УДК 517.987

СВОЙСТВО МОНОТОННОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИИ БЕРНУЛЛИЕВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА БЕСКОНЕЧНЫХ ГРАФАХ

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: antonova_e_s@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается "задача узлов"дискретной теории перколяции на бесконечных графах $\Lambda(V, \Phi)$ произвольного вида. Изучается вероятность перколяции $\mathsf{Q}_n[\mathsf{c}; x]$, характеризующая свойство просачивания неоднородного бернуллиевского случайного поля из любой его фиксированной вершины x на конечное расстояние $n \in \mathbb{N}$. Доказано свойство монотонной зависимости функционала $\mathsf{Q}_n[\mathsf{c}; x]$ по каждой компоненте $c(y)$, $y \in V$ распределения $\mathsf{c} = \{c(z); z \in V\}$ концентраций "недефектных"вершин графа.

Ключевые слова: вероятность перколяции, бесконечные графы, бернуллиевское случайное поле.

1. Введение. Появление термина "перколяция"и начало теории перколяции было положено в работе [1] при математическом моделировании явлений типа *просачивания*, происходящих в случайно-неоднородных средах. Изучение такого рода моделей показало, что задачи о просачивании можно ставить для случайных множеств в пространствах с довольно произвольным отношением *связности* между его элементами. В соответствии с этим математическая теория перколяции разделилась на два существенно отличающихся друг от друга направления, называемые, соответственно, дискретной и непрерывной теориями перколяции. Первое из них, в рамках которого получено множество глубоких результатов качественного характера, (см. обзоры и монографии [2], [5]-[8]) изучает свойства просачивания случайных подмножеств бесконечных связных графов [4], в частности, так называемых периодических графов [7]. Надо заметить, что вплоть до настоящего времени, в этой теории отсутствует регулярный метод вычисления с любой наперёд заданной точностью основной величины – вероятности перколяции $\mathsf{Q}[\mathsf{c}]$ для какого-либо широкого класса бесконечных графов, которая является функцией набора $\mathsf{c} = \langle c_1, ..., c_m \rangle$ параметризующего распределение вероятностей случайных множеств. Функция $\mathsf{Q}[\mathsf{c}]$ вычисляется посредством довольно громоздких компьютерных технологий и при этом процедура вычисления не имеет внешнего априорного контроля точности. В создавшейся ситуации основной математический интерес представляют качественные свойства этой функции. В настоящей работе изучается одно из таких качественных свойств, которое, как можно ожидать, должно иметь общий характер. А именно, устанавливается свойство монотонной зависимости вероятности перколяции бернуллиевского случайного поля от вероятностей заполнения вершин графа. Это свойство проявляется в простых точно решаемых моделях [9] и оно обусловлено довольно очевидной физической причиной. Однако математическое доказательство наличия этого свойства у какого-либо широкого класса моделей теории перколяции в литературе отсутствует.

2. Задача дискретной теории перколяции. Пусть $\Lambda(V, \Phi)$ – бесконечный граф. Его рёбра, в общем случае, могут быть направленными, однако мы будем предполагать, что граф не имеет петель и кратных рёбер. Граф Λ образуется множеством вершин V и множеством рёбер Φ. Индекс каждой вершины графа, равный числу рёбер инцидентных этой вершине, предполагается конечным. Далее, говоря о "любом графе"мы имеем в виду только графы указанного типа. Заметим, что ограничение графами, не содержащими петель и кратных рёбер, несущественно с точки зрения задач теории перколяции. Однако, мы рассматриваем только графы указанного типа, во-первых, ввиду важности их с точки зрения приложений и, во-вторых, ввиду упрощения даваемых ниже определений и конструкций.

Отношение смежности пары вершин x и y из V – множества вершин графа будем обозначать $x\varphi y$, $\varphi \in \Phi$. Всякую последовательность $\gamma = \langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle$ вершин графа Λ таких, что $x_{j-1}\varphi x_j$, $j = 1 \div n$ будем называть путём длины n. Длину пути γ будем обозначать следующим образом: $|\gamma| = n$. Если путь γ имеет начальную точку $x \equiv x_0$ и конечную точку $y \equiv x_n$, то мы будем говорить, что он соединяет вершины x и y и записывать это отношение в виде $\gamma(x, y)$. Причём, в общем случае, при наличии отношения направленности у некоторых из рёбер графа, порядок вершин x и y в этом отношении существен.

Расстоянием $\mathrm{dist}(x, y)$ между двумя вершинами x и y на V будем называть минимум множества значений длины каждого из путей, у которых x и y являются концевыми точками,

$$\mathrm{dist}(x, y) = \min\{|\gamma|; \gamma(x, y)\}\,.$$

Путь $\gamma = \langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle$ будем называть несамопересекающимися, если $x_j \neq x_k$ при $j \neq k$, $j, k = 0 \div n$.

Пусть на графе $\Lambda(V, \Phi)$ задано дихотомическое случайное поле $\{\tilde{c}(x); x \in V\}$ со значениями $\{0, 1\}$. Это поле, естественным образом, индуцирует случайные множества с реализациями $\tilde{C}$[1], определяемые формулой $\tilde{C} = \{z \in V : \tilde{c}(z) = 1\}$. Эти случайные реализации далее будем называть конфигурациями. По определению, конфигурация $\tilde{C}$ обладает перколяцией (на бесконечность), если существует содержащийся в ней бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma \subset \tilde{C}$. Если такой путь, обозначаемый посредством $\gamma(x)$, проходит через вершину $x \in V$, то говорят, что существует перколяция из вершины x. Не ограничивая общности, можно считать, что путь γ полуограниченный и начинается в вершине x.

С точки зрения постановки задач теории перколяции, важно также понятие просачивания из фиксированной вершины x в любую другую вершину y. Мы будем говорить, что в случайной реализации $\tilde{C}$ имеется перколяция (просачивание) из x в y, если существует путь $\gamma \subset \tilde{C}$ такой, что $\gamma(x, y)$. Вероятность $\mathsf{Q}[x, y|\mathsf{c}]$ перколяции из вершины x в вершину y определяется как

$$\mathsf{Q}[x, y|\mathsf{c}] = \Pr\{\exists(\gamma \subset \tilde{C} : \gamma(x, y)\}\,.$$

Объектом изучения в дискретной теории перколяции является также более общая функция – вероятность $\mathsf{Q}[x_1, ..., x_n|\mathsf{c}]$ связности на конфигурации $\tilde{C}$ произвольного набора вершин $\{x_1, ..., x_n\}$, то есть взаимного просачивания из одной вершины набора в любую другую вершину этого набора. эта вероятность даётся формулой

$$\mathsf{Q}[x_1, ..., x_n|\mathsf{c}] = \Pr\left\{\exists(\langle\gamma_i \subset \tilde{C}; i = 2 \div n\rangle : \gamma_j(x_1, x_j), j = 2 \div n)\right\}\,.$$

[1]В дальнейшем все случайные математические объекты отмечаются знаком "тильда".

В настоящей работе мы изучаем вероятность $\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}]$ просачивания (ухода) из вершины x на произвольное расстояние $n \in \mathbb{N}$, которая определяется следующим образом.

Обозначим $\mathfrak{P}_n(x)$ – класс конечных несамопересекающихся путей $\gamma(x)$ с длиной, не меньшей чем n, которые начинаются в вершине x. Тогда, согласно определению,

$$\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}] = \Pr\{\mathfrak{A}_n(x)\}\,,$$

$$\mathfrak{A}_n(x) = \{\tilde{C} \in \Omega : \exists(\gamma \subset \tilde{C} : \gamma \in \mathfrak{P}_n(x))\}\,, \tag{1}$$

где $\Omega = \{\tilde{C} : \tilde{C} = \{z \in V : \tilde{c}(z) = 1\}\}$ – пространство элементарных событий, состоящее из всевозможных конфигураций на V.

Наконец, дадим определение вероятности $\mathsf{Q}[x|\mathsf{c}]$ перколяции из вершины $x \in V$ графа Λ на бесконечность. Заметим, что в общем случае, для графов произвольного вида и для произвольных дихотомических случайных полей, эта вероятность не обязана совпадать с пределом $\lim\limits_{|y|\to\infty} \mathsf{Q}[x,y|\mathsf{c}]$ вероятности перколяции в вершину y при неограниченном возрастании расстояния $\mathrm{dist}(x,y)$. Очень важной проблемой дискретной теории перколяции является описание тех графов и случайных полей, для которых такое предельное соотношение, на самом деле, имеет место.

Пусть $\mathfrak{P}_\infty(x)$ – класс бесконечных несамопересекающихся путей $\gamma(x)$, которые начинаются в вершине x. Тогда вероятность $\mathsf{Q}[x|\mathsf{c}]$ перколяции из вершины x определяется формулой

$$\mathsf{Q}[x|\mathsf{c}] = \Pr\{\exists(\gamma(x) \in \mathfrak{P}_\infty(x) : \gamma(x) \subset \tilde{C})\}\,. \tag{2}$$

Она позволяет сформулировать простое утверждение –

Теорема 1. *Справедливо предельное соотношение*

$$\mathsf{Q}[x|\mathsf{c}] = \lim_{n\to\infty} \mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}]\,. \tag{3}$$

□ Из формулы (1) следует, что

$$\{\exists(\gamma(x) \in \mathfrak{P}_\infty(x) : \gamma(x) \subset \tilde{C})\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n(x)\,, \tag{4}$$

где $\mathfrak{A}_1(x) \supset \mathfrak{A}_2(x) \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_n(x) \supset \ldots$. Тогда, согласно (2) и (4), имеем

$$\mathsf{Q}[x|\mathsf{c}] = \Pr\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n(x)\right\} = \lim_{n\to\infty} \Pr\{\mathfrak{A}_n(x)\} \equiv \lim_{n\to\infty} \mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}]\,,$$

где мы воспользовались непрерывностью меры. ■

3. Перколяционное разложение. Для доказательства основной теоремы настоящей работы нам понадобится некоторое предварительное построение, результатом которого является формула, которую мы называем *перколяционным разложением*.

Введём в рассмотрение классы $\mathfrak{W}_n$ связных конечных подмножеств из V, содержащих вершину x и таких, что расстояние от любой вершины каждого из множеств, входящих в $\mathfrak{W}_n$, до вершины x не превосходит n, $n \in \mathbb{N}_+$.

Конструируемое ниже перколяционное разложение случайного события $\mathfrak{Q}_n \equiv \{\tilde{C} : \exists(\gamma \subset \tilde{C} : \gamma \in \mathfrak{P}_n(x))\}$ представляет собой дизъюнктивное разложение на попарно непересекающиеся случайные события, совокупность которых для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ параметризуется классом Ω_n последовательностей $\mathfrak{A}_n \equiv \langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle$ длины n, $n \in \mathbb{N}$, которые мы называем *допустимыми*. Компонентами этих последовательностей являются множества $\Sigma_k \in \mathfrak{W}_k$, $k = 1 \div n$.

Допустимые последовательности $\mathfrak{A}_n$, по определению, являются расширяющимися, то есть для каждого значения $k = 1, ..., n-1$ имеет место строгое включение $\Sigma_{k+1} \supset \Sigma_k$ и при этом, если последовательность $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n, \Sigma_{n+1} \rangle$ принадлежит классу Ω_{n+1}, то её ограничение $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle$ принадлежит классу Ω_n. Последнее свойство позволяет описать классы Ω_n, $n \in \mathbb{N}$ допустимых последовательностей $\mathfrak{A}_n$ индуктивно по величине $n \in \mathbb{N}$ посредством определения класса Ω_1 и указания при каждом фиксированном значении $n \in \mathbb{N}$ для каждой последовательности $\mathfrak{A} = \langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle \in \Omega_n$ класса всех возможных непустых расширений Δ_{n+1} её последней компоненты Σ_n, $\Delta_{n+1} \cap \Sigma_n = \varnothing$, при которых получаются последовательности $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n, \Sigma_{n+1} \rangle$, $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \Delta_{n+1}$ класса Ω_{n+1}.

Обозначим $D_0 = \Sigma_0 = \{x\}$. При $n = 1$ определим класс Ω_1 допустимых последовательностей $\langle \Sigma_1 \rangle$ длины 1, у которых множество возможных значений Σ_1 определяется как $\{\Sigma_1 = \{x\} \cup \Delta_1 : \varnothing \neq \Delta_1 \subset D_1\}$, где $D_1 = \{z \in V : z\varphi x\}$. Зафиксируем значение $n > 1$ и выберем для него произвольную последовательность $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle \in \Omega_n$. Укажем для этой последовательности класс возможных расширений Δ_{n+1}, приводящих к построению всех последовательностей из Ω_{n+1}, у которых начальным отрезком длины n является $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle$. Для этого определим множества $D_k = \{z : \exists(y \in \Sigma_{k-1} : z\varphi y), z \notin \Sigma_{k-1}\}$, $k = 1 \div (n+1)$. Класс всех расширений компоненты Σ_n до какой-либо компоненты Σ_{n+1} допустимой последовательности $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_{n+1} \rangle$ длины $(n+1)$ состоит из непустых подмножеств $\Delta_{n+1} \subset D_{n+1} \setminus (D_0 \cup D_1 \cup ... \cup D_n) \equiv D^*_{n+1}$, если последнее множество не пусто. При этом очевидно, что $\Delta_{n+1} \cap \Sigma_n = \varnothing$. Если же $D^*_{n+1} = \varnothing$, то будем считать, что для допустимой последовательности $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle$ не имеется допустимого расширения.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждой допустимой последовательности $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle \in \Omega_n$ определим множество конфигураций

$$A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = \{\tilde{C} : \Sigma_n \subset \tilde{C},\ \tilde{C} \cap (D^*_k \setminus \Sigma_k) = \varnothing, k = 1 \div n\}.$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место дизъюнктивное разложение*

$$\mathfrak{Q}_n = \{\tilde{C} : \exists(\gamma \subset \tilde{C} : \gamma \in \mathfrak{P}_n(x))\} = \bigcup_{\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle \in \Omega_n} A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) \qquad (5)$$

такое, что справедлива формула

$$\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}] = \sum_{\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle \in \Omega_n} \Pr\{\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle\} = 1\,. \qquad (6)$$

□ Доказательство разбивается на отдельные пункты I - IV.

I. Определим для каждого $k \in \mathbb{N}$ отображение Γ_k. Оно сопоставляет каждой конфигурации $\tilde{C}$ на Λ, в которую может быть уложен, по крайней мере, один несамопересекающийся путь длины k, начинающийся в вершине x, однозначно определяемое непустое множество $\Gamma_k(\tilde{C}) \subset \mathfrak{W}_k$. Это множество состоит из тех и только тех вершин, которые достигаются несамопересекающимися путями $\gamma(x) \subset \tilde{C}$ длины не более, чем k. Оно определяется формулой

$$\Gamma_k(\tilde{C}) = \{z \in V : \exists(\gamma \subset \tilde{C} : z \in \gamma, |\gamma| \leqslant k)\}. \tag{7}$$

Пусть $\tilde{C} \in \mathfrak{Q}_n$. Тогда, согласно данному определению $\Gamma_n(\tilde{C}) \neq \varnothing$. Кроме того, выбрав для этой конфигурации лежащий в ней путь γ длины n рассмотрим все его ограничения длины $k = 1 \div (n-1)$. Они также полностью находятся в $\tilde{C}$. Поэтому, для любого из указанных значений k, имеем $\Gamma_k(\tilde{C}) \neq \varnothing$.

Для каждого $k = 1 \div (n-1)$, согласно формуле (7), имеет место включение $\Gamma_k(\tilde{C}) \subset \Gamma_{k+1}(\tilde{C})$, так как каждый из путей γ, определяющих те вершины в конфигурации $\tilde{C}$, которые должны попасть в $\Gamma_k(\tilde{C})$, является ограничением пути, определяющим вершины из $\tilde{C}$, которые должны попасть в $\Gamma_{k+1}(\tilde{C})$. Ввиду указанного включения последовательность $\langle\Gamma_k(\tilde{C}); k = 1 \div n\rangle$ расширяющаяся. Докажем, что она допустимая. С этой целью введём множества $D'_k = \{z : \exists(y \in \Gamma_{k-1}(\tilde{C}) : z\varphi y), z \notin \Gamma_{k-1}(\tilde{C})\}$. Рассмотрим множество $\Gamma_{k+1}(\tilde{C}) \setminus \Gamma_k(\tilde{C})$.

Пусть $z \in \Gamma_{k+1}(\tilde{C}) \setminus \Gamma_k(\tilde{C})$. Тогда $z \in \tilde{C}$ и существует путь $\gamma(x) \subset \tilde{C}$ (далее, в этом доказательстве все пути несамопересекающиеся) длины $(k+1)$, у которого z является последней вершиной. Если бы этот путь имел меньшую длину, то он был бы полностью расположен в $\Gamma_k(\tilde{C})$, что противоречит выбору вершину z. По этой же причине вершина z не должна содержаться ни в одном из путей с длиной, меньшей чем $(k+1)$ и, в частности, не может быть последней вершиной таких путей. В противном случае, ввиду того, что $z \in \tilde{C}$, эта вершина опять-таки должна была бы находиться в $\Gamma_k(\tilde{C})$.

Рассмотрим предпоследнюю вершину пути $\gamma(x)$. Обозначим её посредством y. Эта вершина является последней у пути $\gamma'(x)$, который получается выбрасыванием вершины z из пути $\gamma(x)$. Так как путь $\gamma'(x)$ имеет длину k и содержится в $\tilde{C}$, то согласно определению множества $\Gamma_k(\tilde{C})$, вершина y должна содержаться в этом множестве. Таким образом, имеют место отношения $y\varphi z$, $z \notin \Gamma_k(\tilde{C})$ и $y \in \Gamma_k(\tilde{C})$. Это означает, что $z \in D'_{k+1}$.

Из определения множеств D'_j, $j = 1 \div k$ следует, что каждая вершина y, принадлежащая при каком-либо $j = 1 \div k$ одновременно D'_j и $\tilde{C}$, обязательно принадлежит $\Gamma_j(\tilde{C})$, так как для неё существует вершина y' в $\Gamma_{j-1}(\tilde{C})$ такая, что $y'\varphi y$, и следовательно, путь $\gamma''(x)$, заканчивающийся в y', может быть продолжен добавлением ребра $\langle y', y\rangle$, оставаясь в конфигурации $\tilde{C}$. Таким образом, $z \notin D'_j$, $j = 1 \div k$, так как, в противном случае, $z \notin \Gamma_{k+1}(\tilde{C}) \setminus \Gamma_k(\tilde{C})$. Следовательно, $z \in D'_{k+1} \setminus (\bigcup\limits_{j=0}^{k} D'_j)$. Так как это равенство имеет место при любом $k = 1 \div n$, то это завершает доказательство допустимости последовательности $\langle\Gamma_k(\tilde{C}); k = 1 \div n\rangle$.

II. Для произвольной конфигурации $\tilde{C}$ из $\mathfrak{Q}_n$ положим $\Sigma_k = \Gamma_k(\tilde{C})$, $k = 1 \div n$. Тогда, ввиду доказанной в п.I допустимости последовательности $\langle\Gamma_k(\tilde{C}); k = 1 \div n\rangle$, рассматриваемая конфигурация содержится в $A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$. Следовательно, имеет место включение

$$\mathfrak{Q}_n \subset \bigcup_{\langle\Sigma_1,...,\Sigma_n\rangle \in \Omega_n} A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n). \tag{8}$$

С другой стороны, рассмотрим произвольную конфигурацию $\tilde{C}$ из множества $A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$, соответствующего некоторой допустимой последовательности $\langle \Sigma_k; k = 1 \div n\rangle$. Построим, рассуждая посредством спуска по $k = 1 \div n$, несамопересекающийся путь $\langle x, x_1, ..., x_n\rangle \subset \tilde{C}$. Выберем произвольную вершину x_n в непустом, ввиду допустимости последовательности $\langle \Sigma_k; k = 1 \div n\rangle$ множестве $\Sigma_n \setminus \Sigma_{n-1}$. Пусть уже построен на основе выбранной вершины заканчивающийся в ней путь $\langle x_{k+1}, ..., x_n\rangle$, у которого $x_j \in \Sigma_j \setminus \Sigma_{j-1}$, $j = (k+1) \div n$. Множество $\Sigma_k \setminus \Sigma_{k-1}$ не пусто, ввиду допустимости последовательности $\langle \Sigma_k; k = 1 \div n\rangle$. По этой же причине в этом множестве найдётся вершина y, для которой имеет место $y\varphi x_{k+1}$. Так как $\Sigma_{j+1} \setminus \Sigma_j \subset D_{j+1} \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{j} D_i\right)$, $j = k, ..., n-1$, то $\Sigma_k \cap (\Sigma_{j+1} \setminus \Sigma_j) = \varnothing$, $j = k, ..., n-1$. Поэтому y не совпадает ни с одной из вершин x_j, $j = k+1, ..., n$. Положив $x_k = y$, мы завершаем построение очередного шага спуска. Таким образом, мы построим шаг за шагом несамопересекающийся путь $\langle x_1, ..., x_n\rangle$, у которого $x_k \in D_k \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} D_j\right)$, $k = 1 \div n$. При этом, $x_1 \in D_1$. Поэтому $x\varphi x_1$. Это позволяет завершить построение искомого пути.

Наличие пути $\langle x, x_1, ..., x_n\rangle$ в конфигурации $\tilde{C}$ указывает на то, что $\tilde{C} \in \mathfrak{Q}_n$. Ввиду произвольности конфигурации $\tilde{C}$ в приведенном выше рассуждении имеет место включение

$$\mathfrak{Q}_n \supset A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) .$$

Ввиду же произвольности допустимой последовательности $\langle \Sigma_k; k = 1 \div n\rangle \in \Omega_n$ получаем, что справедливо включение

$$\mathfrak{Q}_n \supset \bigcup_{\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n\rangle \in \Omega_n} A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) . \qquad (9)$$

Наличие включений (8) и (9) позволяет утверждать, что

$$\mathfrak{Q}_n = \bigcup_{\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n\rangle \in \Omega_n} A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) . \qquad (10)$$

III. Докажем, что разложение (10) дизъюнктивно. Рассмотрим два множества $A_n(\Sigma'_1, ..., \Sigma'_n)$ и $A_n(\Sigma''_1, ..., \Sigma''_n)$, соответствующие двум различным допустимым наборам $\langle \Sigma'_1, ..., \Sigma'_n\rangle$ и $\langle \Sigma''_1, ..., \Sigma''_n\rangle$. Пусть номер k, $1 \leqslant k \leqslant n$ – наименьший, при котором $\Sigma'_k \neq \Sigma''_k$. Ввиду минимальности номера k, множества Σ'_k и Σ''_k имеют одно и то же множество D_k. Кроме того, все множества D_j, $j = 1 \div (k-1)$ являются общими для обоих последовательностей множеств $\langle \Sigma'_k, ..., \Sigma'_n\langle$ и $\langle \Sigma''_1, ..., \Sigma''_n\rangle$. Так как $\Sigma'_k \neq \Sigma''_k$, то симметрическая разность $(\Sigma'_k \setminus \Sigma''_k) \cup (\Sigma''_k \setminus \Sigma'_k)$ не пуста. Следовательно, найдётся, по крайней мере, одна отличающая множества Σ'_k, Σ''_k вершина. Положим, для определённости, что таковой является вершина $z \in \Sigma''_k \setminus \Sigma'_k$. Тогда, согласно определению допустимой последовательности $\langle \Sigma''_1, ..., \Sigma''_n\rangle$, вершина $z \in \tilde{C}$ для любой конфигурации $\tilde{C}$, общей для множеств $A_n(\Sigma'_1, ..., \Sigma'_n)$, $A_n(\Sigma''_1, ..., \Sigma''_n)$. С другой стороны, согласно допустимости последовательности $\langle \Sigma'_1, ..., \Sigma'_n\rangle$, $z \notin \tilde{C}$ для этой же конфигурации, так как $\Sigma''_k \setminus \Sigma'_k \subset D^*_k \setminus \Sigma'_k$ и поэтому $(D^*_k \setminus \Sigma'_k) \cap \tilde{C} = \varnothing$. Полученное противоречие доказывает пустоту пересечения $A_n(\Sigma'_1, ..., \Sigma'_n) \cap A_n(\Sigma''_1, ..., \Sigma''_n)$. Таким образом, согласно п.II и из доказанной дизъюнктивности совокупности множеств $A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$, перечисляемой всеми возможными последовательностями $\mathfrak{A}_n \in \Omega_n$, имеет место дизъюнктивное разложение (5).

IV. Для любого пути $\gamma = \langle x, x_1, ..., x_n \rangle$, множество

$$\{\gamma \subset \tilde{C}\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x_i \in \tilde{C}\}$$

измеримо. При любом фиксированном $k = 1 \div n$ для любого фиксированного множества $\Sigma_k \in \mathfrak{W}_k$ измеримо также множество

$$\bigcap_{\substack{\gamma:|\gamma|\leqslant n, \\ \gamma\subset\Sigma_k}} \{\gamma \subset \tilde{C}\} = \{\Gamma_k(\tilde{C}) = \Sigma_k\},$$

так как совокупность всех путей γ, которые определяют множества в пересечении, конечна. Следовательно, измеримо множество

$$A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = \bigcap_{k=1}^{n} \{\Gamma_k(\tilde{C}) = \Sigma_k\}$$

при любом наборе $\mathfrak{A}_n$, то есть оно является случайным событием и поэтому имеет определённую вероятность $\Pr\{A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)\} \equiv \mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$.

Так как для каждого значения $k \in \mathbb{N}$ класс $\mathfrak{W}_k$ конечен, то каждое из множеств $\Omega_k \subset \mathfrak{W}_1 \times ... \times \mathfrak{W}_k$ представляет собой не более чем конечную совокупность элементов. По этой причине, разложение (5) состоит из конечной совокупности компонент. Тогда следствием дизъюнктивности разложения (5) является формула (6). ■

Формулу (6) мы называем перколяционным разложением. Оно имеет место для любого дихотомического случайного поля. Его важность связана с тем, что возможно аналитическое описание связи вероятностей $\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ с распределением вероятностей поля. В следующем пункте мы выявим эту связь в том случае, когда поле $\{\tilde{c}(z); z \in V\}$ является бернуллиевским.

4. Случай бернуллиевского поля. Пусть на графе $\Lambda(V, \Phi)$ задано неоднородное бернуллиевское случайное поле $\{\tilde{c}(z); z \in V\}$, то есть множество случайных величин $\tilde{c}(z)$, отмеченных вершинами $z \in V$, которые являются независимыми в совокупности, и их распределение вероятностей даётся равенствами $\Pr\{\tilde{c}(z) = 1\} = c(z)$, $z \in V$, где $\mathsf{c} : V \mapsto [0, 1]$ – вероятности заполнения вершин $x \in V$.

Свяжем теперь вероятности $\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ с распределением вероятностей бернуллиевского поля $\{\tilde{c}(z); z \in V\}$. С этой целью введём для каждого $n \in \mathbb{N}$ функции

$$\mathsf{Q}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = \left(\prod_{z\in\Delta_n} c(z)\right)\left(\prod_{z\in D_n^*\setminus\Delta_n} (1 - c(z))\right), \tag{11}$$

зависящие от допустимых наборов $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle$. Их значения зависят также функционально, как от параметров, от всех концентраций, определяющих бернуллиевское случайное поле. Здесь $D_n^* = D_n \setminus (\bigcup_{k=0}^{n-1} D_k)$, $n \in \mathbb{N}$. Имеет место

Теорема 3. *Для вероятности* $\mathsf{P}_n(\Sigma_1,...,\Sigma_n)$ *справедливо рекуррентное соотношение*

$$\mathsf{P}_n(\Sigma_1,...,\Sigma_{n-1},\Sigma_n) = \mathsf{P}_{n-1}(\Sigma_1,...,\Sigma_{n-1})\mathsf{Q}_n(\Sigma_1,...,\Sigma_{n-1},\Sigma_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{12}$$

□ Зафиксировав допустимую последовательность $\langle\Sigma_1,...,\Sigma_n,\Sigma_{n+1}\rangle$, запишем случайное событие $A_{n+1}(\Sigma_1,...,\Sigma_n,\Sigma_{n+1})$ в следующей форме

$$A_{n+1}(\Sigma_1,...,\Sigma_n,\Sigma_{n+1}) \equiv \{\Sigma_{n+1} \subset \tilde{C}, (D^*_k \setminus \Sigma_k) \cap \tilde{C} = \varnothing, k = 1 \div (n+1)\} =$$
$$= \{(D^*_{n+1} \setminus \Sigma_{n+1}) \cap \tilde{C} = \varnothing, (\Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n) \subset \tilde{C};$$
$$\Sigma_n \subset \tilde{C}, (D^*_k \setminus \Sigma_k) \cap \tilde{C} = \varnothing, k = 1 \div n\} =$$
$$= \{(D^*_{n+1} \setminus \Sigma_{n+1}) \cap \tilde{C} = \varnothing, (\Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n) \subset \tilde{C}\} \cap$$
$$\cap \{\Sigma_n \subset \tilde{C}, (D^*_k \setminus \Sigma_k) \cap \tilde{C} = \varnothing, k = 1 \div n\}\,,$$

где учтено, что последовательность $\langle\Sigma_1,...,\Sigma_n\rangle$, являющаяся ограничением допустимой последовательности, также допустимая. Так как $D^*_{n+1} \cap \Sigma_n = \varnothing$ и случайное поле бернуллиевское, события $\{(D^*_{n+1} \setminus \Sigma_{n+1}) \cap \tilde{C} = \varnothing, \Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n \subset \tilde{C}\}$ и $\{\Sigma_n \subset \tilde{C}, (D^*_k \setminus \Sigma_k) \cap \tilde{C} = \varnothing, k = 1 \div n\}$ независимы. Тогда

$$\Pr\{A_{n+1}(\Sigma_1,...,\Sigma_n,\Sigma_{n+1})\} = \mathsf{P}_{n+1}(\Sigma_1,...,\Sigma_n,\Sigma_{n+1}) =$$
$$= \Pr\{(D^*_{n+1} \setminus \Sigma_{n+1}) \cap \tilde{C} = \varnothing, \Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n \subset \tilde{C}\} \times$$
$$\times \Pr\{\Sigma_n \subset \tilde{C}, (D^*_k \setminus \Sigma_k) \cap \tilde{C} = \varnothing, k = 1 \div n\}\,.$$

Первый сомножитель в правой части равенства, учитывая независимость значений поля в каждой из вершин $z \in D^*_{n+1}$ равен

$$\Pr\{(D^*_{n+1} \setminus \Sigma_{n+1}) \cap \tilde{C} = \varnothing, \Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n \subset \tilde{C}\} =$$
$$= \left(\prod_{z \in \Delta_n} c(z)\right)\left(\prod_{z \in D^*_n \setminus \Delta_n} (1 - c(z))\right)\,,$$

где $\Delta_{n+1} = \Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n$, а второй по определению является вероятностью $\mathsf{P}_n(\Sigma_1,...,\Sigma_{n-1},\Sigma_n)$. Откуда получаем формулу (12). ■

Следствие. *Вероятность* $\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}]$ *представляется формулой*

$$\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}] = c(x) \sum_{\langle\Sigma_1,...,\Sigma_n\rangle \in \Omega_n} \prod_{k=1}^{n} \mathsf{Q}_k(\Sigma_1,...,\Sigma_k)\,. \tag{13}$$

□ Доказательство проводится индукцией по $n \in \mathbb{N}$ на основе рекуррентной формулы (12) и значения вероятности $\mathsf{P}_0(\Sigma_0) = \Pr\{\tilde{c}(x) = 1\} = c(x)$. ■

5. Основная теорема. Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать основную теорему.

Теорема 4. *Для любого графа* $\Lambda(V,\Phi)$ *и любой вершины* $x \in V$ *вероятность* $\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}]$ *перколяции из вершины* x *на расстояние* n *бернуллиевского случайного поля* $\{\tilde{c}(z); z \in V\}$

с распределением вероятностей $Pr\{\tilde{c}(z) = 1\} = c(z)$, $z \in V$ *является строго возрастающей функцией по каждой из концентраций* $c(z)$, $z \in V$.

$\Box$ Продифференцируем вероятность $\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ по параметру $c(z)$, $z \in V$,

$$\frac{\partial}{\partial c(z)}\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial c(z)}\mathsf{Q}_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_k)\right)\prod_{j=1:j\neq k}^{n}\mathsf{Q}_j(\Sigma_1, ..., \Sigma_j)+$$
$$+\delta_{x,z}\prod_{j=1}^{n}\mathsf{Q}_j(\Sigma_1, ..., \Sigma_j)\,. \tag{14}$$

Для каждого допустимого набора $\langle\Sigma_1, ..., \Sigma_n\rangle$, каждая из функций $\mathsf{Q}_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_k)$ зависит только от тех параметров $c(z)$, для которых $z \in D_k^*$, $k = 0 \div n$. Поэтому, при каждом фиксированном наборе $\langle\Sigma_1, ..., \Sigma_n\rangle$, в сумме (13) только одно слагаемое не равно нулю и согласно (12) можно написать

$$\frac{\partial}{\partial c(z)}\sum_{\langle\Sigma_1,...,\Sigma_n\rangle}\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) =$$
$$= c(x)\sum_{k=1}^{n}\sum_{\langle\Sigma_1,...,\Sigma_{k-1}\rangle}\left[\frac{\partial}{\partial c(z)}\sum_{\Sigma_k:z\in D_k^*}\mathsf{Q}_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_k)\right]\times$$
$$\times\sum_{\langle\Sigma_{k+1},...,\Sigma_n\rangle}\prod_{j=1:j\neq k}^{n}\mathsf{Q}_j(\Sigma_1, ..., \Sigma_j)+$$
$$+\,\delta_{x,z}\sum_{\langle\Sigma_1,...,\Sigma_n\rangle}\prod_{j=1}^{n}\mathsf{Q}_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_k)\,.$$

Доказательство завершается установлением положительности суммы, стоящей в квадратной скобке. Так как в этой сумме множества Σ_k таковы, что $\varnothing \neq \Delta_k = \Sigma_k \setminus \Sigma_{k-1} \subset D_k^*$, то, согласно (11), для этой суммы имеем

$$\sum_{\varnothing\neq\Delta_k\subset D_k^*}\frac{\partial}{\partial c(z)}\left(\prod_{y\in\Delta_k}c(y)\right)\left(\prod_{y\in D_k^*\setminus\Delta_k}(1-c(y))\right) =$$
$$= \sum_{\Delta_k\subset D_k^*:z\in\Delta_k}\left(\prod_{y\in\Delta_k\setminus\{z\}}c(y)\right)\left(\prod_{y\in D_k^*\setminus\Delta_k}(1-c(y))\right) -$$
$$-\sum_{\varnothing\neq\Delta_k\subset D_k^*:z\notin\Delta_k}\left(\prod_{y\in\Delta_k}c(y)\right)\left(\prod_{y\in D_k^*\setminus(\Delta_k\cup\{z\})}(1-c(y))\right) =$$
$$= \prod_{y\in D_k^*\setminus\{z\}}(1-c(y)) \geqslant 0\,.$$

Последнее тождество связано с тем, что первая сумма равна тождественно 1, а вторая отличается от 1 на слагаемое с $\Delta_k = \varnothing$. ■

Следствие. *Для любого графа $\Lambda(V, \Phi)$ и любой вершины $x \in V$ вероятность $\mathsf{Q}[x|\mathsf{c}]$ перколяции из вершины x на бесконечность бернуллиевского случайного поля $\{\tilde{c}(z); z \in V\}$ с распределением вероятностей $Pr\{\tilde{c}(z) = 1\} = c(z)$, $z \in V$ является неубывающей функцией по каждой из концентраций $c(z)$, $z \in V$.*

□ Доказательство получается переходом к пределу $n \to \infty$ в каждом из неравенств $Q_n[x|\mathsf{c}]_{c(z)=c_1} < Q_n[x|\mathsf{c}]_{c(z)=c_2}$, $c_1 < c_2$, характеризующих свойство возрастания функции $\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}]$. ■

6. Заключение. Доказанное в этой работе свойство монотонности довольно естественно с физической точки зрения. В самом деле, совершенно ясно, что повышение концентрации $c(z)$ для любой из вершин $z \in V$, то есть вероятности того, что эта вершина присутствует в конфигурации $\tilde{C}$ недефектных вершин, должно приводить к повышению вероятности существования в $\tilde{C}$ какого-либо пути, соединяющего две наперёд заданные вершины x и y графа, так как повышается вероятность существования такого пути, который бы проходил через вершину z. Тем не менее, математическое доказательство этого простого физического факта до настоящего времени отсутствовало в дискретной теории перколяции. Интересно было бы установить остаётся ли справедливым доказанное утверждение для произвольных моделей теории перколяции при подходящей его формулировке. Если же будет установлено, что это не так, то естественно возникает вопрос: насколько широк класс моделей, для которых утверждение о монотонном возрастании остаётся верным. В частности, по-видимому, указанным свойством монотонности должна обладать вероятность перколяции бернуллиевского поля на произвольном направленном графе и аналогичная величина дихотомического гиббсовского случайного поля ("решёточного газа") с притягивающим взаимодействием (см., например, [3]).

Литература

1. Broadbent S.R., Hammersley J.M. Percolation processes I. Crystals and mazes// Proceedings of the Cambridge Philosiphical Society. – 1957. – 53. – P.629-641.

2. Frisch C.M., Hammersley J.M. Percolation processes and related topics// Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1963. – 11. – P.894-918.

3. Simon B. The $P(\varphi)_2$ euclidian (quantum) field theory.– Princeton: Princeton University Press, 1974. (Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля.– М.: Мир, 1976.)

4. Mc Diarmid C.J.H. General percolation and random graphs// Advances ib Applied Probability. – 1881. – 13. – P.40-60.

5. Wierman J.C. Percolation Theory// Annals of Probability. – 1982. – 10. – P.509-524.

6. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians/ H.Kesten. – Boston: Birkhauser, 1982.

7. Grimmett G. Percolation. 2nd Edition/ G.Grimmet. – New York: Springer-Verlag, 1999.

8. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы/ Ю.Ю.Тарасевич. – М.: Эдиториал УРСС, 2002.

9. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Просачивание бернуллиевского случайного поля на конечное расстояние // Вестник Херсонск. нац. техн. ун-та. – 2010. – 3(39). – С.30-34.

MONOTONOUS DEPENDENCE OF BERNOULLI RANDOM FIELD PERCOLATION PROBABILITY ON INFINITE GRAPHS

E.S. Antonova Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: antonova_e_s@mail.ru
Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. The cite problem for arbitrary infinite graphs $\Lambda(V, \Phi)$ in discrete percolation theory is considered. The percolation probability $\mathsf{Q}_n[\mathsf{c}; x]$ is studied. It characterizes the property of the nonuniform Bernoulli random field that is the percolation on finite distance $n \in \mathbb{N}$ from the fixed vertex x. It is proved the monotonous dependence $\mathsf{Q}_n[\mathsf{c}; x]$ on each component $c(y)$, $y \in V$ of the concentration distribution $\mathsf{c} = \{c(z); z \in V\}$ of graph vertexes being not defected.

Key words: percolation probability, infinite graph, Bernoulli random field.