УДК 517.987

ИНДИКАТОРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

Ю.П. Вирченко, О.Л. Шпилинская

Белгородский государственный университет,

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru
Институт монокристаллов НАНУ,

пр. Ленина, 60, Харьков, Украина, e-mail: spilolga@isc.kharkov.ua

Аннотация. Изучается связь замкнутых случайных подмножеств из $\mathbb{R}$ с соответствующим каждому из них индикаторным случайным процессом. Доказывается, что для наличия сепарабельности у замкнутого случайного множества, понимаемой по Матерону, необходима и достаточна сепарабельность его индикаторного случайного процесса.

Ключевые слова: случайные множества, индикаторные процессы, сепарабельность.

1. Введение. Традиционно, начиная с классических работ Шоке [1], Кендала [2], Матерона [3], случайные множества определяют посредством отображения F некоторого вероятностного пространства $\langle \Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P} \rangle$ такого, у которого образами элементов ω пространства элементарных событий Ω являются подмножества фиксированного множества W. Множество W, в дальнейшем, мы называем *пространством погружения*. Это отображение порождает новое вероятностное пространство $\langle \mathsf{F}(\Omega), \mathsf{F}(\mathcal{B}), \mathsf{P}(\mathsf{F}^{-1}(\cdot)) \rangle$, в котором образ $\Sigma = \mathsf{F}(\Omega)$ содержится в 2^W и представляет собой новое пространство элементарных событий, $\mathfrak{B} = \mathsf{F}(\mathcal{B})$ является σ-алгеброй на пространстве Σ, элементами которой являются *классы множеств*. Таким образом, отображение F, по определению измеримо относительно $\mathcal{B}$. Наконец, $\mathsf{Q}(\cdot) = \mathsf{P}(\mathsf{F}^{-1}(\cdot))$ – вероятностная мера, индуцируемая на Σ посредством отображения F.

Частным случаем такого построения вероятностного пространства случайных множеств является их определение на основе индикаторного случайного поля $\langle \tilde{\xi}(x); x \in W \rangle$, заданного на W.[‡)] А именно, пусть имеется случайное поле $\langle \tilde{\xi}(x); x \in W \rangle$, определяемое тройкой $\langle \Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P} \rangle$ и принимающее значения в $\{0, 1\}$. Тогда Ω состоит из всех допустимых для поля $\langle \tilde{\xi}(x); x \in W \rangle$ случайных реализаций, а отображение F, сопоставляющее случайным реализациям $\tilde{\xi}(x)$, $x \in W$ элементы A из Σ даётся равенством $A = \mathsf{F}(\tilde{\xi}) \equiv \{x : \tilde{\xi}(x) = 1\}$.

‡Знак "тильда"над буквой далее всюду указывает на случайность математического объекта, обозначаемого этой буквой.

Определение 1 (см., например, [5], с.53). *Пусть случайный процесс* $\langle\tilde{\xi}(x)\,;x\in W\rangle$, *заданный на отрезке* W *и принимающий значения в* $\mathbb{R}$, *определяется вероятностным пространством* $\langle\Omega,\mathcal{B},\mathsf{P}\rangle$. *Процесс* $\langle\tilde{\xi}(x)\,;x\in W\rangle$ *называется сепарабельным по отношению к счётному, всюду плотному в* W *множеству* $T\subset W$, *которое называется множеством сепарабельности, если существует случайное событие* $N_T\in\mathcal{B}$ *такое, что* $\mathsf{P}(N_T)=0$, *и для любого отрезка* $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ *и интервала* $(a,b)\subset W$ *имеет место включение*

$$\{\tilde{\xi}\in\Omega:\forall(x\in(a,b)\cap T:\,\tilde{\xi}(x)\in[\alpha,\beta])\}\setminus$$

$$\{\tilde{\xi}\in\Omega:\forall(x\in(a,b):\,\tilde{\xi}(x)\in[\alpha,\beta])\}\subset N_T\,. \tag{1}$$

Определение 2. *Процесс* $\langle\tilde{\xi}(x)\,;x\in W\rangle$ *называется сепарабельным на* W *(в общем смысле), если в Определении 1 случайное событие* N_T *можно выбрать так, что оно не зависит от множества сепарабельности* T, $N_T\equiv N$, $\mathsf{P}(N)=0$.

Таким образом, для сепарабельного случайного процесса в качестве множества сепарабельности может быть выбрано любое счётное всюду плотное подмножество из W.

Далее, в этой работе мы рассматриваем только такие случайные процессы, которые являются индикаторными для случайных множеств. В связи с этим, переформулируем данное определение сепарабельности случайного процесса для частного случая индикаторных случайных процессов $\langle\tilde{\xi}(x)\in\{0,1\};x\in W\rangle$.

Лемма 1. *Индикаторный случайный процесс* $\langle\tilde{\xi}(x)\in\{0,1\}\,;x\in W\rangle$ *является сепарабельным по отношению к счётному, всюду плотному в* W *множеству* T *тогда и только тогда, когда существует такое случайное событие* N_T, $\mathsf{P}(N_T)=0$, *что для любого интервала* $(a,b)\subset W$ *имеют место включения*

$$\{\tilde{\xi}\in\Omega:\forall(x\in(a,b)\cap T:\,\tilde{\xi}(x)=1)\}\setminus\{\tilde{\xi}\in\Omega:\forall(x\in(a,b):\,\tilde{\xi}(x)=1)\}\subset N_T\,, \tag{2}$$

$$\{\tilde{\xi}\in\Omega:\forall(x\in(a,b)\cap T:\,\tilde{\xi}(x)=0)\}\setminus\{\tilde{\xi}\in\Omega:\forall(x\in(a,b):\,\tilde{\xi}(x)=0)\}\subset N_T\,. \tag{3}$$

Индикаторный случайный процесс является сепарабельным (в общем смысле) тогда и только тогда, когда во включениях (2) и (3) случайное событие $N_T=N$ *может быть выбрано таким образом, что оно не зависит от* T.

□ Это утверждение очевидно, так как приведенные включения (2) и (3) получается непосредственно из определений 1 и 2 при двух возможных выборах α и β, $\alpha=\beta=0$ и

$\alpha = \beta = 1$ в (1). Наоборот, в случае выполнимости включений (2) и (3), включения (1) для произвольно выбранного отрезка $[\alpha, \beta]$ являются их следствием. ■

Случайные сепарабельные процессы обладают с вероятностью единица такими реализациями, которые имеют в каждой точке $x \in W$ пределы справа и слева (см., например, [4]).

3. Случайные замкнутые множества. Будем рассматривать далее случайные замкнутые множества в W. Обозначим посредством $\mathrm{cl}(\cdot)$ операцию *замыкания*, результатом применения которой к произвольному подмножеству из W является его замыкание. Пусть $\mathfrak{L}_W = \{L \subset W : \mathrm{cl}(L) = L\}$ – класс замкнутых множеств в W.

Определение 3 (см. [3]). *Случайным замкнутым множеством в W называется вероятностное пространство $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$, у которого Σ является классом подмножеств W, $\Sigma \subset 2^W$, σ-алгебра $\mathfrak{B}$ является минимальной σ-алгеброй, содержащей классы множеств, которые являются элементами семейства $\mathfrak{F} = \{\{L \in \mathfrak{L}_W : [a,b] \cap L \neq \varnothing\}; c_1 \leqslant a < b \leqslant c_2\}$.*

При этом распределение вероятностей Q таково, что, для любого случайного события $\mathcal{A} = \{\tilde{X} \in \mathcal{A}\} \in \mathfrak{B}$, класс $\mathrm{cl}(\mathcal{A}) \equiv \{\mathrm{cl}(\tilde{X}); \tilde{X} \in \mathcal{A}\}$ также является случайным событием, то есть представляет собой измеримый класс множеств в вероятностном пространстве $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$. Кроме того, для любых измеримых классов множеств имеет место равенство $\mathsf{Q}(\mathcal{A}) = \mathsf{Q}(\mathrm{cl}(\mathcal{A}))$.

Данное определение случайных замкнутых множеств таково, что оно предполагает измеримость операции замыкания в применении к случайным событиям, т.е. для каждого случайного события $\mathcal{A}$, класс $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$ реализаций из Σ также является случайным событием (не обязательно принадлежащем $\mathfrak{B}$[§)]). Из этого определения, в частности, следует, что для случайных замкнутых множеств имеет место равенство $\mathsf{Q}(\{\tilde{X} \in \Sigma : \mathrm{cl}(\tilde{X}) = \tilde{X}\}) = 1$ [3]. Это условие оказывается также и достаточным.

А именно, справедлива

Лемма 2. *Пусть случайное множество $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ таково, что для всякого его случайного события $\mathcal{A}$ класс множеств $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$ также является случайным событием. Тогда для замкнутости этого случайного множества необходимо и достаточно, чтобы имело место $\mathsf{Q}(\{\tilde{X} \in \Sigma : \mathrm{cl}(\tilde{X}) = \tilde{X}\}) = 1$.*

□ Докажем достаточность выполнимости указанного равенства. Пусть $\mathcal{A}$ – произволь-

[§]Мы различаем классы реализаций, принадлежащие $\mathfrak{B}$ и измеримые классы реализаций, которые присоединяются к $\mathfrak{B}$ в результате продолжения по Лебегу меры Q с σ-алгебры $\mathfrak{B}$ на более широкое семейство. Случайными событиями мы называем именно эти последние классы реализаций.

ное случайное событие из вероятностного пространства $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q}\rangle$. Так как $\mathcal{A}$ и $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$ одновременно измеримы, то есть являются элементами σ-алгебры измеримых классов подмножеств из W, то

$$\mathsf{Q}\left([\mathcal{A} \setminus \mathrm{cl}(\mathcal{A})] \cup [\mathrm{cl}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}]\right) = \mathsf{Q}\left([\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\}] \cap [\mathcal{A} \setminus \mathrm{cl}(\mathcal{A})] \cup [\mathrm{cl}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}]\right) =$$

$$= \mathsf{Q}\left([\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\} \cap [\mathcal{A} \setminus \mathrm{cl}(\mathcal{A})]] \cup [\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\} \cap [\mathrm{cl}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}]]\right) .$$

где первое равенство связано с тем, что $\mathsf{Q}(\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\}) = 1$. Так как первая компонента объединения преобразуется следующим образом

$$\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\} \cap [\mathcal{A} \setminus \mathrm{cl}(\mathcal{A})] = [\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\} \cap \mathcal{A}] \setminus [\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\} \cap \mathrm{cl}(\mathcal{A})] =$$

$$= [\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\} \cap \mathrm{cl}(\mathcal{A})] \setminus [\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\} \cap \mathrm{cl}(\mathcal{A})] = \varnothing$$

и точно также вторая –

$$\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\} \cap [\mathrm{cl}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}] = [\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\} \cap \mathrm{cl}(\mathcal{A})] \setminus [\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\} \cap \mathcal{A}] =$$

$$= [\mathrm{cl}(\tilde{X}) \cap \mathrm{cl}(\mathcal{A})] \setminus [\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X})\} \cap \mathrm{cl}(\mathcal{A})] = \varnothing ,$$

то из полученного равенства следует

$$\mathsf{Q}\left([\mathrm{cl}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}] \cup [\mathcal{A} \setminus \mathrm{cl}(\mathcal{A})]\right) = \mathsf{Q}(\varnothing) = 0 ,$$

что означает $\mathsf{Q}(\mathcal{A}) = \mathsf{Q}(\mathrm{cl}(\mathcal{A}))$. ■

Следующий пример показывает наличие случайных множеств, которые не являются замкнутыми.

Пример 1. Пусть G – непрерывная функция распределения вероятностей, точки изменения которой находятся на отрезке $[0,1]$. Пусть, далее, $\langle \tilde{\xi}_n \in [0,1]; n \in \mathbb{N}\rangle$ – последовательность независимых одинаково распределённых величин, общей функций распределения которой является G. Определим на основе каждой из случайных реализаций этой последовательности новую случайную последовательность $\langle \tilde{Y}_n; n \in \mathbb{N}_+\rangle$, компонентами которой являются конечные множества $\tilde{Y}_n = \{\tilde{\xi}_k \in [0,1]; k = 1 \div n\}$. Случайные реализации $\tilde{X}$ конструируемого нами множества определяются в виде теоретико-множественных пределов траекторий случайного процесса $\langle \tilde{Y}_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ с дискретным временем,

$$\tilde{X} = \lim_{n\to\infty} \tilde{Y}_n . \qquad (4)$$

Таким образом, имеется вероятностное пространство Ω, состоящее из последовательностей $\tilde{\xi} = \langle \tilde{\xi}_n \in [0,1]; n \in \mathbb{N} \rangle$, структура измеримости на котором определяется стандартным образом в виде σ-алгебры $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, где $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ – σ-алгебра борелевских множеств из $\mathbb{R}$, а распределение вероятностей $\mathsf{P} = \mathsf{G}^{\mathbb{N}}$ понимается, как степень меры G на $\mathbb{R}$, определяемой функцией распределения G. Вероятностное пространство $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ конструируемого случайного множества в пространстве погружения $W = [0,1]$ является образом отображения F, которое переводит элементы $\tilde{\xi}$ из Ω в элементы $\tilde{X}$, определяемые формулой (4). Вся их совокупность $\Sigma = \mathsf{F}(\Omega)$ составляет выборочное пространство случайного множества.

Каждая реализация $\tilde{X}$, по построению, состоит из счётного множества точек из W. Ввиду непрерывности функции G каждая реализация с вероятностью 1 всюду плотно покрывает отрезок $[0,1]$. Поэтому, каждая реализация с вероятностью 1 не является замкнутой. ■

Определённое выше семейство $\mathfrak{B}$ случайных событий вероятностного пространства замкнутого случайного множества, являющееся σ-алгеброй, обладает простыми, но очень важными свойствами.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{B}$ – минимальная σ-алгебра, содержащая все элементы класса $\mathfrak{F}$. Тогда для любых объектов: точки $x \in W$, чисел a и b, $c_1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c_2$ и счётного множества $\Lambda \subset W$ – следующие классы подмножеств из W принадлежат $\mathfrak{B}$:*[¶)]

$$1).\ \{\tilde{X} \ni x\}\,; \quad 2).\ \{\tilde{X} \cap \Lambda \neq \varnothing\}\,;$$

$$3).\ \{\tilde{X} \subset (a,b)\}\,; \quad 4).\ \{\tilde{X} \subset [a,b]\}\,;$$

$$5).\ \{\tilde{X} = \{x\}\}\,; \quad 6).\ \{\tilde{X} \supset \Lambda\}\,;$$

$$7).\ \{\tilde{X} \cap (a,b) \neq \varnothing\}\,; \quad 8).\ \{\tilde{X} \cap [a,b] \neq \varnothing\}\,.$$

□ 1). Пусть $x \in W$, и последовательность отрезков $\langle [a_n, b_n]\,; n \in \mathbb{N} \rangle$, каждый из которых содержит эту точку, сходится при $n \to \infty$ к x в теоретико-множественном смысле. Так как, согласно Определению 3, для каждого $n \in \mathbb{N}$, класс случайных реализаций $\{\tilde{X} \cap [a_n, b_n] \neq \varnothing\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{B}$, то класс

$$\{x \in \tilde{X}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{[a_n, b_n] \cap \tilde{X} \neq \varnothing\}$$

[¶]Начиная с этого места мы при теоретико-множественном определении случайных событий опускаем указание того множества, откуда выбираются случайные реализации, так как это не должно вызывать недоразумения.

также является элементом из $\mathfrak{B}$.

2). Из 1) следует, что для любого счётного множества Λ класс множеств

$$\{\Lambda \cap \tilde{X} \neq \varnothing\} = \bigcup_{x\in\Lambda} \{x \in \tilde{X}\},$$

являющийся счётным объединением классов множеств из $\mathfrak{B}$, также принадлежит $\mathfrak{B}$.

3). Класс множеств $\{[a,b] \cap \tilde{X} \neq \varnothing\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{B}$ по построению. Тогда класс

$$\complement\{[a,b] \cap \tilde{X} \neq \varnothing\} = \{[a,b] \cap \tilde{X} = \varnothing\} = \{\tilde{X} \subset W \setminus [a,b]\}$$

также принадлежит $\mathfrak{B}$ при любых a и b из отрезка W, если $b > a$. Поэтому следующие классы множеств $\{\tilde{X} \subset W \setminus [c_1, a]\}$, $\{\tilde{X} \subset W \setminus [b, c_2]\}$ являются элементами из $\mathfrak{B}$. Отсюда следует, что при указанных a и b класс случайных реализаций

$$\{\tilde{X} \subset W \setminus [b, c_2]\} \cap \{\tilde{X} \subset W \setminus [c_1, a]\} =$$

$$= \{\tilde{X} \subset W \setminus ([c_1, a] \cup [b, c_2])\} = \{\tilde{X} \subset (a,b)\}.$$

принадлежит $\mathfrak{B}$.

4). Допустим теперь, что числа a и b связаны нестрогим неравенством $a \leqslant b$. Рассмотрим последовательности $\langle a_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ и $\langle b_n; n \in \mathbb{N}\rangle$, где первая, монотонно возрастая, стремится к a, а вторая, монотонно убывая, стремится к b при $n \to \infty$. Тогда из представления

$$\{\tilde{X} \subset [a,b]\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tilde{X} \subset (a_n, b_n)\},$$

в виде пересечения счётного набора классов множеств из $\mathfrak{B}$, на основании доказанного утверждения 3), получаем 4).

5). Положив в 4) $x = a = b$ получаем утверждение 5).

6). Для произвольного не более счётного множества Λ класс множеств $\{\Lambda \subset \tilde{X}\}$, представленный в виде не более чем счётного пересечения

$$\{\tilde{X} \supset \Lambda\} = \bigcap_{x\in\Lambda} \{x \in \tilde{X}\}$$

элементов из $\mathfrak{B}$ (см. 1).), является также элементом из $\mathfrak{B}$.

7). Пусть $a < b$. Рассмотрим последовательности $\langle a_n \in (a,b); n \in \mathbb{N}\rangle$ и $\langle b_n \in (a,b); n \in \mathbb{N}\rangle$ такие, что при всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место $a_n < b_n$. Первая последовательность, монотонно убывая, стремится к a, а вторая, монотонно возрастая, стремится к b при $n \to \infty$. Тогда из представления

$$\{\tilde{X} \cap (a,b) \neq \varnothing\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tilde{X} \cap [a_n, b_n] \neq \varnothing\}\,,$$

в виде объединения счётного набора классов множеств из $\mathfrak{B}$, следует, что справедливо утверждение 7).

8). Справедливость утверждения 8) следует из представления

$$\{\tilde{X} \cap [a,b] \neq \varnothing\} = \{\tilde{X} \cap (a,b) \neq \varnothing\} \cup \{a \in \tilde{X}\} \cup \{b \in \tilde{X}\}\,. \quad \blacksquare$$

Следствие. *Классы множеств, представленные в пп.1)-8), являются случайными событиями на вероятностном пространстве $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ замкнутых случайных множеств.*

□ Утверждение следует из того, что все элементы σ-алгебры $\mathfrak{B}$ – измеримые классы множеств на вероятностном пространстве $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$. ■

Указанное следствие доказанной теоремы, как утверждение об измеримости некоторых классов множеств в вероятностном пространстве замкнутых случайных множеств, допускает следующее усиление.

Теорема 2. *В любом из вероятностных пространств $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ замкнутых случайных множеств, для любых чисел a и b, $c_1 < a < b < c_2$ измеримы следующие классы множеств*

$$1).\ \{[a,b] \subset \tilde{X}\}\,; \quad 2).\ \{(a,b) \subset \tilde{X}\}\,.$$

□ 1). Положив, в качестве Λ в классе множеств 6), множество, всюду плотное в интервале (a,b), и, воспользовавшись определением вероятностного пространства замкнутых случайных множеств, применим операцию замыкания к случайным реализациям события $\{\Lambda \cap (a,b) \subset \tilde{X}\}$. В результате, получаем утверждение об измеримости класса $\{\mathrm{cl}(\Lambda \cap (a,b)) \subset \mathrm{cl}(\tilde{X})\}$, посредством продолжения по Лебегу распределения вероятностей Q с σ-алгебры $\mathfrak{B}$. Таким образом, класс $\{\mathrm{cl}(\Lambda \cap (a,b)) \subset \mathrm{cl}(\tilde{X})\}$ является случайным событием, совпадающим с вероятностью единица с классом множеств $\{[a,b] \subseteq \tilde{X}\}$, которое, таким образом, является измеримым.

2). Зададим две последовательности $\langle a_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle b_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, где первая является монотонно убывающей, а вторая – монотонно возрастающей, причём имеют место неравенства $a < a_n < b_n < b$. Кроме того, потребуем чтобы $a_n \to a$ и $b_n \to b$ при $n \to \infty$. Тогда имеет место представление

$$\{(a,b)\subset\tilde{X}\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{[a_n,b_n]\subset\tilde{X}\}\,.$$

Отсюда, согласно доказанному выше утверждению п.1) и того факта, что счётное объединение измеримых классов множеств $\{[a_n,b_n]\subset\tilde{X}\}$ измеримо, получаем, что измерим класс множеств $\{(a,b)\subset\tilde{X}\}$. ■

Рассмотрим теперь отображение F, порождающее случайные множества на основе индикаторных случайных процессов. Пусть пространство элементарных событий Ω в вероятностном пространстве $\langle\Omega,\mathcal{B},\mathsf{P}\rangle$ представляет собой множество всех индикаторных функций на W, т.е. принимающих только значения 0 или 1. Определим пространство Σ как образ Ω при отображении $\mathsf{F}:\Omega\mapsto\Sigma$, действие которого на любую индикаторную функцию $\tilde{\xi}\in\Omega$ определяется формулой

$$\mathsf{F}(\tilde{\xi})=\tilde{X}=\{x\in W:\tilde{\xi}(x)=1\}\,. \tag{5}$$

Это отображение взаимно однозначно, то есть имеется однозначное обратное отображение F^{-1}, действие которого на любое подмножество $\tilde{X}\subset W$ имеет вид

$$\mathsf{F}^{-1}(\tilde{X})=\tilde{\xi}(x)=\begin{cases}1 & ,x\in\tilde{X}\,;\\ 0 & ,x\notin\tilde{X}\,;\end{cases}\qquad \tilde{X}\subset W\,. \tag{6}$$

Случайный процесс $\langle\tilde{\xi}(x);x\in W\rangle$, где $\tilde{\xi}\in\Omega$, является *индикаторным для случайного множества* $\langle\Sigma,\mathfrak{B},\mathsf{Q}\rangle$. Множество Ω его случайных реализаций совпадает с $\mathsf{F}^{-1}(\Sigma)$, σ-алгебра $\mathcal{B}$ совпадает с $\mathsf{F}^{-1}(\mathfrak{B})$, а распределение вероятностей P определяется как $\mathsf{P}=\mathsf{QF}$. В частности, индикаторный случайный процесс сопоставляется случайному замкнутому множеству (см., например, [3], с.67).

4. Сепарабельность случайных замкнутых множеств. Основываясь на взаимно однозначной связи между случайным множеством и соответствующим ему индикаторным случайным процессом, дадим, исходя из определений 2 и 3, следующее

Определение 4. *Случайное множество в пространстве погружения W называется сепарабельным относительно множества сепарабельности $T\subset W$, если соответствующий ему индикаторный случайный процесс на W является сепарабельным относительно T.*

Определение 5. *Случайное множество в пространстве погружения W называется сепарабельным (в общем смысле), если соответствующий ему индикаторный случайный процесс на W является сепарабельным.*

Следствием этого определения сепарабельности случайного множества является следующая

Лемма 3. *Случайное замкнутое множество* $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ *в пространстве погружения* W *является сепарабельным относительно счётного, всюду плотного в* W *множества* T *тогда и только тогда, когда существует такое счётное, всюду плотное в* W *множество* $T \subset \mathbb{R}$ *и такое случайное событие* $\mathcal{N}_T$*, имеющее вероятность* $\mathsf{Q}(\mathcal{N}_T) = 0$*, что для любого интервала* (a, b) *имеют место включения*

$$\{(a,b) \cap T \subset \tilde{X}\} \setminus \{(a,b) \subset \tilde{X}\} \subset \mathcal{N}_T\,, \tag{7}$$

$$\{(a,b) \cap T \cap \tilde{X} = \varnothing\} \setminus \{(a,b) \cap \tilde{X} = \varnothing\} \subset \mathcal{N}_T\,. \tag{8}$$

□ Ввиду того, что множество значений индикаторного процесса $\langle \tilde{\xi}(x); x \in W \rangle$ состоит из двух точек $\{0, 1\}$, то условие его сепарабельности относительно T состоит в существовании случайного события N_T, для которого $\mathsf{P}(N_T) = 0$ и, на основании Леммы 1, имеют место включения

$$A_0 \equiv \{\tilde{\xi} : \forall (x \in (a,b) \cap T : \tilde{\xi}(x) = 1)\} \setminus \{\tilde{\xi} : \forall (x \in (a,b) : \tilde{\xi}(x) = 1)\} \subset N_T\,,$$

$$A_1 \equiv \{\tilde{\xi} : \forall (x \in (a,b) \cap T : \tilde{\xi}(x) = 0)\} \setminus \{\tilde{\xi} : \forall (x \in (a,b) : \tilde{\xi}(x) = 0)\} \subset N_T\,,$$

верные для любого интервала $(a, b) \subset W$. Отсюда следует, что для соответствующих случайных событий $\mathsf{F}(A_0)$, $\mathsf{F}(A_1)$, $\mathsf{F}(N_T)$ в пространстве $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ имеют место включения

$$\mathsf{F}(A_0) = \{\forall (x \in (a,b) \cap T : x \in \tilde{X})\} \setminus \{\forall (x \in (a,b) : x \in \tilde{X})\} \subset \mathsf{F}(N_T)\,,$$

$$\mathsf{F}(A_1) = \{\forall (x \in (a,b) \cap T : x \notin \tilde{X})\} \setminus \{\forall (x \in (a,b) : x \notin \tilde{X})\} \subset \mathsf{F}(N_T)\,.$$

Так как $\mathsf{Q}(\mathsf{F}(N_T)) = \mathsf{P}(N_T) = 0$, то, положив $\mathcal{N}_T = \mathsf{F}(N_T)$, получим, что $\mathsf{Q}(\mathcal{N}_T) = 0$, и эти включения эквивалентны соответственно (7) и (8). ■

Случайное замкнутое множество может быть сепарабельным относительно одного множества сепарабельности T, но не быть сепарабельным относительно другого счётного, всюду плотного множества. Более того, случайное замкнутое множество может не быть сепарабельным ни для какого счётного, всюду плотного в W множества T. Следующие примеры демонстрируют эти положения.

Пример 2. Пространство Σ случайного множества в пространстве погружения $W = [0, 1]$ состоит из двух реализаций $\Sigma = \{\varnothing, \{1/2\}\}$. По этой причине такое случайное множество замкнуто. Его σ-алгебра конечна, а распределение вероятностей определяется равенством $\mathsf{Q}(\{1/2\}) = p$, $0 < p < 1$. Пусть $T = \{k/2^n; k = 0 \div 2^n, n \in \mathbb{N}\}$. Тогда, для единственной непустой реализации $\tilde{X} = \{1/2\}$ имеем $T \cap \{1/2\} = \{1/2\}$, то есть включение (8) выполняется. Точно также включение (7) выполняется тривиальным образом, так как $\{(a,b) \cap T \subset \tilde{X}\} = \varnothing$ для любого интервала (a,b). Поэтому случайное множество сепарабельно, в силу Леммы 3, относительно данного счётного, всюду плотного в W множества T.

Наоборот, если $T = \{k/3^n; k = 0 \div 3^n, n \in \mathbb{N}\}$, то для непустой реализации $\tilde{X} = \{1/2\}$ имеем $\{1/2\} \cap T = \varnothing$ с вероятностью p. Поэтому $\mathsf{Q}(\{(a,b) \cap T \cap \tilde{X} = \varnothing\}) = 1$ для любого интервала (a,b), в то время как $\mathsf{Q}(\{(a,b) \cap \tilde{X} = \varnothing\}) = 1 - p$ в случае, если $(a,b) \ni 1/2$. Следовательно, включение (8) не выполняется и случайное множество не сепарабельно относительно последнего счётного, всюду плотного в W множества T. ■

Пример 3. Случайное множество в пространстве погружения $W = [0,1]$ одноточечное и замкнуто. Его пространство состоит из одноточечных множеств $\Sigma = \{\{x\}; x \in [0,1]\}$, σ-алгеброй $\mathfrak{B}$ является σ-алгебра борелевских множеств в W, а распределение вероятностей даётся непрерывной функцией распределения $F(x) = \mathsf{Q}\{\{x\} : \tilde{x} < x\}$. Тогда вероятность случайного события $\{\tilde{x} = z\}$ равна нулю, для любого числа $z \in [0,1]$, и поэтому для любого счётного, всюду плотного в W множества T вероятность события $\{\tilde{x} \in T\}$ также равна нулю. Следовательно, $\mathsf{Q}\left(\{(a,b) \cap T \cap \tilde{X} = \varnothing\}\right) = 1$, где $\tilde{X} = \{x\}$, в то время как

$$\mathsf{Q}\left(\{(a,b) \cap \tilde{X} = \varnothing\}\right) = F(a) + 1 - F(b) \not\equiv 1$$

и включение (8) не имеет места. Случайное множество не сепарабельно. ■

Случайное множество, рассмотренное нами в Примере 1, очевидно, принимая во внимание изучение последнего примера, является несепарабельным по отношению к любому множеству сепарабельности $T \subset [0,1]$.

Оказывается, что условие замкнутости случайного множества является всё же очень сильным. При его наличии, можно ослабить достаточное условие относительной сепарабельности.

Лемма 4. *Если случайное множество на отрезке $W \subset \mathbb{R}$ с вероятностным пространством $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$, $\Sigma \subset 2^W$ замкнуто, то существует такое случайное событие $\mathcal{N}$, $\mathsf{Q}(\mathcal{N}) = 0$, для которого при любых: $a, b \in W$, $a < b$ и счётного, всюду плотного в W множества T имеет место включение*

$$\{(a,b) \cap T \subset \tilde{X}\} \setminus \{(a,b) \subset \tilde{X})\} \subset \mathcal{N}. \tag{9}$$

□ Пусть равенство $\mathrm{cl}(\tilde{X}) = \tilde{X}$ имеет место с вероятностью 1. Положим

$$\mathcal{N} = \{\mathrm{cl}(\tilde{X}) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\}.$$

Согласно определению замкнутого множества этот класс измерим и $\mathsf{Q}(\mathcal{N}) = 0$. Зафиксируем счётное, всюду плотное в W множество T и выберем произвольный интервал $(a,b) \subset W$. Пусть $x \in (a,b)$ – произвольная точка из (a,b). Рассмотрим замкнутые случайные реализации $\tilde{X}$ такие, что $(a,b) \cap T \subset \tilde{X}$. Вся их совокупность, ввиду п.6) Теоремы 1, составляет случайное событие. Так как T всюду плотно в W, то найдётся последовательность $\langle x_n \in (a,b) \cap T\,; n \in \mathbb{N}\rangle$, сходящаяся к точке x. В силу замкнутости $\tilde{X}$ заключаем, что $x \in \tilde{X}$. Ввиду произвольности выбора точки x, имеет место включение $(a,b) \subset \tilde{X}$. Таким образом, разность $\{(a,b) \cap T \subset \tilde{X}\} \setminus \{(a,b) \subset \tilde{X}\}$ не содержит незамкнутых реализаций $\tilde{X}$, для которых имеет место $\mathrm{cl}(\tilde{X}) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing$. Откуда следует включение (9). ■

Разумеется, что обратное утверждение не справедливо, т.е. свойство (8) не является достаточным для замкнутости случайного множества, так как для её обеспечения, в частности, нужно чтобы событие $\{(a,b) \subset \tilde{X}\}$ и событие $\{[a,b] \subset \tilde{X}\}$ имели одну и ту же вероятность, а это свойство не гарантируется формулой (8). Однако, доказанная лемма влечёт

Следствие. *Достаточным условием сепарабельности относительно счётного, всюду плотного в W множества T (вообще, сепарабельности) случайных замкнутых множеств является выполнимость условия (8) (выполнимость (8) при любых T с $\mathcal{N}_T$, не зависящем от T), а именно, если случайное множество с вероятностным пространством $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q}\rangle$ замкнуто и имеет место включение (8) (с $\mathcal{N}_T$, не зависящем от T), то существует такое случайное событие $\mathcal{N}_T$ (событие $\mathcal{N}$) с $\mathsf{Q}(\mathcal{N}_T) = 0$ (с $\mathsf{Q}(\mathcal{N}) = 0$), для которого при любых $a, b \in W$, $a < b$ имеет место включение (9) (включение (9), в котором $\mathcal{N}_T$ заменено на $\mathcal{N}$), и, следовательно, это случайное множество сепарабельно относительно T (вообще, сепарабельно).*

□ Если $\mathcal{N}_T$, указанное в условии леммы, существует, то, заменив в правой части включения (8) событие $\mathcal{N}_T$ на $\mathcal{N}_T \cup \mathcal{N}'$, где $\mathcal{N}' = \{\mathrm{cl}(\tilde{X}) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\}$, получим верное включение. При этом $\mathsf{Q}(\mathcal{N}_T \cup \mathcal{N}') \leqslant \mathsf{Q}(\mathcal{N}_T) + \mathsf{Q}(\mathcal{N}') = 0$. Согласно же утверждению леммы включение (7) выполняется при подстановке в его правую часть события $\mathcal{N}'$, и поэтому оно тем более выполняется, если заменить правую часть этого включения на $\mathcal{N}' \cup \mathcal{N}_T$. Отсюда, в силу Леммы 4, следует сепарабельность случайного множества $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q}\rangle$ относительно выбранного множества T. Если же $\mathcal{N}_T$ не зависит от T, то множество $\mathcal{N}' \cup \mathcal{N}_T$ в правых частях видоизменённых указанным образом включений (7) и (8) также не зависит от T, и, в этом случае, случайное множество сепарабельно в общем смысле. ■

Теперь мы в состоянии доказать основное утверждение настоящей работы.

Теорема 3. *Для сепарабельности случайного замкнутого множества* $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathrm{Q} \rangle$ *относительно счётного, всюду плотного в* W *множества* T *необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство*

$$\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) = \tilde{X}\} = 1\,. \tag{10}$$

□ 1. Докажем достаточность условия (10). Пусть случайное множество с множеством случайных реализаций $\tilde{X} \in \Sigma$ замкнуто, и пусть имеет место

$$\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) = \tilde{X}\} = 1$$

для фиксированного множества сепарабельности T. Тогда класс $\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\} \cup \{\tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \neq \varnothing\}$ имеет нулевую вероятность. На основании следствия Леммы 4, достаточно проверить, что для таким образом выбранного случайного события $\mathcal{N}_T$ и для любого интервала (a, b) выполняется включение (8). Покажем, что это включение выполняется, если это событие заменить на более широкое и положить

$$\mathcal{N}_T = \{\tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \neq \varnothing\}\,. \tag{11}$$

Рассмотрим фиксированный интервал (a, b). Докажем сначала, что имеет место

$$\{\tilde{X} \cap (a,b) \cap T = \varnothing\} \setminus \{\tilde{X} \cap (a,b) = \varnothing\} \subset \{(\tilde{X} \cap [a,b]) \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap (a,b) \cap T) \neq \varnothing\}\,. \tag{12}$$

Пусть $\tilde{Z}$ – реализация, принадлежащая классу в левой части этого включения. Тогда, ввиду тождества

$$\{(\tilde{X} \cap (a,b) \cap T) = \varnothing\} \setminus \{\tilde{X} \cap (a,b) = \varnothing\} =$$
$$= \{\tilde{X} \cap (a,b) \cap T = \varnothing, \tilde{X} \cap (a,b) \neq \varnothing\}\,,$$

для этой реализации имеют место $\tilde{Z} \cap (a,b) \cap T = \varnothing$ и $\tilde{Z} \cap (a,b) \neq \varnothing$. Применив операцию замыкания к первому равенству и усилением второго неравенства, получаем соотношения $\mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap (a,b) \cap T) = \varnothing$ и $\tilde{Z} \cap [a,b] \neq \varnothing$. Тогда реализация $\tilde{Z}$ содержится в классе правой части включения (12). Ввиду произвольности реализации $\tilde{Z}$ имеет место (12).

Докажем теперь, что справедливо включение

$$\{(\tilde{X} \cap [a,b]) \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap (a,b) \cap T) \neq \varnothing\} \subset \{\tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \neq \varnothing\}\,. \tag{13}$$

Пусть снова $\tilde{Z}$ – произвольная реализация из класса в левой части. Для неё одновременно выполняются два соотношения

$$(\tilde{Z} \cap [a,b]) \setminus \mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap (a,b) \cap T) = \varnothing\,, \quad \tilde{Z} \cap [a,b] \neq \varnothing\,.$$

Пусть z – произвольная точка из $\tilde{Z}$. Тогда $z \in \tilde{Z} \cap [a,b]$ и $z \notin \mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap (a,b) \cap T)$. Следовательно, эта точка принадлежит $\tilde{Z}$ и является внутренней точкой отрезка $[a,b]$. Допустим, что $z \in \mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap T)$. В этом случае найдётся последовательность $\langle z_n \in \tilde{Z} \cap T; n \in \mathbb{N} \rangle$, сходящаяся к z. Причём, так как $z \in (a,b)$, то все члены этой последовательности могут быть выбраны внутри этого интервала. Но в этом случае точка z обязана принадлежать $\mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap (a,b) \cap T)$, вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает, что $z \notin \mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap T)$. Поэтому она принадлежит множеству $\tilde{Z} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap T)$. Произвольность точки z доказывает включение (13).

Последовательно применяя включения (12), (13) получаем включение (8)

$$\{(\tilde{X} \cap (a,b) \cap T) = \varnothing\} \setminus \{\tilde{X} \cap (a,b) = \varnothing\} \subset \mathcal{N}_T\,,$$

в котором событие $\mathcal{N}_T$ выбрано в форме (11).

2. Докажем необходимость условия (10), то есть утверждение: если множество замкнуто и имеют место включения (7) и (8) относительно некоторого фиксированного счётного, всюду плотного в W множества T, то имеет место $\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) = \tilde{X}\} = 1$.

Доказательство разобьём на несколько отдельных пунктов.

А. Допустим противное, что равенство (10) не имеет места, а, наоборот, справедливо

$$\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) = \tilde{X}\} < 1\,.$$

Тогда обязательно выполняется одно из неравенств

$$\Pr\{\tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \neq \varnothing\} > 0\,, \quad \Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \setminus \tilde{X}\} > 0\,. \tag{14}$$

Покажем сначала, что второе из этих неравенств невозможно. Так как случайное множество замкнуто, то $\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X}) = \tilde{X}\} = 1$, и, следовательно,

$$\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X}) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\} = 0\,. \tag{15}$$

Ввиду включения $\tilde{X} \cap T \subset \tilde{X}$, которое влечёт $\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \subset \mathrm{cl}(\tilde{X})$, $\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \setminus \tilde{X} \subset (\mathrm{cl}(\tilde{X}) \setminus \tilde{X})$, имеет место включение для класса реализаций

$$\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\} \subset \{\mathrm{cl}(\tilde{X}) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\}\,.$$

Следовательно, в силу (15), имеет место

$$\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\} = 0\,.$$

B. Допустим теперь, что имеет место первое из неравенств (14). Пусть с положительной вероятностью для реализаций $\tilde{X}$ рассматриваемого случайного множества выполняется неравенство $\tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \neq \varnothing$. Тогда найдётся достаточно большое число $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\Pr\{(\tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T)) \cap (-m, m] \neq \varnothing\} > 0\,.$$

Поэтому далее, не ограничивая общности рассуждений, мы рассматриваем только части каждой из реализаций $\tilde{X}$, содержащиеся в $(-m, m]$, обозначая их, по прежнему, посредством $\tilde{X}$.

C. Докажем, что если $\tilde{Y} = \tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \neq \varnothing$ с положительной вероятностью, то, с той же вероятностью, каждая точка $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ обладает такой окрестностью $(\tilde{y} - \varepsilon(\tilde{y}), \tilde{y} + \varepsilon(\tilde{y}))$ с $\varepsilon(\tilde{y}) > 0$, которая не пересекается с $\tilde{X} \cap T$.

Допустим противное, то есть что для любого сколь угодно малого $\varepsilon_n > 0$ всегда найдётся точка $\tilde{x}_n \in \tilde{X} \cap T$, $n \in \mathbb{N}$, которая принадлежит интервалу $(\tilde{y} - \varepsilon_n, \tilde{y} + \varepsilon_n)$. Тогда последовательность $\langle \tilde{x}_n \in \tilde{X} \cap T; n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится к $\tilde{y}$,

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{x}_n = \tilde{y}\,.$$

Следовательно, $\tilde{y} \in \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T)$, что противоречит выбору точки $\tilde{y}$.

D. На основании п.**C**, сопоставим каждой точке $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ интервал $(a(\tilde{y}), b(\tilde{y}))$ с

$$a(\tilde{y}) = \inf\{\tilde{y} - \varepsilon(\tilde{y}) : \varepsilon(\tilde{y}) \geqslant 0, (\tilde{y} - \varepsilon(\tilde{y}), \tilde{y}) \cap \tilde{X} \cap T = \varnothing\}\,,$$

$$b(\tilde{y}) = \sup\{\tilde{y} + \varepsilon(\tilde{y}) : \varepsilon(\tilde{y}) \geqslant 0, (\tilde{y}, \tilde{y} + \varepsilon(\tilde{y})) \cap \tilde{X} \cap T = \varnothing\}\,,$$

Определим теперь функцию от $\tilde{y} \in \tilde{Y}$,

$$h(\tilde{y}) = \min\{\tilde{y} - a(\tilde{y}), b(\tilde{y}) - \tilde{y}\}\,,$$

которая является положительной с положительной вероятностью, и, на её основе, введём существующую с той же вероятностью строго положительную случайную величину

$$\tilde{h} = \sup\{h(\tilde{y}) > 0 : \tilde{y} \in \tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T)\}\,.$$

E. Выберем число $n \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы имело место неравенство $\Pr\{\tilde{h} \geqslant 2\delta\} > 0$, где $\delta = m/n$, и разобьём полуинтервал $(-m, m]$ на $2n$ дизъюнктивных полуинтервалов Δ_j, $j = 1 \div 2n$ одинаковой длины.

Согласно проделанному построению, для зафиксированного $n \in \mathbb{N}$ непусто с положительной вероятностью множество $\tilde{Y}_\delta \subset \tilde{Y}$ таких точек $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, для которых $\tilde{h}(\tilde{y}) \geqslant \delta$. Тогда, по крайней мере, хотя бы для одного номера $j = 1 \div 2n$, положительна вероятность $\Pr\{\tilde{h} \geqslant 2\delta, \tilde{Y}_\delta \cap \Delta_j \neq \varnothing\}$. Это связано с тем, что события $\{\tilde{h} \geqslant 2\delta, \tilde{Y}_\delta \cap \Delta_j \neq \varnothing\}$, с разными номерами $j = 1 \div 2n$ попарно несовместимы и

$$\bigcup_{j=1}^{2n} \{\tilde{h} \geqslant 2\delta, \tilde{Y}_\delta \cap \Delta_j \neq \varnothing\} = \{\tilde{h} \geqslant 2\delta, \tilde{Y}_\delta \neq \varnothing\}\,.$$

Не ограничивая общности, будем далее считать, что таким номером является $j = 1$. Таким образом,

$$\Pr\{\tilde{h} \geqslant 2\delta, \tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1 \neq \varnothing\} > 0\,.$$

F. Выбросим левую концевую точку из полуинтервала Δ_1 и обозначим получившийся интервал $\bar{\Delta}_1$. Допустим, что $\tilde{X} \cap T \cap \bar{\Delta}_1 \neq \varnothing$ и $\tilde{x}$ – точка, принадлежащая этому множеству. Выберем произвольную точку $\tilde{y} \in \tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1$. Тогда, согласно построению множества $\tilde{Y}_\delta$, имеет место $h(\tilde{y}) \geqslant \delta$ и, следовательно, $a(\tilde{y}) \leqslant \tilde{y} - \delta$, $b(\tilde{y}) \geqslant \tilde{y} + \delta$, так как точка $\tilde{x}$ должна лежать вне интервала $(a(\tilde{y}), b(\tilde{y}))$. Поэтому $\tilde{x} \leqslant a(\tilde{y}) < \tilde{y} - \delta$, либо $\tilde{x} \geqslant b(\tilde{y}) > \tilde{y} + \delta$, и, в любом случае, $|\tilde{x} - \tilde{y}| > \delta$, что противоречит выбору точки $\tilde{x}$. Следовательно,

$$\tilde{X} \cap T \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing$$

с положительной вероятностью.

G. По построению

$$\{\tilde{X} \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing\} \cap \{\tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1 \neq \varnothing\} = \varnothing\,,$$

$$\{\tilde{X} \cap T \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing\} \cap \{\tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1 \neq \varnothing\} = \{\tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1 \neq \varnothing\}\,.$$

Тогда

$$\Big(\{\tilde{X} \cap T \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing\} \setminus \{\tilde{X} \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing\}\Big) \cap \{\tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1 \neq \varnothing\} = \{\tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1 \neq \varnothing\}\,.$$

Так как последнее событие имеет положительную вероятность, то событие $\{\tilde{X} \cap T \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing\} \setminus \{\tilde{X} \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing\}$ не может иметь нулевую вероятность. Таким образом, не выполнено одно из необходимых условий (8) сепарабельности для интервала $\bar{\Delta}_1$. ■

Доказанная теорема означает, что определение сепарабельности случайного множества на основе сепарабельности соответствующего ему индикаторного случайного процесса эквивалентно следующему определению.

Определение 6 ([3], с.69). *Случайное замкнутое множество* $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ *называется сепарабельным в* W *по Матерону относительно счётного, всюду плотного множества* $T \subset W$, *если выполняется* $\mathsf{Q}\left(\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T)\}\right) = 1$. *Множество* T *называется множеством сепарабельности случайного замкнутого множества* $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$.

Если равенство $\mathsf{Q}(\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T)\}) = 1$ *имеет место для любого счётного, всюду плотного в* W *множества* T, *то случайное множество* $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ *называется сепарабельным по Матерону (в общем смысле).*

Литература

1. Choquet G. Theory of capacities // Ann. Inst. Fourier. – 1953. – **5**. – P.131-295.

2. Kendall D.G. Foundations of theory of random sets // Stochastic Geometry. – Wiley, New York, 1974. – P.322-376.

3. Матерон Ж. Случайные множества и интегральная геометрия // Ж.Матерон. – М.: Мир, 1978. – 320 с.

4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов // И.И. Гихман. – М.: Наука, 1977. – 568 с.

5. Дуб Дж. Вероятностные процессы // Дж. Дуб. – М.: ИЛ, 1956. – 604 с.

6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа // А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1972. – 496с.

7. Амбарцумян Р.В., Мекке Й., Штойян Д. Введение в стохастическую геометрию // Р.В. Амбарцумян. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

INDICATOR RANDOM PROCESS AND SEPARABLE RANDOM CLOSED SETS

Yu.P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Single Crystal Institute of NASU,

Lenin Av., 60, Kharkov, Ukraine, e-mail: spilolga@isc.kharkov.ua

Abstract. The connection between closed random sets in $\mathbb{R}$ and their indicator random processes is studied. It is proved that the separability of the indicator process corresponding to the closed random set is necessary and sufficient for the set separability which is understood by Matheron.

Key words: random sets, indicator processes, separability.