n) = \sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_v = n} \prod_{j=1}^{v} d_k(n_j) - \sum_{\substack{n_1\cdot\ldots\cdot n_v = n,\\ n_1 \le N_1,\\ \ldots\\ n_v \le N_1}} \prod_{j=1}^{v} d_k(n_j),$$

$$|A_k(n)| \ll n^{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0\,.$$

Подставляя все полученные оценки в формулу (9) и интегрируя по промежутку $T \le \tau \le 2T$, получаем

$$K(\sigma) \ll K(\sigma_0)^{\frac{5-4\sigma}{5-4\sigma_0}} \left[\left(\int\limits_{T/2}^{3T} \left| \sum_{n>N} \frac{A_k(n)}{n^{5/4+it}} \right|^{2/v} dt \right)^{\frac{4\sigma-4\sigma_0}{5-4\sigma_0}} + e^{-\frac{T^2 k}{8}(\sigma-\sigma_0)} \right]. \tag{11}$$

Применяя лемму 2 к следующему интегралу, имеем

$$\int\limits_{T/2}^{3T} \left| \sum_{n>N} \frac{A_k(n)}{n^{5/4+it}} \right|^{2} dt \ll T \sum_{n>N} \frac{|A_k(n)|^2}{n^{5/2}} + \sum_{n>N} \frac{|A_k(n)|^2}{n^{3/2}}\,. \tag{12}$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера и формулой (12). Тогда

$$\int\limits_{T/2}^{3T} \left| \sum_{n>N} \frac{A_k(n)}{n^{5/4+it}} \right|^{2/v} dt \ll T N^{-\frac{3}{2v}+\frac{3\varepsilon}{2}}\,.$$

Пусть выполняется неравенство $\varepsilon < (6v)^{-1}$. Подставляя последнюю оценку в формулу (11), получаем утверждение леммы. ■

Лемма 7. *Пусть k – рациональное число и $c_k > 0$. Тогда*

$$\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{-k^2} \ll \sum_{n \le N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} \ll \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{-k^2}$$

при

$$\frac{1}{2} + \frac{c_k}{\ln N} \le \sigma < 1\,.$$

Более того,

$$\log^{k^2} N \ll \sum_{n \le N} \frac{|d_k(n)|^2}{n} \ll \log^{k^2} N\,,$$

где $d_k(n)$ – коэффициенты Дирихле функции $F^k(\sigma+it)$, $F(\sigma+it) \in S$.

□ Выбирая $\sigma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{c_k}{\ln N}$ и замечая, что

$$\frac{1}{n} \ll \frac{1}{n^{2\sigma}} \ll \frac{1}{n}\,,$$

мы видим, что второе утверждение леммы следует из первого.

Справедливо неравенство:

$$\sum_{n\le N}\frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}}\,. \tag{13}$$

Ряд, стоящий справа в последнем неравенстве, можно записать в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} = S(2\sigma)+O(1)\,,$$

где

$$S(2\sigma)=\prod_p\left(1+\frac{l^2|a(p)|^2}{p^{2\sigma}}\right)\,,$$

произведение ведется по простым числам p.

Пусть $\mu(n)$ – функция Мебиуса. Следовательно,

$$\sum_{n\le N}\frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|d_k(n)|^2\mu^2(n)}{n^{2\sigma}}\left(1-\left(\frac{n}{N}\right)^{\sigma-\frac12}\right) = S(2\sigma)-N^{\frac12-\sigma}S\left(\frac12+\sigma\right)\,. \tag{14}$$

Преобразуем сумму $S(1+r)$, в которой число r принимает значения $2\sigma-1$ или $\sigma-\frac12$. Для функции $\ln S(1+r)$ выполняется:

$$\ln S(1+r)=k^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)|a(n)|^2}{n^{1+r}}+O(1)\,,$$

где

$$\alpha(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n \text{ – простое число,}\\ 0, & \text{если } n \text{ – составное число.}\end{cases}$$

Применим преобразование Абеля к сумме из правой части последнего равенства.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)|a(n)|^2}{n^{1+r}}=\frac1e\sum_{p\le e^{\frac1r}}\frac{|a(p)|^2}{p}+r\int\limits_1^{e^{\frac1r}}\sum_{p\le x}\frac{|a(p)|^2}{p}\frac{dx}{x^{r+1}}+r\int\limits_{e^{\frac1r}}^{\infty}\sum_{e^{\frac1r}<p\le x}\frac{|a(p)|^2}{p}\frac{dx}{x^{r+1}}\,.$$

Пусть для коэффициентов Дирихле функции $F(s)$ справедлива гипотеза Сельберга. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)|a(n)|^2}{n^{1+r}}=-\frac1e\ln r-\left(1-\frac1e\right)\ln r+\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln y}{e^y}\,dy+O(1)\,.$$

Из определения гамма-функции следует

$$\gamma=-\Gamma'(1)=-\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln y}{e^y}\,dy\,,$$

где γ – постоянная Эйлера. Таким образом,

$$\ln S(1+r) = -k^2 \ln r + O(1)\,.$$

Первое утверждение леммы сразу следует из неравенств (13) и (14). ■

Лемма 8. *Пусть $d_k(n)$ – коэффициенты функции $F^k(\sigma+it)$, $F(\sigma+it) \in S$, число k – рациональное, $T \geq T_0 > 0$, $T^{\frac{1}{16}} < N < T^{\frac{15}{16}}$, $c_k > 0$. Тогда выполняются соотношения:*

$$T\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{-k^2} T \ll L(\sigma) \ll T\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{-k^2}$$

при

$$\frac{1}{2} + \frac{c_k}{\ln N} \leq \sigma < 1\,.$$

Кроме того,

$$T \ln^{k^2} T \ll L(1/2) \ll T \ln^{k^2} T\,,$$

где

$$L(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n \leq N} \frac{d_k(n)}{n^{\sigma+it}} \right|^2 w(t)dt, \tag{15}$$

и $w(t)$ определяется равенством (6).

□ Из определения функции $w(t)$ следует, что

$$L(\sigma) = \int\limits_{0}^{3T} \left| \sum_{n \leq N} \frac{d_k(n)}{n^{\sigma+it}} \right|^2 w(t)dt + O(1)\,. \tag{16}$$

Кроме того, $w(t) \gg t$ для каждого t и $w(t) \gg 1$ при $4T/3 \leq t \leq 5T/3$. Используя лемму 2 при $T^{\frac{1}{16}} < N < T^{\frac{15}{16}}$, имеем

$$\int\limits_{0}^{3T} \left| \sum_{n \leq N} \frac{d_k(n)}{n^{\sigma+it}} \right|^2 dt \ll T \sum_{n \leq N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}}$$

и

$$\int\limits_{4T/3}^{5T/3} \left| \sum_{n \leq N} \frac{d_k(n)}{n^{\sigma+it}} \right|^2 dt \gg T \sum_{n \leq N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}}\,.$$

Применим последние оценки и лемму 7 к формуле (16). В результате, получаем утверждение леммы. ■

3. Доказательство теоремы

I. Получение асимптотической формулы.

Пусть $k = \frac{u}{v}$, $u < v$ с натуральными числами v, u; $\frac{1}{2} + \frac{c \ln\ln T}{\ln T} \le \sigma < 1$, $c = \frac{2u}{3} + \frac{1}{2}$; $N = T^{9/10}$. Справедливо равенство:

$$\int_T^{2T} |F(\sigma + it)|^{2k} dt = \int_T^{2T} |S_N(\sigma + it)|^2 dt + O\left(\int_T^{2T} |g(\sigma + it)|^{2/v} dt\right), \tag{17}$$

где

$$g(\sigma + it) = F^u(\sigma + it) - S_N^v(\sigma + it),$$

$$S_N(\sigma + it) = \sum_{n \le N} \frac{d_k(n)}{n^{\sigma + it}}.$$

Для оценки главного члена в (17) мы воспользуемся леммой 2, в результате чего, находим

$$\int_T^{2T} |S_N(\sigma + it)|^2 dt = T \sum_{n \le N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(\sum_{n \le N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma - 1}}\right). \tag{18}$$

Остаток можно с помощью преобразования Абеля и леммы 7 записать следующим образом:

$$O\left(\sum_{n \le N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma - 1}}\right) = O\left(N (\ln N)^{k^2}\right).$$

Следовательно, неравенство (18) переписывается в виде

$$\int_T^{2T} |S_N(\sigma + it)|^2 dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} - T \sum_{n > N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(N (\ln N)^{k^2}\right).$$

Далее, посредством преобразования Абеля и леммы 7, оценим вторую сумму, стоящую справа в последнем неравенстве

$$\sum_{n > N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} \ll (2\sigma - 1) \int_N^{\infty} \left(\ln \frac{x}{N}\right)^{k^2} \frac{dx}{x^{2\sigma}} = (2\sigma - 1)^{-k^2} N^{1 - 2\sigma} \Gamma\left(k^2 + 1\right).$$

В итоге, для главного члена формулы (17) справедливо соотношение

$$\int_T^{2T} |S_N(\sigma + it)|^2 dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(N (\ln N)^{k^2}\right) + O\left(T N^{1 - 2\sigma} (2\sigma - 1)^{-k^2}\right).$$

Нам осталось оценить остаточный член в (17). Рассмотрим два случая:

1. В первом случае выполняется:

$$\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\,dt \le \frac{T}{\ln\ln T}.$$

2. Во втором случае имеет место неравенство:

$$\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\,dt > \frac{T}{\ln\ln T}.$$

Воспользовавшись леммой 6 и последним неравенством, имеем

$$\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\,dt \ll N^{-\frac{5(\sigma-\sigma_0)}{3v}} \int_T^{2T} |g(\sigma_0+it)|^{2/v}\,dt\,,$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\ln\ln T}{2\ln T}.$$

Из неравенства

$$\int_T^{2T} |g(\sigma_0+it)|^{2/v}\,dt \ll \int_T^{2T} |F(\sigma_0+it)|^{2k}dt + \int_T^{2T} |S_N(\sigma_0+it)|^{2}dt$$

следует, что

$$\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\,dt \ll N^{-\frac{5(\sigma-\sigma_0)}{3v}} \left[\int_T^{2T} |F(\sigma_0+it)|^{2k}dt + \int_T^{2T} |S_N(\sigma_0+it)|^{2}dt\right]. \qquad (19)$$

На основании неравенства Гельдера, имеет место

$$\int_T^{2T} |F(\sigma_0+it)|^{2k}dt \ll T^{1-k}\left(\int_T^{2T} |F(\sigma_0+it)|^{2}dt\right)^{k}.$$

Далее из оценки второго момента при $\sigma_0 = \dfrac{\ln\ln T}{2\ln T}$ (лемма 4) получим

$$\int_T^{2T} |F(\sigma_0+it)|^{2k}dt \ll T\left(\frac{\ln T}{\ln\ln T}\right)^{k}.$$

Используя лемму 8 и последнее неравенство, соотношение (19) при $N = T^{9/10}$, $c \ge \frac{2}{3}u + \frac{1}{2}$ оценивается следующим образом:

$$\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\,dt \ll N^{-\frac{5(\sigma-\sigma_0)}{3v}} T\left(\frac{\ln T}{\ln\ln T}\right)^{k} \ll \frac{T}{(\ln\ln T)^k}.$$

Следовательно, в обоих случаях выполняется:

$$\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\, dt \ll \frac{T}{(\ln\ln T)^k}\,.$$

Подставляя получившиеся соотношения для главного члена и остатка в (19) при $N = T^{9/10}$, имеем

$$\int_T^{2T} |F(\sigma+it)|^{2k} dt = T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(T(\ln T)^{k^2-\frac{9c}{5}}\right) + O\left(\frac{T}{(\ln\ln T)^k}\right).$$

Положив $2^{-j}T$ вместо T и суммируя по $j = 1, 2, 3, \cdots$, мы получаем первое утверждение теоремы.

II. Получение нижней оценки $I(1/2, T)$.

Пусть $\sigma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\eta}{\ln T}$, η – положительная постоянная. Справедливы следующие неравенства

$$K\left(\frac{1}{2}\right) \ll J\left(\frac{1}{2}\right) + L\left(\frac{1}{2}\right), \tag{20}$$

$$L(\sigma) \ll J(\sigma) + K(\sigma), \tag{21}$$

где функции $K(\sigma)$, $L(\sigma)$, $J(\sigma)$ определяются формулами (7), (15) и (5) соответственно.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть $K(1/2) \le T$. Тогда мы воспользуемся леммами 8 и 5 при $\sigma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\eta}{\ln T}$ и неравенством (21). В результате, имеем

$$T(\ln T)^{k^2} \ll L\left(\frac{1}{2}\right) - K\left(\frac{1}{2}\right) \ll J\left(\frac{1}{2}\right).$$

Следовательно,

$$J\left(\frac{1}{2}\right) \gg T(\ln T)^{k^2}.$$

2. Пусть $K(\frac{1}{2}) > T$. Сначала мы применим лемму 6 при $N = T^{9/10}$, $\sigma_0 = 1/2$, $\sigma = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\eta}{\ln T}$ к неравенству (21):

$$L(\sigma) \ll J(\sigma) + K\left(\frac{1}{2}\right) T^{-\frac{3(\sigma-1/2)}{2v}}\,.$$

Далее, воспользуемся неравенством (20)

$$L(\sigma) \ll J(\sigma) + \left(J\left(\frac{1}{2}\right) + L\left(\frac{1}{2}\right)\right) e^{-\frac{3\eta}{2v}}\,.$$

Теперь применим к функции $J(\sigma)$ лемму 5 при $\sigma = 1/2 + \dfrac{\eta}{\ln T}$

$$L(\sigma) \ll e^{\eta}\left(J\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{3/2-\sigma} + e^{-\frac{3\eta}{2v}}\left(J\left(\frac{1}{2}\right) + L\left(\frac{1}{2}\right)\right). \tag{22}$$

Возможны два различных случая. В первом из них имеет место

$$L(\sigma) \ll e^{-\frac{3\eta}{2v}} L\left(\frac{1}{2}\right).$$

Тогда из леммы 8 видно, что

$$T(\ln T)^{k^2}\eta^{-k^2} \ll L(\sigma) \ll e^{-\frac{3\eta}{2v}} L\left(\frac{1}{2}\right) \ll T(\ln T)^{k^2} e^{-\frac{3\eta}{2v}}.$$

Последнее неравенство при больших η не выполняется.

Во втором случае выполняется

$$L(\sigma) \ll e^{\eta}\left(J\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{3/2-\sigma} + e^{-\frac{3\eta}{2v}} J\left(\frac{1}{2}\right).$$

Применим лемму 8 при $\sigma = 1/2 + \dfrac{\eta}{\ln T}, \eta \geq c_1$. Тогда

$$J\left(\frac{1}{2}\right) \gg T(\ln T)^{k^2}.$$

Таким образом, в обоих случаях

$$J\left(\frac{1}{2}\right) \gg T(\ln T)^{k^2}. \tag{23}$$

Для получения второго утверждения теоремы мы будем пользоваться оценкой (23). Из формулы (6) видно, что $w(t) \ll 1$ для всех $t \leq 0$ и $t \geq 3T$. Поэтому выполняется следующая цепочка неравенств:

$$T(\ln T)^{k^2} \ll J\left(\frac{1}{2}\right) \ll I_k\left(\frac{1}{2}, 3T\right).$$

Теорема доказана. ■

Литература

1. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана / Е.К. Титчмарш. – М.: ИЛ, 1953.

2. Турганалиев Р.Т. Асимптотическая формула для средних значений дробной степени дзета-функции Римана / Т.Р. Турганалиев // Тр. МИАН СССР. – М.:Наука, 1981.

3. Heath-Brown D.R. Fractional moments of the Riemann zeta-function // J. London Math. Soc. – 1981. – 2,24. – P.65-78.

4. Джаббаров И.Ш. Дробные моменты ζ-функции // Математические заметки. – 1985. – 38,4.

5. Laurincikas A., Steuding J. On Fractional Power Moments of Zeta-Functions Associated with Certain Cusp Forms //Acta Appl. Math. – 2007. – P.25-39.

6. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proc. of the Amalfi Conf. on Anal. Number Theory. Univ. di Salerno. – 1992. – P.367-385.

7. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга // Тр.матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1996. – 60,4.

8. Gabriel R.M. Some results concerning the integrals of moduli of regular functions along certain curves // J. London Math. Soc. – 1927. – 2. – P.112-117.

9. Ivic A. The Riemann zeta-function / A. Ivic. – N.Y.: John Wiley and Sons, 1985.

ON FRACTIONAL MOMENTS OF DIRICHLET'S SERIES OF THE SELBERG CLASS

D.B. Demidov

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Demidovnext@yandex.ru

Abstract. It is obtained the asymptotic formula and the lower estimate on fractional moments of the Dirichlet series of the Selberg class.

Key words: Dirichlet's series, fractional moments.