УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В НЕСЖИМАЕМОМ УПРУГОМ СКЕЛЕТЕ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА: СЛУЧАЙ ОДНОСКОРОСТНОГО КОНТИНУУМА

Л.Ф. Маслакова, А.М. Мейрманов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: maslakova@bsu.edu.ru,meirmanov@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений, описывающая совместное движение упругого пористого тела и жидкости, заполняющей поры. Исследуемая модель, несмотря на ее линейность, очень сложна так как основные дифференциальные уравнения содержат под знаком производных недифференцируемые быстро осциллирующие коэффициенты. На основе метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга предлагается строгий вывод усредненных уравнений (т.е. уравнений не содержащих быстро осциллирующих коэффициентов), которыми, при различных комбинациях физических параметров задачи, будет система, состоящая из анизотропных уравнений Ламэ для перемещения смеси жидкости и упругого тела (односкоростной континуум).

Ключевые слова: уравнения Стокса, уравнения Ламэ, уравнения Био, двухмасштабная сходимость, усреднение периодических структур.

Введение

В настоящей работе рассматривается задача о фильтрации несжимаемой вязкой жидкости в несжимаемом упругом скелете. В безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\mathbf{x}' = L\mathbf{x}, \quad t' = \tau t, \quad \mathbf{w}' = L\mathbf{w},$$

$$\rho_s' = \rho_0\rho_s, \quad \rho_f' = \rho_0\rho_f, \quad \mathbf{F}' = g\mathbf{F}, \quad \varepsilon = \frac{l}{L},$$

дифференциальные уравнения модели в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ примут вид:

$$\mathrm{div}\mathbb{P} + \rho^\varepsilon\mathbf{F} = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{w} = 0, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{w}$-перемещение среды,

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon\alpha_\mu\mathbb{D}(x, \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}) + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda\mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p\,\mathbb{I}$$

есть тензор напряжений сплошной среды, равный тензору вязких напряжений

$$\mathbb{P}_f = \alpha_\mu\mathbb{D}(x, \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}) - \chi^\varepsilon p\,\mathbb{I}$$

в области Ω_f^ε, занятой жидкостью и тензору упругих напряжений

$$\mathbb{P}_s = \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - (1 - \chi^\varepsilon) p\,\mathbb{I}$$

в области Ω_s^ε, занятой упругим твердым скелетом, χ^ε – характеристическая функция области Ω_f^ε, $\mathbb{I}$ – единичный тензор, $\mathbb{D}(x, \mathbf{u})$ – симметричная часть градиента вектор-функции $\mathbf{u}$, p – давление в сплошной среде,

$$\rho^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x})\rho_f + (1 - \chi^\varepsilon(\mathbf{x}))\rho_s,$$

$$\alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g \rho_0},$$

μ –вязкость жидкости, λ – постоянная Ламэ, L – характерный размер рассматриваемой области, l – характерный размер пор, τ – характерное время физического процесса, ρ_f и ρ_s– безразмерные плотности жидкости и твердого скелета соответственно, отнесенные к плотности воды ρ_0, $\mathbf{F}$ – заданный вектор внешних массовых сил и g – ускорение силы тяжести. Описание порового пространства Ω_f^ε, твердого скелета Ω_s^ε можно найти в [1].

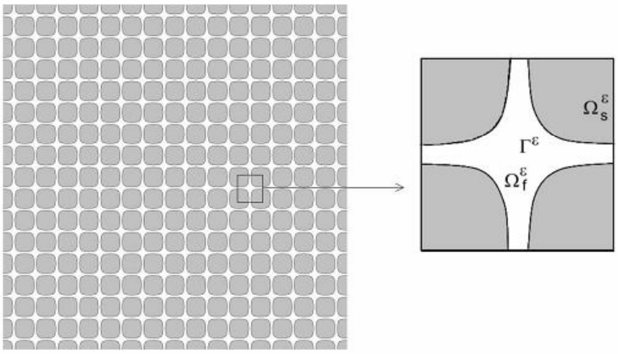

Рис. 1: геометрия порового пространства

В частности,

$$\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}),$$

где 1 – периодическая функция $\chi(\mathbf{y})$ есть характеристическая функция множества $Y_f \subset Y = (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$, моделирующего поровое пространство.

В уравнении (2.1) мы учли предположение о характере рассматриваемого физического процесса и пренебрегли инерционным слагаемым, содержащим $\partial^2 \mathbf{w}/\partial t^2$. А именно, для процессов фильтрации характерное время процесса τ является очень большой величиной (месяцы или год), что в точных безразмерных уравнениях движения приводит к малому сомножителю в инерционном слагаемом. Поэтому этим слагаемым можно изначально пренебречь (см. доказательство в [1]). Заметим, что предположение о несжимаемости жидкости автоматически влечет несжимаемость твердого скелета, поскольку скорость звука в твердой среде в несколько раз больше скорости звука в жидкости. А как известно, мерой несжимаемости (сжимаемости) является скорость звука – менее сжимаемая среда обладает большей скоростью звука. В силу этого уравнения неразрывности для жидкой и твердой компонент среды можно записать в виде одного уравнения (2.2), справедливого всюду в области Ω.

Пусть, как и в [1], Ω есть единичный куб:

$$\overline{\Omega} = [0,1] \times [0,1] \times [0,1],$$

$S = \partial\Omega$ – граница области Ω, $S_0 = \{x | 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, x_3 = 1\}$ –верхняя крышка Ω и $S_1 = S \backslash S_0$.

В отличии от [1] мы рассмотрим смешанную краевую задачу, когда на верхней крышке S_0 области Ω отсутствуют нормальные напряжения

$$\mathbb{P} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad x \in S_0, \quad 0 < t < T. \tag{1.3}$$

где $\mathbf{n}$- внешняя нормаль к границе S_0. На остальной части границы S_1

$$\mathbf{w} = 0, \quad x \in S_1, \quad 0 < t < T. \tag{1.4}$$

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon. \tag{1.5}$$

В данной публикации рассмотрим процессы, для которых

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1, \quad \mu_1 = \infty, \tag{1.6}$$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \quad 0 < \lambda_0 < \infty, \tag{1.7}$$

$$F^2 = \int_{\Omega_T} \Big(|\mathbf{F}|^2 + |\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}|^2 + |\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2}|^2 \Big) dxdt < \infty. \tag{1.8}$$

Условие (1.6) означает, что предельный режим описывает односкоростной континуум.

Обсуждение раннее полученных результатов и обзор литературы можно найти в [1]–[4].

2 Основные результаты

Определение 1 *Функции* $(\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ *называются обобщенным решением задачи (1.1)–(1.5), если они удовлетворяют условиям регулярности*

$$\mathbf{w}^\varepsilon,\ D(x, \mathbf{w}^\varepsilon),\ div\mathbf{w}^\varepsilon,\ p^\varepsilon \in L^2(\Omega_T),\ \Omega_T = \Omega \times (0, T),$$

граничным условиям (1.5), уравнению (1.2) почти всюду в области Ω_T *и интегральному тождеству*

$$\int_{\Omega_T} \Big(-\chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \varphi}{\partial t}) - \rho^\varepsilon \mathbf{F} \cdot \varphi +$$

$$\big((1 - \chi^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon\, \mathbb{I}\big) : D(x, \varphi)\Big) dxdt = 0 \tag{2.1}$$

для всех гладких вектор-функций $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ *таких, что* $\varphi|_{S_1} = \varphi|_{t=T} = 0$.

Теорема 1 *При всех $\varepsilon > 0$ у задачи (1.1)– (1.5) существует единственное обобщенное решение $\mathbf{w}^\varepsilon(x,t)$, такое что*

$$\int_{\Omega_T} \Big(|\mathbf{w}^\varepsilon|^2 + |\nabla \mathbf{w}^\varepsilon|^2 + (p^\varepsilon)^2 \Big) dxdt \leq C(\varepsilon) F^2. \tag{2.2}$$

Теорема 2 *Функции $\mathbf{w}^\varepsilon$ допускают продолжение $\mathbf{u}^\varepsilon$ из области Ω_s^ε в область Ω такое, что*

$$\int_\Omega |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx \leq M \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\mathbf{w}^\varepsilon|^2 dx, \tag{2.3}$$

$$\int_\Omega |\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t}|^2 dx \leq M \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}|^2 dx, \tag{2.4}$$

$$\int_\Omega |\mathbb{D}(x, \mathbf{u}^\varepsilon)|^2 dx \leq M \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon)|^2 dx, \tag{2.5}$$

$$\int_\Omega |\mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t})|^2 dx \leq M \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2 dx, \tag{2.6}$$

где постоянная M не зависит от малого параметра ε. При этом

$$\int_\Omega |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx \leq M \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx \leq M \int_\Omega |\mathbb{D}(x, \mathbf{u}^\varepsilon)|^2 dx, \tag{2.7}$$

$$\int_\Omega |\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t}|^2 dx \leq M \int_\Omega |\nabla \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t}|^2 dx \leq M \int_\Omega |\mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t})|^2 dx, \tag{2.8}$$

$$\alpha_\mu \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon |\mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2 dxdt + \max_{0<t<T} \alpha_\lambda \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon)|^2 dx \leq M F^2, \tag{2.9}$$

$$\alpha_\mu \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon |\mathbb{D}(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2})|^2 dxdt + \max_{0<t<T} \alpha_\lambda \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2 dx \leq M F^2, \tag{2.10}$$

$$\int_{\Omega_T} \Big(|\mathbf{w}^\varepsilon|^2 + (p^\varepsilon)^2 \Big) dxdt \leq M F^2. \tag{2.11}$$

Теорема 3 *Существует подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ такая, что последовательность $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ сходится слабо в $L^2\big((0,T); W_2^1(\Omega)\big)$ к функции $\mathbf{u}$. Кроме того последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(\Omega_T)$ соответственно к $\mathbf{u}$ и p, и функции $\mathbf{u}$ и p удовлетворяют в области Ω_T системе уравнений*

$$div \mathbb{P}_0^s + \hat{\rho}\mathbf{F} = 0, \quad \mathbb{P}_0^s = \lambda_0 \mathbb{A}_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) - p\,\mathbb{I}, \tag{2.12}$$

$$div\, \mathbf{u} = 0, \tag{2.13}$$

где

$$\hat{\rho} = m\,\rho_f + (1-m)\,\rho_s, \; m = \int_Y \chi(\mathbf{y}) dy = \langle \chi \rangle_Y \; - \; \text{пористость},$$

а постоянный симметричный и строго положительно определенный тензор четвертого порядка $\mathbb{A}_0^s$ определяется ниже формулой (5.7). При этом, на верхней крышке S_0 области Ω выполнено условие отсутствия нормальных напряжений

$$\mathbb{P}_0^s \cdot \mathbf{n} = 0, \quad x \in S_0, \tag{2.14}$$

где $\mathbf{n}$- внешняя нормаль к границе S_0, а на остальной части границы S_1

$$\mathbf{u} = 0, \quad x \in S_1. \tag{2.15}$$

Замечание 1 *Уравнение (2.12) и краевое условие (2.14) выполняются в смысле теории распределений, как соответствующее интегральное тождество.*

3 Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 базируется на основном энергетическом тождестве

$$\alpha_\mu \int_{\Omega_f^\varepsilon} \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) dx + \frac{\alpha_\lambda}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s^\varepsilon} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) dx = \int_\Omega \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} dx, \qquad (3.1)$$

которое формально следует из интегрального тождества (2.1), если в качестве пробной функции рассмотреть функцию $\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t$. Далее перепишем это тождество в в виде

$$\alpha_\mu \int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)) dx d\tau + \frac{\alpha_\lambda}{2} \int_{\Omega_s^\varepsilon} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx =$$

$$\int_\Omega \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) dx - \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) dx d\tau. \qquad (3.2)$$

Для простоты изложения мы предположили, что $\mathbf{F}(\mathbf{x}, 0) = 0$. Тогда $\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0$ и интеграл по гиперплоскости $t = 0$ пропадает.

Далее воспользуемся легко проверяемым неравенством

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx \leq T \int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)) dx d\tau,$$

неравенствами Гельдера и Коши

$$\int_\Omega \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) dx \leq \delta \int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_\Omega |\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)|^2 dx,$$

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) dx d\tau \leq \delta \int_0^t \int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)|^2 dx d\tau + \frac{1}{4\delta} \int_0^t \int_\Omega |\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)|^2 dx d\tau$$

получим

$$\int_\Omega \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx \leq C(\varepsilon)\delta \int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 dx + C(\varepsilon, \delta) \int_\Omega |\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)|^2 dx +$$

$$C(\varepsilon)\delta \int_0^t \int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)|^2 dx d\tau + C(\varepsilon, \delta) \int_0^t \int_\Omega |\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)|^2 dx d\tau \qquad (3.3)$$

Левую часть последнего неравенства (3.3) оценим вниз используя неравенство Корна

$$\int_\Omega |\nabla \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)|^2 dx \leq M(\Omega) \int_\Omega \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx \qquad (3.4)$$

и неравенство Пуанкаре-Фридрихса

$$\int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 dx \leq M(\Omega) \int_\Omega |\nabla \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 dx.$$

Имеем

$$\int_{\Omega}|\mathbf{w}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2dx \leq C(\varepsilon)\delta\int_{\Omega}|\mathbf{w}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2dx + C(\varepsilon,\delta)\int_{\Omega}|\mathbf{F}(\mathbf{x},t)|^2dx +$$

$$C(\varepsilon)\delta\int_0^t\int_{\Omega}|\mathbf{w}^{\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)|^2dxd\tau + C(\varepsilon,\delta)\int_0^t\int_{\Omega}|\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x},\tau)|^2dxd\tau \qquad (3.5)$$

Применяя неравенство Гронуолла к (3.5) получим

$$\int_{\Omega}|\mathbf{w}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2dx \leq C(\varepsilon)F^2,$$

что в совокупности с (3.3) и (3.4) окончательно дает нам

$$\int_{\Omega}\Big(|\mathbf{w}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla\mathbf{w}^{\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)|^2\Big)dx \leq C(\varepsilon)F^2, \qquad (3.6)$$

$$\int_0^T\int_{\Omega}\Big(\alpha_\mu\chi^{\varepsilon}\mathbb{D}(x,\frac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}):\mathbb{D}(x,\frac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}) + \alpha_\lambda(1-\chi^{\varepsilon})\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon}):\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})\Big)dxdt \leq C(\varepsilon)F^2. \quad (3.7)$$

Давление p^{ε} оценивается из интегрального тождества (2.1) с помощью оценки (3.7) как линейный непрерывный функционал над пространством $L^2\big((0,T);W_2^1(\Omega)\big)$ функций, равных нулю на границе S_1, что завершает доказательство оценки (2.1). В свою очередь, оценка (2.1) гарантирует существование и единственность обобщенного решения задачи (1.1)– (1.5) при фиксированном $\varepsilon > 0$.

4 Доказательство теоремы 2

Достаточно доказать оценки (2.3), (2.5), (2.7), (2.9), (2.11). Остальные оценки доказываются аналогично, если мы продифференцируем уравнения и краевые условия по времени.

Первое утверждение теоремы (оценки (2.3) и (2.5)) есть просто основной результат работы [5]. Вторая половина оценки (2.7) есть неравенство Корна для заданной области Ω, которая не зависит от малого параметра ε. Первая половина оценки (2.7) получается также как и неравенство Пуанкаре – Фридрихса и использует тот факт, что на границе области Ω функция $\mathbf{u}^{\varepsilon}$ обращается в ноль на периодическом множестве (пересечение замыкания области Ω_s^{ε} с границей области Ω) строго положительной меры, не зависящей от малого параметра ε.

Вывод оценок (2.9) и (2.11) повторяет вывод оценки (2.2) и также базируется на основном энергетическом тождестве в форме (3.2). Основной здесь является хорошо известная оценка [6]

$$\int_{\Omega}|\mathbf{v}|^2dx \leq M\varepsilon^2\int_{\Omega}|\nabla\mathbf{v}|^2dx,$$

справедливой для всякой гладкой функции $\mathbf{v}$, тождественно равной нулю в области Ω_s^{ε}, с постоянной M не зависящей от малого параметра ε. А именно,

$$\int_{\Omega}|\mathbf{w}^{\varepsilon}|^2dx \leq \int_{\Omega}|\mathbf{u}^{\varepsilon}|^2dx + \int_{\Omega}|\mathbf{w}^{\varepsilon}-\mathbf{u}^{\varepsilon}|^2dx \leq$$

$$M\int_{\Omega}|\nabla\mathbf{u}^{\varepsilon}|^2dx + M\varepsilon^2\int_{\Omega}|\nabla(\mathbf{w}^{\varepsilon}-\mathbf{u}^{\varepsilon})|^2dx \leq$$

$$M\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{u}^{\varepsilon})|^2dx+M\varepsilon^2\int_{\Omega}|\mathbb{D}\big(x,(\mathbf{w}^{\varepsilon}-\mathbf{u}^{\varepsilon})\big)|^2dx\leq$$

$$M\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{u}^{\varepsilon})|^2dx+M\varepsilon^2\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx\leq$$

$$M\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{u}^{\varepsilon})|^2dx+M\varepsilon^2\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx+M\varepsilon^2\int_{\Omega_s^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx\leq$$

$$M\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{u}^{\varepsilon})|^2dx+M\frac{\varepsilon^2}{\alpha_\mu}\alpha_\mu\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx+M\frac{\varepsilon^2}{\alpha_\lambda}\alpha_\lambda\int_{\Omega_s^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx=J.$$

Через M здесь и всюду ниже мы обозначаем различные постоянные, не зависящие от малого параметра ε. Поскольку в силу наших предположений

$$\frac{\varepsilon^2}{\alpha_\mu}+\frac{\varepsilon^2}{\alpha_\lambda}\leq M,$$

то

$$J\leq M\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{u}^{\varepsilon})|^2dx+M\alpha_\mu\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx+M\alpha_\lambda\int_{\Omega_s^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx\leq$$

$$M\alpha_\mu\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx+M\alpha_\lambda\int_{\Omega_s^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx.$$

В последней цепочке мы воспользовались неравенством (2.5). Таким образом

$$\int_{\Omega}|\mathbf{w}^{\varepsilon}|^2dx\leq M\alpha_\mu\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx+M\alpha_\lambda\int_{\Omega_s^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx,$$

и дальнейшие рассуждения в доказательстве оценки (2.11)для функции $\mathbf{w}^{\varepsilon}$ повторяют соответствующие рассуждения в доказательстве теоремы 1. Очевидно, что возникающие при этом постоянные не будут зависеть от малого параметра ε. Оценка (2.9) следует из оценки (2.11)для функции $\mathbf{w}^{\varepsilon}$ и тождества (3.2). Наконец, оценка (2.11) для функции p^{ε} следует из оценки (2.9) и интегрального тождества (2.1) как оценка линейного непрерывного функционала над пространством $L^2\big((0,T);W_2^1(\Omega)\big)$ функций, равных нулю на границе S_1.

5 Доказательство теоремы 3

Первое утверждение теоремы есть следствие известных результатов о компактности. Совпадение пределов последовательностей $\{\mathbf{u}^{\varepsilon}\}$ и $\{\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ при ограничении (1.6) доказано в [4]. Вывод уравнения (2.13) есть в [1]. Уравнение (2.12) есть следствие макроскопических уравнений

$$\operatorname{div}_x\Big(\lambda_0\big((1-m)\mathbb{D}(x,\mathbf{u})+\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s}\big)-p\,\mathbb{I}\Big)+\hat{\rho}\mathbf{F}=0, \tag{5.1}$$

в котором 1 – периодическая по переменной $\mathbf{y}$ функция $\mathbf{U}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ определяется из системы микроскопических уравнений

$$\operatorname{div}_y\Big(\lambda_0(1-\chi)\big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U})+\mathbb{D}(x,\mathbf{u})\big)-P\,\mathbb{I}\Big)=0, \tag{5.2}$$

$$(1-\chi)(\operatorname{div}_y\mathbf{U})=0 \tag{5.3}$$

в единичном кубе Y. В первую очередь нам необходимо решить систему микроскопических уравнений (5.2), (5.3) и определить $\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s}$ как оператор от $\mathbb{D}(x,\mathbf{u})$:

$$\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s} = \mathbb{A}_1^s : \mathbb{D}(x,\mathbf{u}).$$

Для этого воспользуемся структурой функции P:

$$P(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = p_f\chi(\mathbf{y}) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)P_s(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$$

и перепишем уравнение (5.2) в виде

$$\operatorname{div}_y\Big((1-\chi)\big(\lambda_0\big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U})+\mathbb{D}(x,\mathbf{u})\big)-(P_s-p_f)\,\mathbb{I}\big)\Big)=0. \tag{5.4}$$

Решение системы (5.3), (5.4) ищем в виде

$$\mathbf{U}=\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{U}^{(ij)}(\mathbf{y})D_{ij}(\mathbf{x},t),\quad P_s-p_f=\sum_{i,j=1}^{3}P^{(ij)}(\mathbf{y})D_{ij}(\mathbf{x},t),$$

где

$$D_{ij}=\frac{1}{2}\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\big)$$

есть компоненты тензора $\mathbb{D}(x,\mathbf{u})$. Легко видеть, что функции $\mathbf{U}^{(ij)}$ и $P^{(ij)}$ есть решения периодической краевой задачи

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{div}_y\Big((1-\chi)\big(\big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}^{(ij)})+\mathbb{J}^{ij}\big)-P^{(ij)}\mathbb{I}\big)\Big)=0,\\ (1-\chi)\operatorname{div}_y\mathbf{U}^{(ij)}=0,\quad \langle\mathbf{U}^{(ij)}\rangle_{Y_s}=0,\quad \mathbf{y}\in Y.\end{array}\right\}, \tag{5.5}$$

где $\mathbb{J}^{ij}$ есть тензор второго порядка, у которого на пересечении i – той строки и j – того столбца стоит единица, а на остальных местах стоят нули. Задача (5.5) однозначно разрешима – у нее существует единственное 1 – периодическое решение

$$\mathbf{U}^{(ij)}\in W_2^1(Y_s)$$

и

$$\mathbb{A}_1^s=\sum_{i,j=1}^{3}\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}^{(ij)})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{J}^{ij}. \tag{5.6}$$

Таким образом

$$\mathbb{A}_0^s=\sum_{i,j=1}^{3}(1-m)\mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij}+\mathbb{A}_1^s. \tag{5.7}$$

Лемма 1 *Тензор $\mathbb{A}_0^s$ является симметричным и строго положительно определенным.*

Доказательство 1 *Для доказательства леммы воспользуемся легко проверяемыми равенствами*

$$\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}^{(ij)}):\mathbb{D}(y,\mathbf{U}^{kl})\rangle_{Y_s}+\langle\mathbb{J}^{ij}:\mathbb{D}(y,\mathbf{U}^{kl})\rangle_{Y_s}=0, \tag{5.8}$$

которые справедливы для всех i, j, k, $l=1,\,2,\,3$.

Пусть $\zeta = (\zeta_{ij})$ и $\eta = (\eta_{ij})$ – произвольные симметричные матрицы (тензоры) второго порядка и

$$\mathbf{Y}_\zeta = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{U}^{(ij)}\zeta_{ij}, \quad \mathbf{Y}_\eta = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{U}^{(ij)}\eta_{ij}.$$

Тогда равенства (5.8) влекут равенство

$$\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{Y}_\zeta) : \mathbb{D}(y, \mathbf{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} + \zeta : \langle D(y, \mathbf{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} = 0. \tag{5.9}$$

Поскольку

$$\left(\mathbb{A}_0^s : \eta\right) : \zeta = (1-m)\eta : \zeta + \eta : \langle D(y, \mathbf{Y}_\zeta)\rangle_{Y_s},$$

то складывая последнее равенство с (5.9) получим

$$\left(\mathbb{A}_0^s : \eta\right) : \zeta = (1-m)\eta : \zeta + \eta : \langle D(y, \mathbf{Y}_\zeta)\rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{Y}_\zeta) : \mathbb{D}(y, \mathbf{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} +$$

$$\zeta : \langle D(y, \mathbf{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} = \langle \left(D(y, \mathbf{Y}_\zeta) + \zeta\right) : \left(D(y, \mathbf{Y}_\eta) + \eta\right)\rangle_{Y_s},$$

что доказывает симметричность тензора $\mathbb{A}_0^s$. Полагая в полученном равенстве $\eta = \zeta$ убеждаемся в положительной определенности тензора $\mathbb{A}_0^s$:

$$\left(\mathbb{A}_0^s : \eta\right) : \eta = \langle \left(D(y, \mathbf{Y}_\eta) + \eta\right) : \left(D(y, \mathbf{Y}_\eta) + \eta\right)\rangle_{Y_s} > 0.$$

Последнее, что нам осталось доказать – выполнение краевого условия (2.11) на части границы S_1. Доказательство этого факта достаточно стандартное и идею доказательства можно найти в [1].

Литература

1. А.М. Мейрманов. Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах, Сиб. Мат. Журнал, т. 48, (2007) No. 3, 645– 667.

2. А.М. Мейрманов. Определение акустических и фильтрационных характеристик термоупругих пористых сред: уравнения термо-пороупругости Био, Математический сборник, т. 199 (2008) No. 3, 45– 68.

3. A. Meirmanov. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media, Euro. Jnl. of Applied Mathematics, Vol. 19 (2008), 259–284.

4. A. Meirmanov. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization, SIAM J. Math. Anal., Vol. 40, (2008) No. 3, 1272– 1289.

5. C. Conca. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics, J. math. pures et appl., 64, (1985) 12 – 32.

6. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория вибраций. Мир, Москва (1984).

A DERIVATION OF EQUATIONS FOR FILTRATION OF IMMISCIBLE LIQUID IN IMMISCIBLE ELASTIC SKELETON: THE CASE OF ONE – VELOCITY CONTINUUM

L.F. Maslakova, A.M. Meirmanov

Belgorod State University,

Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: maslakova@bsu.edu.ru,meirmanov@bsu.edu.ru

Abstract. Linear system of differential equation describing a joint motion of a thermoelastic porous body with fluid occupying porous space is considered. Although the problem is linear, it is very difficult to investigate. The main differential equations involve non-smooth oscillatory coefficients under the differentiation operators. The proof is based on Nguetseng's two-scale convergence method of homogenization in periodic structures. As the results, we derive anisotropic Lame's system of equations for thermoelastic mixture.

Keywords: Stoke's equations, Lame's equations, Biot equations, two-scale convergence, homogenization of periodic structures.