УДК 517.55

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ КРАТНОГО РЯДА ЛОРАНА

А.П. Ляпин

Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, 660041, г. Красноярск, Россия, e-mail: LyapinAP@yandex.ru

Аннотация. В данной работе приведена конструкция преобразования кратного ряда Лорана, обобщающая классическую композицию Гурвица двух однократных рядов и связанная с многомерными аналогами теоремы Полиа.

Ключевые слова: преобразование Гурвица, радиальный индикатор, теорема Полиа.

1 Введение

Теорема Гурвица о сложении особенностей относится к числу значимых результатов в теории распределения особенностей голоморфных функций одного переменного. В отличие от теоремы Адамара об умножении особенностей (см. [1]), которая обобщалась на многомерный случай в различных направлениях, (см. [2] — [6]), многомерные варианты композиции Гурвица степенных рядов изучались сравнительно мало (см. [7]).

В п. 2 приведена конструкция преобразования кратного степенного ряда в однократный, которая естественным образом возникает в исследованиях, связанных с многомерными аналогами теоремы Полиа ([8], [9]). Эта конструкция названа преобразованием Гурвица, так как классическая композиция Гурвица степенных рядов является её частным случаем. Для преобразования Гурвица построено интегральное представление (предложение 1), которое позволяет осуществить ее аналитическое продолжение (теорема 2).

В п. 3 изучено преобразование Гурвица рациональных функций. В случае одного переменного композиция Гурвица рациональных функций будет функцией рациональной, однако в многомерном случае это уже не так. В теореме 3 доказывается алгебраичность преобразования Гурвица рациональной функции двух переменных.

Отметим, что доказательство теоремы 3 существенно опирается на теорему об особенностях параметрического вычета Гротендика ([10], [11]). Все доказательства приведены в п. 4.

2 Преобразование Гурвица кратного степенного ряда

Композиция Гурвица для двух однократных рядов вида

$$f(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a(\alpha)}{z^{\alpha+1}} \text{ и } g(z) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{b(\beta)}{z^{\beta+1}} \tag{1}$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) и Государственным фондом естественных наук Китая (ГФЕН) в рамках совместного проекта «Комплексный анализ и его приложения» (проект N 08-01-92208_ГФЕН) и грантом СФУ

определяется следующим образом (см. [1, с. 47]):

$$h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\alpha+\beta=m} \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} a(\alpha) b(\beta) \right) \frac{1}{z^{m+1}}, \tag{2}$$

и задача состоит в том, чтобы по известным особым точкам функций $f(z)$ и $g(z)$, определенных рядами (1), найти особые точки композиции $h(z)$. Приведем теорему Гурвица о сложении особенностей, решающую эту задачу, в изложении Бибербаха (см. [1]). Но прежде нам понадобятся следующие определения.

Суммой множеств A_1 и A_2 назовем дополнение теоретико-множественной суммы $A_1' + A_2' = \{a_1' + a_2' : a_1' \in A_1', a_2' \in A_2'\}$ до всей комплексной плоскости:

$$A_1 \oplus A_2 := (A_1' + A_2')',$$

где $A' = \mathbb{C} \setminus A$.

Указанная композиция множеств (как и композиция Гурвица степенных рядов) обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Теорема 1 ([12], 1899) *Если функция $f(z)$ голоморфна в области A, содержащей множество $\{|z| > r_1\}$, а функция $g(z)$ голоморфна в области B, содержащей множество $\{|z| > r_2\}$, то функция $h(z)$ голоморфна в связной части открытого множества $A \oplus B$, содержащей внешность круга $\{|z| > r_1 + r_2\}$.*

Отметим, что композиция Гурвица (2) тесно связана с имеющим важное значение в теории распределения особенностей голоморфных функций преобразованием Бореля степенных рядов. А именно, если

$$F(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a(\alpha)}{\alpha!} z^{\alpha}, G(z) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{b(\beta)}{\beta!} z^{\beta}$$

– преобразование Бореля функций $f(z)$ и $g(z)$ соответственно, тогда их произведение

$$F(z)G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\alpha+\beta=m} \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} a(\alpha) b(\beta) \right) \frac{z^m}{m!}$$

является преобразованием Бореля композиции Гурвица (2) рядов $f(z)$ и $g(z)$.

Приведем вариант обобщения композиции Гурвица на случай кратных степенных рядов Тейлора, построенный в работе [7]. Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ — множество целочисленных векторов с неотрицательными компонентами, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$. Для заданного набора $m\,(m \leqslant n)$ целых чисел $J = (j_1, \ldots, j_m)$, таких, что $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_m = n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, обозначим через $J\alpha$ следующий вектор из $\mathbb{Z}_+^m$:

$$J\alpha = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{j_1}, \alpha_{j_1+1} + \ldots + \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_{m-1}+1} + \ldots + \alpha_{j_m}).$$

Для двух n-кратных степенных рядов

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a(\alpha) z^{\alpha} \text{ и } g(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} b(\alpha) z^{\alpha}, z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

под *композицией Гурвица, ассоциированной с полной m-круговой областью* $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^m$, понимается n-кратный ряд вида

$$h(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \left[\sum_{\beta \leqslant \alpha} a(\alpha - \beta) b(\beta) \frac{c_{J\alpha}(J\alpha)!}{c_{J\beta}(J\beta)! c_{J\alpha - J\beta}(J\alpha - J\beta)!} \right] z^\alpha, \tag{3}$$

где $c_{J\alpha}$ — коэффициенты Тейлора ядра Сеге некоторой фиксированной m-круговой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^m$.

В работе [7] построено интегральное представление и изучен вопрос об области сходимости композиции, а именно показано, что ряд (3) можно продолжить в подходящим образом определенную «сумму» звезд и рассматриваются свойства такой «суммы».

В данной статье приведен другой вариант обобщения конструкции Гурвица для $n > 1$, который естественным образом связан с преобразованием Бореля кратных степенных рядов и многомерными аналогами теоремы Полиа.

Будем рассматривать кратные ряды Лорана вида

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{a(\alpha)}{z^{\alpha + I}}, \tag{4}$$

которые сходятся в некоторой окрестности $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| > R_j, j = 1, \ldots, n\}$ бесконечно удаленной точки (это равносильно голоморфности функции $f(1/z)$ в точке $z = 0$). Ряду (4) поставим в соответствие кратный степенной ряд

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{a(\alpha)}{\alpha!} z^\alpha, \tag{5}$$

который называется *преобразованием Бореля* ряда (4), при этом функции $f(z)$ и $F(z)$ называются *ассоциированными по Борелю*. Если известно, что функция $f(z)$ голоморфна в бесконечно удаленной точке, то функция $F(z)$ является целой функцией экспоненциального типа, т.е порядка не выше первого и не более, чем нормального типа ([13]).

Для целой функций $F(z)$ переменного z порядка ρ *индикатор* определяется формулой

$$h_F(\varphi) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln |F(te^{i\varphi})|}{t^\rho}.$$

Далее, для $K \subset \mathbb{C}$ обозначим через $k_K(\varphi)$ опорную функцию множества $K \subset \mathbb{C}$

$$k_K(\varphi) = \max_{z \in K} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}).$$

Теорема Полиа утверждает, что для целых функций экспоненциального типа $h_F(\varphi) = k_K(-\varphi)$, где K — наименьший компакт, во внешность которого аналитически продолжается функция $f(z)$, ассоциированная по Борелю с $F(z)$.

Важной характеристикой для целой функции $F(z)$ нескольких переменных нормального типа и произвольного порядка ρ является *радиальный индикатор* ([13, с. 286]):

$$\mathbf{h}_{F,\lambda}(\varphi) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln |F(\lambda te^{i\varphi})|}{t^\rho},$$

т. е. это индикатор функции $F(\lambda\xi)$ одного комплексного переменного ξ, которая является сужением функции $F(z)$ на комплексную прямую $l_\lambda = \{z : z = \lambda\xi, \xi \in \mathbb{C}\}$. Поэтому представляется естественным следующее

Определение 1 *Для фиксированного вектора $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ назовем преобразованием Гурвица ряда (4) преобразование Бореля функции $F(\lambda\xi)$, т.е. однократный ряд вида*

$$f_\lambda(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\|\alpha\|=m} \frac{\|\alpha\|!\,\lambda^\alpha}{\alpha!} a(\alpha) \right) \frac{1}{\xi^{m+1}}. \tag{6}$$

Данная конструкция является обобщением классической композиции Гурвица степенных рядов (1). Действительно, при $n = 2$, $f(z_1, z_2) = f(z_1)g(z_2)$ и $\lambda = (1, 1)$ из соотношения (6) получим (2).

Приведем интегральное представление для преобразования Гурвица, которое позволит ниже получить аналитическое продолжение преобразования (6).

Для $z, \lambda \in \mathbb{C}^n$ обозначим $\langle \lambda, z \rangle = \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n$ и $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, где $\wedge$ — знак внешнего произведения.

Предложение 1 *Если $f(z)$ голоморфна в области из $\mathbb{C}^n$, содержащей окрестность $\{z : |z_j| > R_j, j = 1, \ldots, n\}$ бесконечно удаленной точки, то преобразование Гурвица голоморфно для $\xi \in \mathbb{C}$ таких, что*

$$|\xi| > |\lambda_1| \cdot R_1 + \ldots + |\lambda_n| \cdot R_n,$$

и при этом справедливо интегральное представление

$$f_\lambda(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{\xi - \langle \lambda, z \rangle},$$

где $\Gamma = \{z : |z_j| = |\lambda_j| R_j, j = 1, \ldots, n\}$

Множество комплексной плоскости $A \subset \mathbb{C}$ назовем *козвездой*, если оно содержит некоторую окрестность бесконечно удаленной точки и его дополнение $\mathbb{C} \setminus A$ до комплексной плоскости является звездой.

Отметим, что для любого набора козвезд $A_j, j = 1, \ldots, n$ и вектора $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ множество вида

$$\lambda_1 A_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n A_n := \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1 A_1' + \ldots + \lambda_n A_n'\}$$

также является козвездой.

Одним из основных результатов данной работы является следующая

Теорема 2 *Пусть $A_j, j = 1, ..., n$ — козвездные области. Если функция (4) голоморфна в области вида $A_1 \times \ldots \times A_n \subset \mathbb{C}^n$, то преобразование Гурвица ряда (4) голоморфно в козвездной области $\lambda_1 A_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n A_n \subset \mathbb{C}$.*

Заметим, что из этой теоремы очевидным образом получаем неравенство $k_K(\varphi) \leqslant k_T(\varphi)$, где K — минимальный компакт особенностей преобразования Гурвица f_λ и $T = \{\lambda_1 A_1' + \ldots + \lambda_n A_n'\}$. В случае, если справедлива одномерная теорема Полиа $h_{\lambda,F}(\varphi) = k_K(\varphi)$, получаем оценку сверху на радиальный индикатор

$$h_{\lambda,F}(\varphi) \leqslant k_T(\varphi),$$

причем знак равенства имеет место, если этот минимальный компакт особенностей функции $f_\lambda(\xi)$ совпадает с множеством T.

3 Преобразование Гурвица рациональных функций

Для $n = 1$ классическая композиция Гурвица (2) рациональных функций $f(z)$ и $g(z)$ является рациональной функцией (см. [1]), причем ее особые точки получаются путем сложения особых точек функций (1). Для $n = 2$, вообще говоря, из рациональности функции не следует рациональность ее преобразования Гурвица. Например, для функции $f(z_1, z_2) = (1 - z_1 - z_2 - z_1 z_2)^{-1}$ ее преобразование Гурвица имеет вид

$$f_\lambda(\xi) = (\xi^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)\xi + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 6\lambda_1\lambda_2)^{-\frac{1}{2}},$$

т.е. является алгебраической функцией.

Покажем, что преобразование Гурвица рациональной функции для $n = 2$ всегда является функцией алгебраической. Прежде всего выделим класс рациональных функций $f(z) = P(z)/Q(z)$, для которых имеет место разложение в ряд Лорана вида (4).

В случае $n = 1$ такие функции голоморфны в бесконечно удаленной точке и обращаются в ней в ноль. Если $Q(z) = \sum\limits_{\beta=0}^{m} q_z z^\beta$ многочлен степени m (т.е. $q_m \neq 0$), то для любого многочлена $P(z)$ степени, не превосходящей m, рациональная функция $f(z)$ разлагается в ряд вида (4).

Пусть $n > 1$ и $Q(z) = \sum\limits_{\beta \in B} q_\beta z^\beta$ — многочлен переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$, т.е. B — конечное подмножество точек из $\mathbb{Z}^n_+$.

Многогранником Ньютона N_Q многочлена $Q(z)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ множества B.

Обозначим через $\nu = (\nu_1, \ldots \nu_n)$ точку из $\mathbb{Z}^n_+$, такую, что

$$\nu_j = \max_{\beta \in N_Q}\{\beta_j\}, j = 1, \ldots, n,$$

и будем рассматривать такие многочлены $Q(z)$, что

$$\nu \in N_Q. \tag{7}$$

Отметим, что целочисленная точка ν является вершиной многогранника Ньютона N_Q, т.е. $q_\nu \neq 0$. Кроме того, *двойственный конус*

$$C_\nu = \{s \in \mathbb{R}^n : \max_{\beta \in N_Q}\langle s, \beta\rangle = \langle s, \nu\rangle\}$$

многогранника N_Q в этой вершине ν содержит положительный октант

$$\mathbb{R}^n_+ \subset C_\nu. \tag{8}$$

Если обозначим $\Pi_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_j \leqslant \nu_j, j = 1, \ldots, n\}$ — *прямоугольный параллелепипед* в $\mathbb{R}^n_+$, то условие (8) эквивалентно условию

$$N_Q \subset \Pi_\nu.$$

Предложение 2 *Фиксируем многочлен $Q(z)$, удовлетворяющий условию (7). Рациональная функция $P(z)/Q(z)$ разлагается в ряд Лорана вида (4) тогда и только тогда, когда числитель $P(z)$ удовлетворяет условию*

$$N_P \subset \Pi_{\nu - I}, \tag{9}$$

где $I = (1, \ldots, 1)$.

Если в предложении 2 отказаться от требования, что точка ν является вершиной многогранника N_Q, то дробь $P(z)/Q(z)$, вообще говоря, не будет голоморфной в бесконечно удаленной точке, например, если $f(z_1,z_2) = (z_1+z_2)^{-1}$, то функция $f(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2}) = \frac{z_1 z_2}{z_1+z_2}$, очевидно, не является голоморфной в нуле, т. е. функция $f(z_1,z_2)$ не голоморфна в бесконечно удаленной точке.

Если $Q(z) = Q_1^{r_1}(z)\cdots Q_n^{r_n}(z)$ — разложение многочлена $Q(z)$ на неприводимые множители, то обозначим $Q^*(z) = Q_1(z)\cdots Q_n(z)$.

Теорема 3 *При $n = 2$ преобразование Гурвица (6) рациональной функции $P(z)/Q(z)$, голоморфной в бесконечно удаленной точке, является алгебраической функцией, особые точки которой содержатся в множестве точек $\xi \in \mathbb{C}$ вида*

$$\xi = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2,$$

где (z_1,z_2) — решения системы уравнений

$$Q^*(z_1,z_2) = \lambda_2 Q^*_{z_1}(z_1,z_2) - \lambda_1 Q^*_{z_2}(z_1,z_2) = 0.$$

4 Доказательства

Доказательство 1 (Доказательство предложения 1) *По условию предложения $|\xi| > |\lambda_1|\cdot R_1 + \cdots + |\lambda_n|\cdot R_n$, тогда для $z \in \Gamma$ из неравенства треугольника следует*

$$|\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_n z_n| \leqslant |\lambda_1|\cdot R_1 + \cdots + |\lambda_n|\cdot R_n < |\xi|,$$

это означает, что на остове Γ справедливо соотношение $|\xi| > |\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_n z_n|$, поэтому функция $\frac{1}{\xi - \langle\lambda,z\rangle}$ разлагается на Γ в ряд геометрической прогрессии

$$\frac{1}{\xi - \langle\lambda,z\rangle} = \sum_{\|\beta\|\geqslant 0} \frac{\|\beta\|!}{\beta!}\frac{\lambda^\beta z^\beta}{\xi^{\|\beta\|+1}}.$$

Умножая полученное разложение на ряд (4) и почленно интегрируя по Γ, получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{\xi - \langle\lambda,z\rangle} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Gamma \sum_{\|\alpha\|\geqslant 0}\frac{a(\alpha)}{z^{\alpha+I}}\cdot\sum_{\|\beta\|\geqslant 0}\frac{\|\beta\|!}{\beta!}\frac{\lambda^\beta z^\beta}{\xi^{\|\beta\|+1}}\,dz =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\|\alpha\|=m}\frac{\|\alpha\|!}{\alpha!}\frac{a(\alpha)\lambda^\alpha}{\xi^{\|\alpha\|+1}} = f_\lambda(\xi).$$

Сформулируем свойства композиции козвезд, необходимые для доказательства теоремы 2.

Лемма 1 *Если A и B — козвезды, то их сумма $A \oplus B$ также является козвездой.*

Из очевидного включения $A_1' + A_2' \subset B_1' + B_2'$ следует

Лемма 2 *Пусть $A_j, B_j, j = 1,2$ являются козвездами. Тогда если $B_1 \subset A_1, B_2 \subset A_2$, то справедливо включение $B_1 \oplus B_2 \subset A_1 \oplus A_2$.*

Рассмотрим зависящее от параметра z отображение $\varphi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, определяемое формулой $\varphi_z(\xi) = z - \xi$.

Лемма 3 $A_1 \oplus A_2 = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_z(A'_1) \cap A'_2 = \varnothing\}$.

Доказательство 2 *Докажем включение* $A_1 \oplus A_2 \subset \{z \in \mathbb{C} : \varphi_z(A'_1) \cap A'_2 = \varnothing\}$. *Пусть* $z \in A_1 \oplus A_2$, *это означает, что* $z \notin A'_1 + A'_2$. *Предположим, что пересечение* $\varphi_z(A'_1) \cap A'_2$ *не пусто, т. е., найдется такая точка* ξ, *что* $\xi \in \varphi_z(A'_1)$ *и* $\xi \in A'_2$, *откуда* $\xi = z - \xi_1, \xi_1 \in A'_1$ *или* $z = \xi + \xi_1$, *где* $\xi_1 \in A'_1$, *таким образом* $z \in A'_1 + A'_2$, *противоречие, следовательно,* $z \in \{z \in \mathbb{C} : \varphi_z(A'_1) \cap A'_2 = \varnothing\}$. *Обратное включение доказывается аналогично.*

Лемма 4 *Пусть* A_1 *и* A_2 — *козвезды и компакт* $K \subset A_1 \oplus A_2$, *тогда найдутся козвезды* B_1, B_2, *такие, что* $\bar{B}_j \subset A_j, j = 1, 2$, *компакт* $K \subset B_1 \oplus B_2$ *и границы* $\partial B_1, \partial B_2$ *есть замкнутые контуры, охватывающие начало координат.*

Доказательство 3 *Пусть* $z \in K$. *Рассмотрим отображение* $\varphi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *вида* $\varphi_z(\xi) = z - \xi$, *одним из свойств которого является* $\varphi_z = \varphi_z^{-1}$. *Также заметим, что если* $z \in K$, *то* $0 \notin \varphi_z(A'_j)$ *для* $j = 1, 2$. *По лемме 3 выполняется* $\varphi_z(A'_1) \cap A'_2 = \varnothing$ *и* $A'_1 \cap \varphi_z(A'_2) = \varnothing$, *поэтому мы можем выбрать контур* γ_1, *разделяющий множества* A'_1 *и* $\varphi_z(A'_2)$, *таким образом, чтобы он охватывал начало координат, а множество* B_1, *где* $\gamma_1 = \partial B_1$, *было козвездным. Обозначим* $\tilde{\gamma}_2 = \varphi_z(\gamma_1)$ *и возьмем контур* γ_2, *разделяющий множества* A'_2 *и* $\varphi_z(B'_1)$, *таким образом, чтобы он охватывал начало координат, а множество* B_2, *где* $\gamma_2 = \partial B_2$, *было козвездным. Отметим, что контур* γ_1 *будет разделять множества* A'_1 *и* $\varphi_z(B'_2)$. *При таком выборе контуров будут выполняться следующие включения:* $\varphi_z(B_1) \subset B_2$ *и* $\varphi_z(B_2) \subset B_1$, *откуда следует, что при выбранном значении* z *справедливо* $B'_1 \cap \varphi_z(B'_2) = \varnothing$ *и* $B'_2 \cap \varphi_z(B'_1) = \varnothing$. *Согласно лемме 3, это означает, что* $z \in B_1 \oplus B_2$. *В силу непрерывности отображения* φ_z *по параметру* z, *это справедливо и для всех* z *из некоторой окрестности* U_z *точки* $z \in K$.

Набор $\{U_z\}_{z \in K}$ *образует открытое покрытие компакта* K. *Выберем из него конечное подпокрытие* $\{U_{z_k}\}_{k=1}^{l}$. *Для каждой точки* $z_k, k = 1, 2, ..., l$, *найдутся козвезды* $B_{1,k}$ *и* $B_{2,k}$, *такие, что* $\bar{B}_{i,k} \subset A_i, i = 1, 2$ *и* $U_{z_k} \subset B_{1,k} \oplus B_{2,k}$. *Согласно лемме 2 имеем* $U_{z_k} \subset B_{1,k} \oplus B_{2,k} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{1,k} \oplus \bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{2,k}$, *тогда* $K = \bigcup\limits_{k=1}^{l} U_{z_k} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{1,k} \oplus \bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{2,k}$. *Множества* $B_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{1,k}$ *и* $B_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{2,k}$ *есть козвезды и* $\widetilde{K} \subset B_1 \oplus B_2$.

Лемма 5 *Пусть* $k > 2$ *и* $A_1, \dots, A_k$ — *козвезды и задано некоторое множество* $K \subset A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, *такое, что его замыкание в* $\bar{\mathbb{C}}$ *является компактом, тогда найдутся козвезды* $B_1, \dots, B_k$, *такие, что* $\bar{B}_j \subset A_j, j = 1, \dots, k$, *множество* $K \subset B_1 \oplus \ldots \oplus B_k$ *и границы* $\partial B_1, \dots, \partial B_k$ *есть замкнутые контуры, охватывающие начало координат.*

Доказательство 4 *Для доказательства утверждения нужно последовательно применить лемму 4. Для простоты приведем его для случая* $k = 3$. *Так как* $K \subset A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 = A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3)$, *то по лемме 4 найдутся козвезды* B_1 *и* $\tilde{B}_2$, *такие, что* $K \subset B_1 \oplus \tilde{B}_2$, *причем* $\bar{B}_1 \subset A_1$ *и* $\bar{\tilde{B}}_2 \subset A_2 \oplus A_3$. *Опять применим лемму 4, найдем козвезды* B_2, B_3, *такие, что* $\bar{\tilde{B}}_2 \subset B_2 \oplus B_3$, *тогда* $K \subset B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$, *где* $\bar{B}_j \subset A_j, j = 1, 2, 3$.

Доказательство 5 (Доказательство теоремы 2) *Рассмотрим компакт $K \subset A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$. Согласно лемме 5 найдутся козвезды B_j, такие, что $\bar{B}_j \subset A_j, \partial B_j = \gamma_j$ — замкнутые контуры, охватывающие начало координат и $K \subset B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$. Тогда зависящий от параметра ξ интеграл*

$$I(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{\xi - \langle \lambda, z \rangle}, \tag{10}$$

где $\Gamma = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$, определяет голоморфную для $\xi \in K$ функцию. Действительно, по построению $\Gamma \subset A_1 \times \cdots \times A_n$ и остается показать, что знаменатель подынтегрального выражения для любых $z \in K$ не обращается в нуль на Γ.

Допустим противное. Пусть имеет место $\Gamma \cap \{z \in \mathbb{C}^n : \xi - \langle \lambda, z \rangle = 0\} \neq \varnothing$. Это означает, что нашлась точка $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}) \in \Gamma \subset B_1' \times \cdots \times B_n'$ такая, что $\xi = \lambda_1 z_1^{(0)} + \cdots + \lambda_n z_n^{(0)}$. Так как $z_j^{(0)} \in B_j', j = 1, \ldots, n$, то по свойствам композиции $\oplus$ имеем $\xi \notin B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ и, следовательно, $\xi \notin K$. Получили противоречие. Таким образом, интеграл представляет собой функцию, голоморфную на любом компакте K, содержащемся в козвезде $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, и, следовательно, голоморфную и во всей козвезде.

Для ξ из окрестности V_∞ точки $\xi = \infty$ в качестве цикла интегрирования можно взять для достаточно больших R_j цикл $\Gamma_\infty = \{z : |z_j| = R_j, j = 1, \ldots, n\}$. Цикл Γ из (10) гомологичен для $z \in V_\infty$ циклу Γ_∞ в области $A_1 \times \ldots \times A_n \setminus \{z : \langle \lambda, z \rangle = \xi\}$, поэтому

$$I(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{\xi - \langle \lambda, z \rangle} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\infty} \frac{f(z)\,dz}{\xi - \langle \lambda, z \rangle};$$

откуда из предложения 1 следует, что $I(\xi) = f_\lambda(\xi)$ для $z \in V_\infty$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется понятие амебы многочлена и некоторые её свойства ([14]).

Амебой $\mathcal{A}_Q$ многочлена $Q(z)$ называется образ множества

$$\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C}^n : Q(z) = 0\} \tag{11}$$

при логарифмическом проектировании

$$Log : (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|).$$

Дополнение к амебе состоит из конечного числа связных компонент, ограниченного снизу числом вершин многогранника Ньютона, а сверху — числом целых точек пересечения $\mathcal{A}_Q \cap \mathbb{Z}^n$. Кроме того ([14]), каждой вершине ν многогранника Ньютона можно сопоставить непустую связную компоненту E_ν дополнения амебы $\mathcal{A}_Q$ и разложение в ряд Лорана функции $1/Q(z)$, сходящееся в $Log^{-1} E_\nu$.

Доказательство 6 (Доказательство предложения 2) *Необходимость. Пусть $P(z) = \sum\limits_{\alpha \in A} p_\alpha z^\alpha$, где A — конечное подмножество точек из $\mathbb{Z}_+^n$ и $\mu_j = \max\limits_{\alpha \in N_P} \alpha_j$. В разложении (4) сделаем замену $z_j \to z_j^{-1}, j = 1, \ldots, n$ и после преобразований получим*

$$z^{\nu - \mu - I} \frac{\widetilde{P}(z)}{\widetilde{Q}(z)} = \sum_{x \in \mathbb{Z}_+^n} f(x) z^x, \tag{12}$$

где $\widetilde{P}(z)$ и $\widetilde{Q}(z)$ — многочлены, причем $\widetilde{Q}(0) \neq 0$. Поскольку правая часть последнего неравенства представляет собой голоморфную в ноле функцию, то $\nu_j - \mu_j - 1 \geqslant 0$, т.е. $\mu_j \leqslant \nu_j - 1$ для $j = 1, \ldots, n$, поэтому $N_Q \subset \Pi_\mu \subset \Pi_{\nu-I}$.

Достаточность. Пусть выполнено условие (9). Рассмотрим рациональную функцию $\frac{1}{Q(z)}$ и разложим ее в ряд Лорана следующим образом

$$\frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{q_\nu z^\nu (1 - \widetilde{Q}(z))} = \frac{1}{q_\nu z^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{Q}^k(z),$$

отметим, что здесь $\widetilde{Q}(z)$ многочлен относительно переменных $\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_n}$ в силу условия (7). Возводя его в степень k и приводя подобные, получим ряд Лорана вида

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n_+} \frac{\mathcal{P}(x)}{z^{\nu+x}}. \tag{13}$$

В работе [14] показано, что этот ряд сходится в прообразе $Log^{-1} E_\nu$ связной компоненты E_ν дополнения амёбы A_Q многочлена Q, соответствующей вершине ν многогранника Ньютона N_Q, причем двойственный конус C_ν к многограннику N_Q является асимптотическим для этой компоненты E_ν, т.е. вместе с каждой точкой $u \in E_\nu$ эта компонента содержит и весь конус $u + C_\nu$. Из условия (8) следует, что полученный ряд сходится в окрестности бесконечно удаленной точки $\{|z_j| > R_j, j = 1, \ldots, n\}$. Умножая разложение (13) на любой моном z^α, такой, что $\alpha \in \Pi_\nu$, получим ряд, сходящийся в этой же окрестности. Поскольку $N_P \subset \Pi_{\nu-I}$, то при умножении (13) на многочлен $P(z)$ получим ряд вида (4), сходящийся в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.

Доказательство 7 (Доказательство теоремы 3) *Согласно предложению 1 найдутся такие R_1 и R_2, для которых при $|\xi| > |\lambda_1| R_1 + |\lambda_2| R_2$ справедливо интегральное представление*

$$f_\lambda(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \frac{P(z_1, z_2)\, dz_1 \wedge dz_2}{Q(z_1, z_2)(\xi - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2)}, \tag{14}$$

где цикл $\Gamma = Log^{-1} u$, и $u \in E_\nu$, и $\xi - \langle \lambda, z \rangle \neq 0$ на Γ.

К указанному интегралу применима теорема об особенностях параметрического вычета Гротендика (см. [10] или [11]). Действительно, ограничение (9) на степень числителя $P(z)$ означает, что при переходе к однородным координатам $z_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, z_2 = \frac{\xi_2}{\xi_0}$ бесконечно удаленная комплексная прямая $\{\xi_0 = 0\}$ не может быть особенностью подынтегральной формы из интеграла (14) при компактификации комплексного пространства $\mathbb{CP}^2$, поэтому преобразование Гурвица будет алгебраической функцией и может иметь особенности лишь на множестве точек, определяемом системой уравнений

$$Q^*(z_1, z_2) = J(z_1, z_2) = 0,$$

где $J = J(z_1, z_2) = \lambda_2 Q^*_{z_1} - \lambda_1 Q^*_{z_2}$ — якобиан многочленов Q^* и $\xi - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2$ по переменным z_1, z_2. Таким образом, особые точки преобразования $f_\lambda(\xi)$ можно найти как сумму $\xi = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$, где $(z_1, z_2) \in \mathcal{V}$ и $\lambda_2 Q^*_{z_1}(z_1, z_2) = \lambda_1 Q^*_{z_2}(z_1, z_2)$, а $\mathcal{V}$, как и прежде, определяется уравнением (11).

Литература

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука. 1967.
2. Haustus M.L.T., Klarner D.A. The diagonal of a double power series. Duke Math. J. 1971. V. 38. №2. P. 229-235.
3. Odoni R.W.K. On the norms of algebraic integers. Mathematica. 1975. V. 22. P. 71-80.
4. Лейнартас Е.К. Об одном обобщении произведения Адамара в $\mathbb{C}^n$. Мат. заметки. 1982. Т. 32. №4. С. 477-482.
5. Лейнартас Е.К. Многомерная композиция Адамара и суммы с линейными ограничениями на индексы суммирования. Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30. №2. С. 102-107.
6. Sadykov T. M. The Hadamard product of hypergeometric series. Bulletin des Sciences Mathematiques. 2002. V. 126. № 1. P. 31-43.
7. Елин М.М. Многомерный аналог композиции Гурвица. Изв. вузов. Матем. 1985. №2. С. 22-27.
8. Трутнев В.М. Радиальный индикатор в теории суммирования Бореля и некоторые применения Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13. №3. С. 659-664.
9. Маергойз Л.С. Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике или биофизике. / Л.С. Маергойз. Новосибирск. Наука. 1991.
10. Сафонов К.В., Цих А.К. Об особенностях париметрического вычета Гротендика и диагонали двойного степенного ряда. Изв. вузов. Матем. 1984. №4. С. 51—58.
11. Цих А.К. Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1988.
12. Hurwitz A. Sur un theoreme de M. Hadamard. C. R. Acad. Sci. (Paris) 128. 350-353 (1899).
13. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. Москва: Наука, 1971.
14. Forsberg M., Passare M., Tsihk A. Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas // Advances in Math., 2000, V. 151, P. 45-70.

ON A TRANSFORMATION OF MULTIPLE LAURENT SERIES

A.P. Lyapin

Siberian Federal University,
Svobodny Prospect, 79, Krasnoyarsk, 660041, Russia, e-mail: LyapinAP@yandex.ru

Abstract. In this paper we present a multiple transformations of the Laurent series, which generalizes the classical Hurwitz's composition of two single series and related with multidimensional analogues of Polya's theorem.

Keywords: Hurwitz transtormation, radial indicator, Polya's theorem.