УДК 517.983

К ВОПРОСУ О ВОЗМУЩЕНИИ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Х.К. Авад, А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Исследуется разрешимость задачи типа Коши для уравнения с дробными производными Римана-Лиувилля после ее возмущения неограниченным оператором.

Ключевые слова: уравнение с дробными производными, задача типа Коши, возмущение неограниченным оператором.

В банаховом пространстве E рассмотрим следующую задачу типа Коши

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0, \tag{2}$$

где $0 < \alpha < 1$, $D^{\alpha-1}u(t) = I^{1-\alpha}u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)\,ds$ — левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\alpha$ ($I^{1-\alpha}$ — тождественный оператор при $\alpha = 1$), $D^{\alpha}u(t) = \dfrac{d}{dt}I^{1-\alpha}u(t)$ — левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка α, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, A — линейный, замкнутый, плотно определенный оператор, наконец, B — также линейный, замкнутый, плотно определенный, и, вообще говоря, неограниченный оператор, рассматриваемый как возмущение оператора A.

Излагаемые в дальнейшем результаты примыкают к теории возмущений по Миядере генераторов полугрупп (см. [1 - 3]). Рассматривается вопрос о том, как отражается на разрешимости задачи (1), (2) добавление слагаемого, содержащего оператор B, который в некотором смысле подчинен оператору A. Будут указаны условия, при выполнении которых разрешимость задачи сохранится и после возмущения оператора A неограниченным оператором B.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим невозмущенную задачу

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0. \tag{4}$$

Работа второго автора поддержана РФФИ (грант 10–01–00062)

Определение 1 *Решением задачи* (3), (4) *называется непрерывная при* $t > 0$ *функция* $u(t)$ *такая, что* $I^{1-\alpha}u(t)$ *представляет собой непрерывно дифференцируемую при* $t > 0$ *функцию, функция* $u(t)$ *принимает значения в* $D(A)$ ($D(A)$ — *область определения оператора* A) *и удовлетворяет* (3), (4).

Определение 2 *Задача* (3), (4) *называется равномерно корректной, если существует заданная на* E, *коммутирующая с* A *операторная функция* $T_\alpha(t)$ *и числа* $M_1 > 0$, $\omega \in R$ *такие, что для любого* $u_0 \in D(A)$ *функция* $T_\alpha(t)u_0$ *является ее единственным решением и при этом*

$$\|T_\alpha(t)\| \le M_1 t^{\alpha-1} e^{\omega t}. \tag{5}$$

Согласно определению 2 задача (3), (4) равномерно корректна, если решение этой задачи существует, единственно и, как следует из (5), непрерывно зависит от начальных данных равномерно по t из любого компакта в $(0, \infty)$. Помимо этих обычных требований определение 2 содержит дополнительную информацию о поведении решения при $t \to 0$ и $t \to \infty$ (неравенство (5)).

Сформулируем далее условия, при которых будет установлена однозначная разрешимость задачи (1), (2).

Условие 1 *Оператор* A *таков, что задача* (3), (4) *равномерно корректна и* $u_0 \in D(A)$.

Укажем, что равномерная корректность задачи (3), (4) исследовалась в [4 – 6].

Условие 2 $D(A) \subset D(B)$ *и для любых* $x \in D(A)$, $t > 0$ *существуют постоянные* $M_2 > 0$, $\mu > 0$, $\omega \in R$ *такие, что*

$$I^\alpha \left(e^{-\omega t}\|BT_\alpha(\tau)x\|\right) \le M_2\, t^{\alpha+\mu-1}\|x\|. \tag{6}$$

Пример. Пусть $x \in D(A)$ и оператор $-A$ является сильно позитивным (терминология заимствована из [7]), т.е.,

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \le \frac{M_3}{1+|\lambda|}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \ge 0,\ M_3 > 0.$$

Оператор A будет генератором равномерно ограниченной C_0-полугруппы $T(t)$. Возьмем оператор B, удовлетворяющий неравенству

$$\|BT_\alpha(t)x\| \le M_0 t^{-\gamma}\|x\|, \quad t \in (0,\infty),\ \gamma \in [0,1),$$

так что оператор B подчинен дробной степени $(-A)^\gamma$ (см. [7, с. 298]). Тогда (см. [8])

$$T_\alpha(t)x = \int\limits_0^\infty f_{\tau,\alpha}(t)T(\tau)x\,d\tau,$$

где неотрицательная функция $f_{\tau,\nu}(t)$ определена равенством

$$f_{\tau,\nu}(t) = t^{-1}\phi\left(-\nu, 0; -\tau t^{-\nu}\right), \qquad \phi(a,b;z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!\,\Gamma(ak+b)}.$$

И, следовательно,

$$\|BT_\alpha(t)x\| \le \int\limits_0^\infty f_{\tau,\alpha}(t)\|BT(\tau)x\|\,d\tau \le M_0\int\limits_0^\infty f_{\tau,\alpha}(t)\tau^{-\gamma}\,d\tau\,\|x\| = \frac{M_0\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha(1-\gamma)-1}\|x\|,$$

$$I^{\alpha}\left(\|BT_{\alpha}(t)x\|\right) \le \frac{M_0\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\alpha(1-\gamma)-1}\,ds\,\|x\| =$$

$$= \frac{M_0\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha(1-\gamma))}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha(2-\gamma))} t^{\alpha+\alpha(1-\gamma)-1}\|x\|.$$

Таким образом, неравенство (6) выполнено при $\mu = \alpha(1-\gamma) > 0$.

Перестановочность операторов A и B не предполагается. Как будет доказано в дальнейшем, условия 1, 2 обеспечат разрешимость задачи (1), (2).

Пусть операторы A и B удовлетворяют условиям 1 и 2. На элементах $x \in D(A)$ определим оператор

$$U_1(t)x = \int\limits_0^t T_{\alpha}(t-s)BT_{\alpha}(s)x\,ds, \tag{7}$$

при этом, в силу (5), (6) справедлива оценка

$$\|U_1(t)x\| \le M_1\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{\omega(t-s)}\|BT_{\alpha}(s)x\|\,ds = M_1\Gamma(\alpha)e^{\omega t}I^{\alpha}\left(e^{-\omega t}\|BT_{\alpha}(t)x\|\right) \le$$

$$\le M_1M_2\Gamma(\alpha)\,t^{\alpha+\mu-1}e^{\omega t}\|x\|. \tag{8}$$

Следовательно, для любого $t > 0$ оператор $U_1(t)$ имеет единственное продолжение с $D(A)$ на все E с сохранением нормы. За продолженным оператором сохраним прежнее обозначение. Интегральное представление (7) справедливо только на элементах $x \in D(A)$.

Далее, на элементах $x \in D(A)$ определим оператор

$$U_2(t)x = \int\limits_0^t U_1(t-s)BT_{\alpha}(s)x\,ds, \tag{9}$$

при этом, в силу (8), (6) и полугруппового свойства операции дробного интегрирования, справедлива оценка

$$\|U_2(t)x\| \le M_1M_2\Gamma(\alpha)\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha+\mu-1}e^{\omega(t-s)}\|BT_{\alpha}(s)x\|\,ds =$$

$$= M_1M_2\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\mu)e^{\omega t}I^{\mu}I^{\alpha}\left(e^{-\omega t}\|BT_{\alpha}(t)x\|\right) \le M_1M_2^2\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\mu)e^{\omega t}I^{\mu}\left(t^{\alpha+\mu-1}\|x\|\right) =$$

$$= \frac{M_1M_2^2\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\alpha+\mu)}{\Gamma(\alpha+2\mu)}\,t^{\alpha+2\mu-1}e^{\omega t}\|x\|. \tag{10}$$

Оператор $U_2(t)$ имеет единственное продолжение с $D(A)$ на все E с сохранением нормы и за продолженным оператором сохраним прежнее обозначение. Интегральное представление (9) справедливо только на элементах $x \in D(A)$.

По индукции, на элементах $x \in D(A)$ определим операторы

$$U_n(t)x = \int\limits_0^t U_{n-1}(t-s)BT_{\alpha}(s)x\,ds, \quad U_0(t) = T_{\alpha}(t), \tag{11}$$

для которых, учитывая (10), получим оценку

$$\|U_n(t)x\| \leq \frac{M_1 M_2^n \Gamma(\alpha)\Gamma^n(\alpha+\mu)}{\Gamma(\alpha+n\mu)}\, t^{\alpha+n\mu-1}e^{\omega t}\|x\|. \tag{12}$$

Таким образом, мы получили семейство заданных на E, экспоненциально ограниченных и, как следует из теоремы Банаха-Штейнгауза, сильно непрерывных при $t > 0$ операторов $U_n(t)$, $n = 0, 1, 2...$

Неравенство (12) позволяет ввести в рассмотрение ряд

$$G_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t). \tag{13}$$

Ряд (13) сходится при $t > 0$, $\mu > 0$ в пространстве $L(E)$ линейных ограниченных операторов поскольку, в силу (12),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|U_n(t)\| \leq M_1\Gamma(\alpha)\, t^{\alpha-1}e^{\omega t}E_{\mu,\alpha}\left(M_2\, \Gamma(\alpha+\mu)\, t^{\mu}\right),$$

где $E_{\mu,\alpha}(\cdot)$ — функция типа Миттаг-Леффлера.

Учитывая асимптотическое поведение функции типа Миттаг-Леффлера (см. [11, с. 134, 137]) для $G_\alpha(t)$ получим оценку вида

$$\|G_\alpha(t)\| \leq M_{\alpha,\mu}\, t^{\alpha-1}e^{\Omega t}, \quad t > 0 \tag{14}$$

с некоторыми постоянными $M_{\alpha,\mu} > 0$, $\Omega > \omega$.

Суммируя равенства (11) для $n = 0, 1, 2...$ при $x \in D(A)$ получим

$$G_\alpha(t)x = T_\alpha(t)x + \int_0^t G_\alpha(t-s)BT_\alpha(s)x\, ds. \tag{15}$$

Теорема *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда функция* $u(t) = G_\alpha(t)u_0$ *является решением задачи* (1), (2).

Доказательство Учитывая результаты работы [8] о разрешимости задачи типа Коши для неоднородного уравнения, сведем задачу (1), (2) к интегральному уравнению

$$u(t)x = T_\alpha(t)u_0 + \int_0^t T_\alpha(t-s)Bu(s)u_0\, ds, \tag{16}$$

и покажем, что функция $G_\alpha(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (16). Учитывая (15), для этого достаточно установить справедливость равенства

$$\int_0^t G_\alpha(t-s)BT_\alpha(s)u_0\, ds = \int_0^t T_\alpha(t-s)BG_\alpha(s)u_0\, ds. \tag{17}$$

Принимая в расчет равенство (7), будем иметь

$$\int_0^t U_1(t-s)BT_\alpha(s)u_0\,ds = \int_0^t \int_0^{t-s} T_\alpha(t-s-\tau)BT_\alpha(\tau)\,d\tau\ BT_\alpha(s)u_0\,ds =$$

$$= \int_0^t \int_s^t T_\alpha(t-\xi)BT_\alpha(\xi-s)\,d\xi\ BT_\alpha(s)u_0\,ds =$$

$$= \int_0^t T_\alpha(t-\xi)B\int_0^\xi T_\alpha(\xi-s)BT_\alpha(s)u_0\,dsd\xi = \int_0^t T_\alpha(t-\xi)BU_1(\xi)u_0\,d\xi.$$

По индукции установим равенства

$$\int_0^t U_n(t-s)BT_\alpha(s)u_0\,ds = \int_0^t T_\alpha(t-\xi)BU_n(\xi)u_0\,d\xi, \quad n = 0, 1, 2... \tag{18}$$

и, наконец, суммируя (18), получим (17). Теорема доказана.

Замечание. Вопрос единственности решения задачи (1), (2) в случае неограниченного оператора B весьма сложный. Укажем, что достаточным условием единственности в классе функций, удовлетворяющих неравенству (5), является отсутствие у оператора $A + B$ собственных значений вида λ^α при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Последнее утверждение легко доказывается, используя преобразование Лапласа.

Литература

1. Miyadera I. On perturbation theory for semi-groups of operators. Tôhoku Math. J. 18(1966). P. 299 – 310.

2. Voigt J. On the perturbation theory for strongly continuous semigroups. Math. Ann. 229(1977). P. 163 – 171.

3. Banasiak J., Arlotti L. Perturbations of positive semigroups with applications. Springer-Verlag London Limited. 2006.

4. Костин В.А. К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными. ДАН СССР. 1992. Т. 326. № 4. С. 597 – 600.

5. Глушак А.В. О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Воронеж. 2001. № 2. С. 74 – 77.

6. Глушак А.В., Поваляева Ю.В. О свойствах решений задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Spectral and Evolution Problems. Simferopol. 2004. V. 14. P. 163 – 172.

7. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука. 1966.

8. Глушак А.В., Авад Х.К. О возмущении абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2008. Т. 10, № 1. С. 25 – 31.

9. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 1966.

ON THE PERTURBATION ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS CONTAINING FRACTINAL DERIVATIVES OF RIEMANN-LIOUVILLE

H.K. Avad, A.V. Glushak

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. The solvability of the problem of Cauchy for the equation with fractional derivatives of Riemann-Liouville after perturbation of unbounded operators.

Keywords: equation with fractional derivatives, Cauchy-type problem, the perturbation of unbounded operators.