УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УНИТАРНОМ ОБОБЩЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОНИНА—ПУАССОНА

С.М. Ситник

Воронежский институт МВД России,
Пр. Патриотов, 53, г. Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Аннотация. Для известных операторов преобразования Сонина и Пуассона рассматривается один класс их обобщений—операторы Бушмана–Эрдейи. Для этих операторов изучаются формулы композиции, устанавливающие их связь с операторами дробного интегродифференцирования. В пространстве L_2 рассматриваются вопросы ограниченности, обратимости, унитарности. Решена задача о построении обобщений операторов преобразования Сонина и Пуассона, которые являются унитарными при всех значениях параметра.

Ключевые слова: операторы преобразования Сонина и Пуассона, унитарность, ограниченность, дробное интегродифференцирование, операторы Бушмана–Эрдейи.

1 Введение

Определение 1 *Пусть дана пара операторов* (A, B). *Оператор* T *называется оператором преобразования (ОП, transmutation), если выполняется соотношение*

$$TA = BT. \tag{1}$$

Соотношение (1) называется иначе *сплетающим свойством*, тогда говорят, что ОП T *сплетает* операторы A и B (intertwining operator). Для превращения (1) в строгое определение необходимо задать пространства или множества функций, на которых действуют операторы A, B, и, следовательно, T. Иногда в определение ОП закладывают и требования его обратимости и/или непрерывности, которые являются желательными, но не обязательными свойствами. В конкретных реализациях операторы A и B чаще всего (но не всегда) являются дифференциальными, T — линейный оператор на стандартных пространствах. Ясно, что понятие ОП является прямым и далеко идущим обобщением понятия подобия матриц из линейной алгебры. Но ОП не сводятся к подобным (или эквивалентным) операторам, так как преобразуемые операторы A и B как правило являются неограниченными в рассматриваемом пространстве. Типичный пример: определённые первоначально на финитных функциях дифференциальные операторы A, B и интегральный ОП, продолжаемый затем по непрерывности на всё пространство $L_2(0, \infty)$. Так что, например, спектры операторов, сплетаемых ОП, могут не совпадать. Кроме дифференциальных, преобразуемые операторы A и B могут также быть интегральными, интегро–дифференциальными, или дифференциально–разностными, все эти случаи встречаются в теории.

Как же обычно используются операторы преобразования? Пусть, например, мы изучаем некоторый достаточно сложно устроенный оператор A. При этом нужные свойства уже известны для модельного более простого оператора B, из которого A получается некоторым возмущением. Тогда, если существует ОП (1), то часто удаётся перенести свойства модельного оператора B и на A. Такова в нескольких словах примерная схема типичного использования ОП в конкретных задачах.

В частности, если рассматривается уравнение $Au = f$ с оператором A, то применяя к нему ОП T со сплетающим свойством (1), получаем уравнение с оператором B вида $Bv = g$, где обозначено $v = Tu, g = Tf$. Поэтому, если второе уравнение с оператором B является более простым, и для него уже известны формулы для решений, то мы получаем и представления для решений первого уравнения $u = T^{-1}v$. Разумеется, при этом обратный оператор преобразования должен существовать и действовать в рассматриваемых пространствах, а для получения явных представлений решений должно быть получено и явное представление этого обратного оператора. Таково одно из основных применений техники ОП в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Изложению теории ОП и их приложениям посвящены существенные части монографий [1]-[16]. К сожалению, на русском языке нет книг, полностью посвящённых ОП, таких, как замечательные книги Роберта Кэррола на английском [1]-[3].

Сделаем одно терминологическое замечание. В западной литературе принят для ОП термин 'transmutation', восходящий к Ж. Дельсарту. Как отмечает Р. Кэрролл, похожий термин 'transformation' при этом закрепляется за классическими интегральными преобразованиями Фурье, Лапласа, Меллина и другими подобными им. Кроме того, термин 'transmutation' имеет в романских языках дополнительный оттенок 'волшебного превращения', что довольно точно характеризует действие ОП. Приведём точную цитату из [3]: "Such operators are often called transformation operators by the Russian school (Levitan, Naimark, Marchenko et. al.), but transformation seems too broad a term, and, since some of the machinery seems "magical" at times, we have followed Lions and Delsarte in using the word transmutation".

Необходимость теории ОП доказана большим числом её приложений. Методы ОП применяются в теории обратных задач, определяя обобщённое преобразование Фурье, спектральную функцию и решения знаменитого уравнения Гельфанда–Левитана, полученного Б.М. Левитаном; в теории рассеяния через ОП выписывается не менее знаменитое уравнение Марченко; в спектральной теории получаются известные формулы следов и асимптотика спектральной функции; оценки ядер ОП отвечают за устойчивость обратных задач и задач рассеяния; в теории нелинейных дифференциальных уравнений метод Лакса позволяет использовать ОП для доказательства существования решений и построения солитонов. Определёнными разновидностями ОП являются части теорий обобщённых аналитических функций и операторов обобщённого сдвига. В теории уравнений с частными производными методы ОП применяются для построения явных решений некоторых задач, изучении сингулярных и вырождающихся краевых задач, псевдодифференциальных операторов, задач для решений с особенностями на части границы, оценки скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений. Теория ОП позволяет дать некоторую новую классификацию специальных функций и интегральных операторов со специальными функциями в ядрах, в том числе различных операторов дробного интегродифференцирования. В теории функций найдены приложения ОП к вложениям функциональных пространств и обобщению операторов Харди, расширению теории Пэли–Винера. Методы ОП с успехом применяются во многих прикладных задачах: оценках решений Йоста и квантовой теории рассеяния, исследовании системы Дирака, теории вероятностей и случайных процессов, линейном стохастическом оценивании, фильтрации, стохастических случайных уравнениях, обратных задачах геофизики и трансзвуковой газодинамики. Рассматривались ранее и изучаются в настоящее время задачи, в которых сплетаются интегральные операторы (например, возмущённый и невозмущённый операторы Вольтерра), интегро–дифференциальные операторы (например, вторая производная плюс дробный интеграл и вторая производная) или дифференциально–разностные операторы (например, оператор Дункля).

В математической физике с ОП тесно связаны понятия волновых операторов для уравнения Шрёдингера и метод вторичного квантования.

О вкладе отечественных математиков в данную теорию не скажешь лучше ведущего американского специалиста по ОП Роберта Кэррола: "Идея ОП, возникшая в начале 50–х, восходит к Гельфанду, Левитану, Марченко, Наймарку и другим. Она была подхвачена вновь Дельсартом и Лионсом..."[17]. На самом деле, некоторые указания на возможность построения ОП встречались и ранее, например, в работах Курта Фридрихса в начале 20–го века.

Мы будем считать, что все интегральные и дифференциальные операторы, рассматриваемые далее в этой статье, первоначально определены на финитных на $L_2(0,\infty)$ функциях (бесконечно дифференцируемых с компактным на данной полуоси носителем), и далее в случае ограниченности соответствующих операторов продолжаются по непрерывности на всё пространство $L_2(0,\infty)$. С учётом этого соглашения мы будем называть дифференциальными операторами объекты, которые более точно следовало бы называть дифференциальными выражениями.

2 Операторы преобразования Сонина и Пуассона

Перейдём к рассмотрению, наверное, самого известного класса ОП, сплетающих дифференциальный оператор Бесселя со второй производной:

$$T(B_\nu)f=(D^2)Tf, B_\nu=D^2+\frac{2\nu+1}{x}D, D^2=\frac{d^2}{dx^2}, \nu\in\mathbb{C}. \tag{2}$$

Как уже было отмечено, одним из способов построения ОП является установление соответствий между решениями соответствующих дифференциальных уравнений. Решениями уравнения вида $B_\nu f=\lambda f$ являются функции Бесселя, а уравнения $D^2 f=\lambda f$— тригонометрические функции или экспонента. Поэтому прообразами ОП вида (2) были формулы Пуассона и Сонина:

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac12)2^{\nu-1}x^\nu}\int_0^x\left(x^2-t^2\right)^{\nu-\frac12}\cos(t)\,dt, \Re\nu>\frac12 \tag{3}$$

$$\cos(x)=\frac{\sqrt{\pi}2^\nu}{\Gamma(\frac12-\nu)}\frac{d}{dx}\int_0^x\left(x^2-t^2\right)^{-\nu-\frac12}t^{\nu+1}J_\nu(t)\,dt, -\frac12<\Re\nu<\frac12. \tag{4}$$

Формулы (3)–(4) приведены и доказаны в [26], проблема только в том, что если формула Пуассона (3) является общеизвестной и приведена во многих источниках, то другой ссылки на формулу (4) я не знаю, в том числе не нашёл её и в работах Н.Я. Сонина. Известна несколько другая формула Сонина

$$J_\nu(x)=\frac{2^{\nu+1}x^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac12-\nu)}\int_x^\infty\left(t^2-x^2\right)^{-\nu-\frac12}\sin(t)\,dt, -\frac12<\Re\nu<\frac12.$$

Определение 2 *ОП Пуассона называется выражение*

$$P_\nu f = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)2^\nu x^{2\nu}} \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{\nu - \frac{1}{2}} f(t)\, dt, \Re\nu > -\frac{1}{2}. \tag{5}$$

ОП Сонина называется выражение

$$S_\nu f = \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \frac{d}{dx} \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\nu - \frac{1}{2}} t^{2\nu+1} f(t)\, dt, \Re\nu < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Операторы (5)–(6) действуют как ОП по формулам

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \tag{7}$$

Их можно доопределить на все значения $\nu \in \mathbb{C}$.

Идею изучения операторов, подобных (5)–(6), высказывал ещё Лиувилль, их реальное использование в контексте теории функций Бесселя начал Николай Яковлевич Сонин. Как ОП эти операторы были введены в работах Дельсарта [18]–[21] и затем изучены в работах Дельсарта и Лионса [22]–[25]. Поэтому мы будем называть (5)–(6) ОП Сонина–Пуассона–Дельсарта (СПД). В нашей стране об операторах СПД в основном узнали из великолепно написанной статьи Б. М. Левитана [26].

Не будет преувеличением сказать, что операторы СПД (5)–(6) являются самыми знаменитыми объектами всей теории ОП, их изучению, приложениям и обобщениям посвящены сотни работ. В частности, в последнее время активно изучаются аналоги ОП СПД для дифференциально–разностного оператора Дункля, являющегося в некотором смысле квадратным корнем из оператора Бесселя.

3 Связь операторов преобразования с дробным интегродифференцированием

Операторы дробного интегродифференцирования играют важную роль во многих современных разделах математики: уравнениях с частными производными, функциональном анализе и теории функций, специальных функциях, многочисленных приложениях (см. энциклопедическую монографию [27], а также [28]–[33]). Для теории специальных функций важность дробного интегродифференцирования отражена в названии известной статьи [34]: "***Все специальные функции получаются дробным интегродифференцированием элементарных функций***"! (Замечание проф. А.А. Килбаса: кроме функций Фокса!)

Приведём список основных операторов дробного интегродифференцирования: Римана–Лиувилля, Эрдейи–Кобера, дробного интеграла по произвольной функции $g(x)$

$$I^\alpha_{0+,x} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \tag{8}$$

$$I^\alpha_{-,x} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

$$I^\alpha_{0+,x^2} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{\alpha-1} 2t f(t) dt, \tag{9}$$

$$I^{\alpha}_{-,x^2} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \left(t^2 - x^2\right)^{\alpha-1} 2t f(t) dt,$$

$$I^{\alpha}_{0+,g} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(g(x) - g(t)\right)^{\alpha-1} g'(t) f(t) dt, \qquad (10)$$

$$I^{\alpha}_{-,g} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \left(g(t) - g(x)\right)^{\alpha-1} g'(t) f(t) dt,$$

во всех случаях предполагается, что $\Re\alpha > 0$, на оставшиеся значения α формулы также без труда продолжаются [27]. При этом обычные дробные интегралы (8) получаются при выборе в (10) $g(x) = x$, Эрдейи–Кобера (9) при выборе $g(x) = x^2$, Адамара при $g(x) = \ln x$.

Связь с ОП проявляется в том, что, как видно из (5)–(6), ОП СПД с точностью до множителей как раз и являются операторами Эрдейи–Кобера, то есть дробными степенями $(\frac{d}{dx^2})^{-\alpha}$. Поэтому основные свойства этих ОП можно получить из теории операторов дробного интегродифференцирования, а не изобретать заново, что нередко и делалось. И многие другие задачи теории ОП обнаруживают тесную связь с операторами дробного интегродифференцирования. А.М. Джрбашян обратил моё внимание на тот факт, что операторы дробного интегрирования по функции (10) являются частными случаями несколько более общих операторов, которые были введены и изучались его отцом М.М. Джрбашяном [27].

4 Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи

Рассмотрим важный класс ОП, который при определённом выборе параметров является одновременным обобщением ОП СПД и их сопряжённых, операторов дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, а также интегральных преобразований Мелера–Фока.

Определение 3 *Операторами Бушмана–Эрдейи называются интегральные операторы*

$$B^{\nu,\mu}_{0+} f = \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P^{\mu}_{\nu}\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt, \qquad (11)$$

$$E^{\nu,\mu}_{0+} f = \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}^{\mu}_{\nu}\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt, \qquad (12)$$

$$B^{\nu,\mu}_{-} f = \int_x^{\infty} \left(t^2 - x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P^{\mu}_{\nu}\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt, \qquad (13)$$

$$E^{\nu,\mu}_{-} f = \int_x^{\infty} \left(t^2 - x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}^{\mu}_{\nu}\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt. \qquad (14)$$

Здесь $P^{\mu}_{\nu}(z)$—функция Лежандра первого рода [35], $\mathbb{P}^{\mu}_{\nu}(z)$—та же функция на разрезе $-1 \le t \le 1$, $f(x)$—локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при $x \to 0, x \to \infty$. Параметры μ, ν—комплексные числа, $\Re\mu < 1$, можно ограничиться значениями $\Re\nu \ge -1/2$.

Данные операторы были введены и первоначально исследованы в работах Р. Бушмана и А. Эрдейи. При этом в основном изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами и их факторизации. Эти результаты изложены в монографии [27], хотя случай выбранных нами пределов интегрирования считается там особым и не рассматривается. Первое достаточно полное исследование операторов Бушмана–Эрдейи проведено автором в [36]–[39], при этом необходимо отметить, что их сплетающие свойства как ОП вообще ранее не отмечались в литературе. Операторы Бушмана–Эрдейи, включая их многомерные версии с интегрированием по пирамидальной области, изучались также в работах А.А. Килбаса и его учеников [40].

Термин "операторы Бушмана–Эрдейи" как наиболее исторически оправданный был введён автором в [36]–[37], впоследствии он использовался другими авторами, см., например, [43]. Ранее в [27] встречался термин "операторы Бушмана".

Важность операторов Бушмана–Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными [27]: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу в четверти плоскости, установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвига действие преобразования Радона при разложении по сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана–Эрдейи по радиальной переменной, при исследовании краевых задач для уравнений с особенностями внутри области [41].

Приведём основные результаты, следуя в изложении [36]–[37]. Вначале распространим определение 3 на важный предельный случай $\mu = 1$.

Определение 4 *Введём при $\mu = 1$ операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам*

$$B_{0+}^{\nu,1} f = \frac{d}{dx} \int_0^x P_\nu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \tag{15}$$

$$E_{0+}^{\nu,1} f = \int_0^x P_\nu \left(\frac{t}{x}\right) \frac{df(t)}{dt}\, dt, \tag{16}$$

$$B_{-}^{\nu,1} f = \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{t}{x}\right) (-\frac{df(t)}{dt})\, dt, \tag{17}$$

$$E_{-}^{\nu,1} f = (-\frac{d}{dx}) \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \tag{18}$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$—функция Лежандра.

Разумеется, при очевидных дополнительных условиях на функции в (15)–(18) можно продифференцировать под знаком интеграла или соответственно проинтегрировать по частям.

Теорема 4.1 *Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана–Эрдейи на подходящих функциях через операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, дробные интегралы Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера:*

$$B_{0+}^{\nu,\mu} = I_{0+}^{1-\mu} B_{0+}^{\nu,1} = I_{0+}^{\nu+2-\mu}\; x\; I_{0+,x^2}^{-(\nu+1)}\; 2^{\nu+1}\; x^{\nu-1}. \tag{19}$$

Аналогичные представления получены для оставшихся трёх операторов из (11)–(14).

Будем рассматривать наряду с оператором Бесселя также тесно связанный с ним оператор, который при целых неотрицательных ν совпадает с оператором углового момента из квантовой механики

$$L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} = \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right)\left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}\right). \tag{20}$$

Их взаимосвязь устанавливает

Теорема 4.2 *Пусть пара ОП X_ν, Y_ν сплетают L_ν и вторую производную:*

$$X_\nu L_\nu = D^2 X_\nu, Y_\nu D^2 = L_\nu Y_\nu. \tag{21}$$

Введём новую пару ОП по формулам

$$S_\nu = X_{\nu-1/2} x^{\nu+1/2}, P_\nu = x^{-(\nu+1/2)} Y_{\nu-1/2}. \tag{22}$$

Тогда пара новых ОП S_ν, P_ν сплетают оператор Бесселя и вторую производную:

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \tag{23}$$

Разумеется, по указанным формулам можно перейти и наоборот от ОП для оператора Бесселя к ОП для оператора углового момента. Мы сохраним за ОП, действующим по формулам (21), названия ОП типа Сонина и Пуассона соответственно.

Теорема 4.3 *Операторы Бушмана–Эрдейи $B_{0+}^{\nu,\mu}, E_{-}^{\nu,\mu}$ на подходящих функциях являются ОП типа Сонина, а $B_{-}^{\nu,\mu}, E_{0+}^{\nu,\mu}$ являются ОП типа Пуассона, они действуют по формулам (21).*

Доказательства процитированных выше теорем приведены в [36].

Отметим, что из того установленного в [36] факта, что операторы Бушмана–Эрдейи являются ОП, в качестве частного случая следует, что они связывают собственные функции соответствующих дифференциальных операторов, а именно, тригонометрические функции и функции Бесселя, аналогично формулам Пуассона и Сонина (3)–(4). Соответствующие обобщения формул Пуассона и Сонина можно явно выписать.

Теперь рассмотрим более подробно свойства ОП Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, введённых по формулам (15). Подобный оператор был построен В. В. Катраховым путём домножения стандартного ОП Сонина на обычный дробный интеграл с целью взаимно компенсировать гладкость этих двух операторов и получить новый, который бы действовал в одном пространстве типа $L_2(0,\infty)$, что неверно для тех операторов, из которых он был составлен с помощью композиции. Как впоследствии оказалось, это можно сделать ранее известными средствами, так как ОП Сонина—это частный случай операторов Эрдейи–Кобера. Существует замечательная теорема А. Эрдейи, позволяющая выделить стандартный дробный интеграл Римана–Лиувилля из дробного интеграла по любой функции [27]. В результате получается

Теорема 4.4 *(см. [36]). На подходящих функциях справедливо представление оператора Эрдейи–Кобера через дробный интеграл Римана–Лиувилля и оператор Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости при $0 < \Re\alpha < 1$*

$$I_{0+,x^2}^\alpha = I_{0+}^\alpha \left((2x)^\alpha f + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} P_{-\alpha}\left(\frac{x}{t}\right)(2t)^\alpha f(t)\,dt\right). \tag{24}$$

Операторы нулевого порядка гладкости выделяются тем, что только для них можно доказать оценки в *одном* пространстве типа $L_p(0,\infty)$. При этом, учитывая свёрточную структуру этих операторов, удобно пользоваться техникой преобразования Меллина.

Напомним [42], что преобразованием Меллина функции $f(x)$ называется функция $g(s)$, которая определяется по формуле

$$g(s) = M[f](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx. \tag{25}$$

Определим также свёртку Меллина

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^\infty f_1\left(\frac{x}{y}\right) f_2(y)\, \frac{dy}{y}, \tag{26}$$

при этом оператор свёртки с ядром K действует в образах преобразования Меллина как умножение на мультипликатор

$$M[Af](s) = \int_0^\infty K\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\, \frac{dy}{y} = M[K * f](s) = m_A(s) M[f](s), \tag{27}$$

$$m_A(s) = M[K](s).$$

Для изучения операторов вида (27) автором в [36]–[37] был предложен удобный алгебраический подход, который не содержит ничего нового, но в удобной форме позволяет быстро получать нужные оценки. Полезные факты будут собраны вместе как

Теорема 4.5 *Пусть оператор A действует по формуле (27). Тогда*
а) Для того, чтобы он допускал расширение до ограниченного оператора в $L_2(0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |m_A(i\xi + \frac{1}{2})| = M_2 < \infty, \tag{28}$$

при этом $\|A\|_{L_2} = M_2$.
б) Для того, чтобы он допускал расширение до ограниченного оператора в $L_p(0,\infty), p > 1$ при дополнительном условии неотрицательности ядра K необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |m_A(i\xi + \frac{1}{p})| = M_p < \infty, \tag{29}$$

при этом $\|A\|_{L_p} = M_p$.
в) Обратный оператор A^{-1} действует также по формуле (27) с мультипликатором $\frac{1}{m_A}$, для того, чтобы он допускал расширение до ограниченного оператора в $L_2(0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}} |m_A(i\xi + \frac{1}{2})| = m_2 < \infty, \tag{30}$$

при этом $\|A^{-1}\|_{L_2} = \frac{1}{m_2}$.
г) Пусть операторы A, A^{-1} определены и ограничены в $L_2(0,\infty)$. Они унитарны тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$|m_A(i\xi + \frac{1}{2})| = 1 \tag{31}$$

для почти всех ξ.

Первым математиком, использовавшим технику преобразования Меллина при оценке норм операторов Римана–Лиувилля для случая чисто мнимого параметра, был, насколько мне известно, Кобер. Поэтому иногда часть б) приведённой теоремы называется леммой Кобера, что не совсем точно, так как он на самом деле доказал формулу для нормы из части а) для случая знакопеременных функций.

Данный подход позволяет легко описать и сплетающие свойства ОП вида (27).

Теорема 4.6 *(см. [36]). Пусть оператор действует по правилу (27). Тогда он является ОП типа Сонина (21) на подходящих функциях тогда и только тогда, когда его мультипликатор удовлетворяет функциональному уравнению*

$$m(s) = m(s-2)\frac{(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)-\nu(\nu+1)}. \tag{32}$$

Все подобные ОП типа Сонина тогда получаются по формуле (27) с мультипликатором $p(s)m(s)$, где $p(s)$—произвольная периодичная функция с периодом 2, то есть $p(s) = p(s-2)$.

Таким образом, в теореме 4.8 содержится полное описание ОП типа Сонина, представимых в виде свёртки Меллина, а также явный алгоритм их конструирования. Аналогичный результат справедлив и для операторов типа Пуассона. Конкретные примеры ОП с помощью теоремы 4.8 построены в [36]–[37], при этом используются преобразования Стильтьеса и Гильберта на полуоси.

Теперь применим теорему 4.7 к операторам Бушмана–Эрдейи. Для краткости приведём результаты только для одного оператора из четырёх.

Теорема 4.7 *Оператор Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости $B_{0+}^{\nu,1}$, определённый по формуле (15), действует по правилу (27) с мультипликатором*

$$m(s) = \frac{\Gamma(-s/2+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-s/2-\frac{\nu}{2}+1/2)}{\Gamma(1/2-\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})} \tag{33}$$

при условии $\Re s < \min(2+\Re\nu, 1-\Re\nu)$. Для его нормы, которая является периодической функцией по ν, справедлива формула

$$\|B_{0+}^{\nu,1}\|_{L_2} = \frac{1}{\min(1, \sqrt{1-\sin\pi\nu})}. \tag{34}$$

Оператор ограничен в $L_2(0,\infty)$ при $\nu \neq 2k+1/2, k\in\mathbb{Z}$ и неограничен при выполнении условия $\nu = 2k+1/2, k\in\mathbb{Z}$.

Доказательство.

1. Вначале докажем формулу (27) с нужным мультипликатором (33). Используя последовательно формулы (7), с. 130, (2) с. 129, (4) с. 130 из [42], получим

$$M(B_{0+}^{\nu,1})(s) = \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)} M\left[\int_0^\infty \left\{H(\frac{x}{y}-1)P_\nu(\frac{x}{y})\right\}\{yf(y)\}\frac{dy}{y}\right](s-1) =$$

$$= \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)} M\left[(x^2-1)_+^0 P_\nu^0(x)\right](s-1) M[f](s),$$

где использованы обозначения из [42] для функции Хевисайда и усечённой степенной функции

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha, & \text{если } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}, \quad H(x) = x_+^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Далее, используя формулы 14(1) с. 234 и 4 с. 130 из [42], получаем

$$M\left[(x-1)_+^0 P_\nu^0(\sqrt{x})\right](s) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-s)\Gamma(-\frac{\nu}{2}-s)}{\Gamma(1-s)\Gamma(\frac{1}{2}-s)},$$

$$M\left[(x^2-1)_+^0 P_\nu^0(x)\right](s-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{s-1}{2})\Gamma(-\frac{\nu}{2}-\frac{s-1}{2})}{\Gamma(1-\frac{s-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s-1}{2})} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{s}{2}+1)}$$

при условиях $\Re s < \min(2+\Re\nu, 1-\Re\nu)$. Отсюда выводим формулу для мультипликатора

$$M(B_{0+}^{\nu,1})(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)}\cdot\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{s}{2}+1).$$

Применяя к $\Gamma(2-s)$ формулу Лежандра удвоения аргумента гамма–функции (см., например, [35]), получим

$$M(B_{0+}^{\nu,1})(s) = \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(1-s)}.$$

Ещё одно применение формулы удвоения Лежандра к $\Gamma(1-s)$ приводит к нужной формуле для мультипликатора (33).

В работе [36] показано, что за счёт рассмотрения подходящих факторизаций, условия справедливости доказанной формулы, которые являются завышенными, можно несколько расширить. В частности, формула для мультипликатора справедлива при условиях $0 < \Re s < 1$ при всех значениях параметра ν.

2. Теперь установим формулу для нормы (34). Из найденной формулы для мультипликатора в силу теоремы 4.7 получаем на прямой $\Re s = 1/2, s = iu + 1/2$

$$|M(B_{0+}^{\nu,1})(iu+1/2)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{\Gamma(-i\frac{u}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4})\Gamma(-i\frac{u}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}-iu)}\right|.$$

Далее будем опускать у мультипликатора указание на порождающий его оператор. Используем формулу для модуля комплексного числа $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ и тождество для гамма–функции $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z})$, вытекающее из её определения в виде интеграла. Последнее равенство справедливо для класса так называемых вещественно–аналитических функций, к которому относится и гамма–функция. Тогда получим

$$|M(B_{0+}^{\nu,1})(iu+1/2)| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{\Gamma(-i\frac{u}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4})\Gamma(i\frac{u}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4})\Gamma(-i\frac{u}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4})\Gamma(i\frac{u}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}-iu)\Gamma(\frac{1}{2}+iu)}\right|.$$

В числителе объединим крайние и средние сомножители, и три образовавшиеся пары гамма–функций преобразуем по известной формуле (см. [35])

$$\Gamma(\frac{1}{2}+z)\ \Gamma(\frac{1}{2}-z)=\frac{\pi}{\cos\pi z}.$$

В результате получим

$$|M(B_{0+}^{\nu,1})(iu+1/2)|=\sqrt{\frac{\cos(\pi iu)}{2\cos\pi(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}+i\frac{u}{2})\cos\pi(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-i\frac{u}{2})}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(\pi iu)}{\operatorname{ch}\pi u-\sin\pi\nu}}$$

Далее обозначим $t=\operatorname{ch}\pi u, 1\leqslant t<\infty$. Отсюда, применяя условие из теоремы 4.7, получаем

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}|m(iu+\frac{1}{2})|=\sup_{1\leqslant t<\infty}\sqrt{\frac{t}{t-\sin\pi\nu}}.$$

Поэтому, если $\sin\pi\nu\geqslant 0$, то супремум достигается при $t=1$, и справедлива формула (34) для нормы

$$\|B_{0+}^{\nu,1}\|_{L_2}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin\pi\nu}}.$$

Если же $\sin\pi\nu\leqslant 0$, то супремум достигается при $t\to\infty$, и справедлива формула

$$\|B_{0+}^{\nu,1}\|_{L_2}=1.$$

Эта часть теоремы доказана.

3. Условия ограниченности или неограниченности следуют из найденной формулы для нормы и условий теоремы 4.7. Периодичность нормы по параметру ν очевидна из найденного явного выражения для нормы. Теорема полностью доказана.

Аналогичные результаты получены в [36]–[37] и для пространств со степенным весом.

Известно, что разносторонние операторы Римана–Лиувилля связаны друг с другом при помощи преобразования Стильтьеса [27]. Соответствующие результаты получены в [36] и для операторов Бушмана–Эрдейи.

В [36]–[37] введены и рассмотрены некоторые обобщения ОП Бушмана–Эрдейи, ядра которых выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса и более общую G–функцию Мейера. Подобные обобщения другого рода, в которых рассматриваются операторы с интегрированием по всей полуоси и ядра выражаются через обобщённые функции Лежандра, изучались в [43]. Для исследования всех указанных операторов могут оказаться полезными различные неравенства для гипергеометрических функций, например, полученные в [44]–[48].

5 Построение унитарных операторов преобразования

Рассмотрим вопрос об унитарности в $L_2(0,\infty)$ ОП типа Сонина и Пуассона. Ещё в ранних работах Дельсарта, Лионса и Левитана было замечено, что стандартные ОП Сонина и Пуассона (5)–(6) не сохраняют гладкость функций, что создаёт различные сложности при их применении. Так возникла задача о построении унитарных ОП. Следующим шагом стало построение унитарных ОП хотя бы для некоторых значений параметров.

Теорема 5.1 *Для унитарности в $L_2(0,\infty)$ операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости (15) необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым. При этом пары операторов (15)–(17) и (16)–(18) являются взаимно обратными.*

Доказательство.

При $\nu \in \mathbb{Z}$ получим $\sin \pi\nu = 0$ и модуль соответствующего мультипликатора в формуле (33) тождественно равен единице на нужной прямой $\Re s = \frac{1}{2}$. Поэтому, по свойству г) теоремы 4.7 данный оператор является унитарным в $L_2(0,\infty)$, как и его обратный. То, что соответствующие пары операторов являются взаимно обратными, теперь следует из того, что они являются сопряжёнными в $L_2(0,\infty)$. Теорема доказана.

Отметим, что случай унитарности данных операторов преобразования совпадает со случаем, когда сплетаемый ими дифференциальный оператор (20) в точности является оператором углового момента из квантовой механики при целых ν.

Эта теорема была первоначально сформулирована в [49]–[50], доказательство содержало ошибки (утверждалась унитарность при всех ν), затем скорректированные в [51],[41], см. также [52]–[58].

Задача о построении унитарных ОП типа Сонина и Пуассона для оператора Бесселя (или углового момента) в общем случае для произвольного ν была окончательно решена автором в [59]–[61] в рамках разработанного им композиционного метода. Это потребовало введения операторов несколько более сложной структуры.

Теорема 5.2 *Следующие операторы являются ОП типа Сонина и Пуассона, взаимно обратными и унитарными при всех ν:*

$$S_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy+ \tag{35}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\Big(\int_0^x\left(x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy-$$

$$-\int_x^\infty\left(y^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy\Big),$$

$$P_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\Big(\int_0^x P_\nu\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d}{dy}\right)f(y)\,dy-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\Big(\int_0^x\left(x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy-$$

$$-\int_x^\infty\left(y^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}Q_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\Big)\Big),$$

где P_ν—функция Лежандра первого рода, Q_ν^1—функция Лежандра второго рода, $\mathbb{Q}_\nu^1$—функция Лежандра второго рода на разрезе [35].

Доказательство.

Аналогично случаю теоремы 4.9 с использованием свёртки Меллина и формул для преобразования Меллина специальных функций получается следующая формула для мультипликатора:

$$M(S_U^\nu)(s) = -\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\left(\frac{-\cos\pi s-\cos\pi\nu}{\sin\pi s-\sin\pi\nu}\right)\cdot\left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}\right)+$$

$$+\cos(\frac{\pi\nu}{2})\cdot\left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}\right)=$$

$$=\left(-\sin(\frac{\pi\nu}{2})\left(\frac{-\cos\pi s-\cos\pi\nu}{\sin\pi s-\sin\pi\nu}\right)+\cos(\frac{\pi\nu}{2})\right)\cdot\left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}\right).$$

Полностью вычисления проведены в [36]. Далее рассматриваем в соответствии с теоремой 4.7 с учётом выкладок из теоремы 4.9 величину

$$\left|M(S_U^\nu)(iu+\frac{1}{2})\right|=$$

$$=\left|-\sin(\frac{\pi\nu}{2})\left(\frac{-\cos\pi(iu+\frac{1}{2})-\cos\pi\nu}{\sin\pi(iu+\frac{1}{2})-\sin\pi\nu}\right)+\cos(\frac{\pi\nu}{2})\right|\cdot\sqrt{\frac{\cos\pi u-\sin\pi\nu}{\cos\pi u}}=$$

$$=\left|\frac{\sin(\frac{\pi\nu}{2})-\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+\pi iu\right)}{\sin\pi\nu-\cos\pi iu}\right|\cdot\sqrt{\frac{\cos\pi u-\sin\pi\nu}{\cos\pi u}}=$$

$$=\left|\frac{\sin\frac{\pi\nu}{2}-\cos\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{ch}\pi u+i\sin\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{sh}\pi u}{\sqrt{\operatorname{ch}\pi u(\operatorname{ch}\pi-\sin\pi\nu)}}\right|.$$

Вычисляя модуль и заменяя затем тригонометрический и гиперболический синусы на косинусы, получим:

$$\left|M(S_U^\nu)(iu+\frac{1}{2})\right|=\sqrt{\frac{\left(\sin\frac{\pi\nu}{2}-\cos\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{ch}\pi u\right)^2+\left(\sin\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{sh}\pi u\right)^2}{\operatorname{ch}\pi u(\operatorname{ch}\pi-\sin\pi\nu)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2\pi u-\sin\pi\nu\operatorname{ch}\pi u}{\operatorname{ch}\pi u(\operatorname{ch}\pi-\sin\pi\nu)}}=1.$$

Унитарность этим доказана. Взаимная сопряжённость следует из определения (35), если рассматривать операторы в соответствии с указанием в начале статьи как расширения с множества финитных функций. Следовательно, эти унитарные операторы и взаимно обратны. То, что они являются ОП типа Сонина и Пуассона, вытекает из формул теоремы 4.8. Теорема доказана.

Этим результатом завершается история построения унитарных ОП типа Сонина и Пуассона. Унитарные операторы преобразования тесно связаны с унитарностью оператора рассеяния в задачах квантовой механики [13]–[14].

Интересно рассмотреть частный случай, который вытекает из теоремы 5.1 при $\nu=1$. Получаем пару очень простых операторов

$$B_{0+}^{1,1}f=f(x)-\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy,\ B_{-}^{1,1}f=f(x)-\int_x^\infty\frac{f(y)}{y}\,dy, \tag{36}$$

связанных со знаменитыми операторами Харди

$$H_1f=\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy, H_2f=\int_x^\infty\frac{f(y)}{y}\,dy. \tag{37}$$

По поводу теории неравенств Харди см. [62]–[63]. Из наших результатов следует

Теорема 5.3 *Операторы (36) образуют пару взаимнообратных унитарных в $L_2(0,\infty)$ операторов. Они сплетают как ОП $\frac{d^2}{dx^2}$ и $\frac{d^2}{dx^2}-\frac{2}{x^2}$.*

Как следует из (37), операторы Бушмана–Эрдейи могут рассматриваться как *обобщения операторов Харди*, а неравенства для их норм являются *определёнными обобщениями неравенств Харди*, что позволяет взглянуть на этот класс операторов под новым интересным углом зрения. Кроме того, можно показать, что операторы (36) являются преобразованиями Кэли от симметричных операторов $\pm 2i(xf(x))$ при соответствующем выборе областей определения. Их спектром является единичная окружность. В [36]–[37] эти вопросы рассмотрены и для пространств со степенным весом.

Результат об унитарности из теоремы 5.1 был недавно переоткрыт Куфнером, Перссоном и Малиграндой, давшими его элементарное доказательство. Теорема 8 позволяет выписать ещё несколько пар унитарных в $L_2(0,\infty)$ операторов очень простого вида, которые являются частными случаями операторов Бушмана–Эрдейи при целых ν ([64]–[66]):

$$U_3f=f+\int_0^x f(y)\,\frac{dy}{y},\ U_4f=f+\frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)\,dy,$$
$$U_5f=f+3x\int_0^x f(y)\,\frac{dy}{y^2},\ U_6f=f-\frac{3}{x^2}\int_0^x yf(y)\,dy,$$
$$U_7f=f+\frac{3}{x^2}\int_x^\infty yf(y)\,dy,\ U_8f=f-3x\int_x^\infty f(y)\frac{dy}{y^2},$$
$$U_9f=f+\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{15x^2}{y^3}-\frac{3}{y}\right)f(y)\,dy,$$
$$U_{10}f=f+\frac{1}{2}\int_x^\infty\left(\frac{15y^2}{x^3}-\frac{3}{x}\right)f(y)\,dy.$$

Этот перечень можно продолжить дальше. На мой взгляд подобных простых явных примеров очень не хватает в курсах функционального анализа.

Полученные в данной работе результаты имеют также применения к доказательству вложений пространств И.А. Киприянова в весовые пространства С.Л. Соболева, см. [36], [67].

Операторы Бушмана–Эрдейи можно изучать в пространствах аналитических функций, в которых они действуют почленно на степенных рядах. При такой интерпретации они относятся к операторам Гельфонда–Леонтьева. Получены стандартные для такого класса задач оценки коэффициентов искажения и однолистности.

Для оценок норм ОП Бушмана–Эрдейи в функциональных пространствах могут использоваться обобщения интегрального неравенства Коши–Буняковского, метод получения таких обобщений разработан автором в [68]–[70].

Литература

1. R. Carroll. Transmutation and Operator Differential Equations, North Holland. 1979. 245 p.

2. R. Carroll. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions, North Holland. 1982. 457 p.

3. R. Carroll. Transmutation Theory and Applications, North Holland. 1986. 351 p.

4. R. Gilbert, H. Begehr. Transformations, Transmutations and Kernel Functions. Vol. 1–2, Longman, Pitman, 1992.

5. Kh. Trimeche. Transmutation Operators and Mean-Periodic Functions Associated with Differential Operators (Mathematical Reports, Vol 4, Part 1), Harwood Academic Publishers. 1988. 282 p.

6. Д.К. Фаге, Н.И. Нагнибида. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов, Новосибирск: Наука. 1977. 280 с.

7. В.А. Марченко. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля, Киев: Наукова Думка. 1972. 220 с.

8. В.А. Марченко. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения, Киев: Наукова Думка. 1977. 331 с.

9. Б.М. Левитан. Операторы обобщённого сдвига и некоторые их применения, М.: ГИФМЛ. 1962. 324 с.

10. Б.М. Левитан. Обратные задачи Штурма–Лиувилля, М.: Наука. 1984. 240 с.

11. Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака, М.: Наука. 1988. 432 с.

12. И.А. Киприянов. Сингулярные эллиптические краевые задачи, М.: Наука-Физматлит. 1997. 204 с.

13. Л.Д. Фаддеев. Обратная задача квантовой теории рассеяния-1// УМН. 1959. Т. 14, № 4. С. 57–119.

14. Л.Д. Фаддеев. Обратная задача квантовой теории рассеяния-2// "Итоги науки и техники "Современные проблемы математики. т. 3". ВИНИТИ. 1974. С. 93–180.

15. А.П. Хромов. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов// Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. № 10. С. 3–163.

16. С.М. Ситник. Обзор: Операторы преобразования и их приложения, В книге: "Исследования по современному анализу и математическому моделированию" (Отв. ред. Коробейник Ю.Ф., Кусраев А.Г.). Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО–А. 2008. С. 226–293.

17. R. Carroll, A. Boumenir. Toward a general theory of transmutation// arXiv: funct-an/9501006. 1995. 19 p.

18. J. Delsarte. Sur certaines transformation fonctionnelles relative aux équations linéares aux dèrivées partielles du seconde ordre// C. R. Acad. Sci. Paris. 1938. V. 206. P. 1780–1782.

19. J. Delsarte. Sur une extension de la formule de Taylor// Journ. Math. pures et appl. 1938. V. 17. P. 217–230.

20. J. Delsarte. Une extension nouvelle de la théory de fonction presque périodiques de Bohr// Acta Math. 1939. V. 69. P. 259–317.

21. J. Delsarte. Hypergroupes et operateurs de permutation et de transmutation// Colloques Internat. Nancy. 1956. P. 29–44.

22. J.L. Lions. Opérateurs de Delsarte et problème mixte// Bull. Soc. Math. France. 1956. No. 84. P. 9–95.

23. J.L. Lions. Quelques applications d'opérateurs de transmutations// Colloques Internat. Nancy. 1956. P. 125–142.

24. J. Delsarte, J.L. Lions. Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe// Comm. Math. Helv. 1957. No. 32. P. 113–128.

25. J. Delsarte, J.L. Lions. Moyennes généralisées// Comm. math. Helv. 1959. No. 34. P. 59–69.

26. Б.М. Левитан. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье// УМН. 1951. Т. 6, Вып. 2. С. 102–143.

27. А.А. Килбас, О.И. Маричев, С.Г. Самко. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения, Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

28. V. Kiryakova. Generalized Fractional Calculus and Applications, Pitman Research Notes in Math. Series No. 301. Longman Sci. UK. 1994. 402 p.

29. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Truhillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North Holland Mathematical Studies. Vol. 204. Elsevier. 2006. 523 p.

30. А.М. Нахушев. Уравнения математической биологии, М.: Высшая Школа. 1995. 301 с.

31. А.М. Нахушев. Элементы дробного исчисления и их применение, Нальчик. 2000. 300 с.

32. А.М. Нахушев. Дробное исчисление и его применение, М.: Физматлит. 2003. 273 с.

33. А.В. Псху. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка, Нальчик. 2005. 186 с.

34. V. Kiryakova. All the special functions are fractional differintegrals of elementary functions// J. Physics A: Math. & General. 1997. Vol. 30, No. 14. P. 5085–5103.

35. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 1., М.: Наука. 1973. 296 с.

36. С.М. Ситник. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости// Препринт ИАПУ ДВО РАН. Владивосток. 1990. 45 с.

37. С.М. Ситник. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи// ДАН СССР. 1991. т.320, №6. С. 1326–1330.

38. Г.В. Ляховецкий, С.М. Ситник. Формулы композиций для операторов Бушмана-Эрдейи// Препринт ИАПУ ДВО РАН. Владивосток. 1991. 11 с.

39. С.М. Ситник. Об одной паре операторов преобразования// В сб.: Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (Отв. ред. В.Н. Врагов). Новосибирск. 1987. С. 168–173.

40. А.А. Килбас, О.В. Скоромник. Интегральное уравнение типа Абеля с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области// Тезисы докладов международной конференции АМАДЕ. Минск. 2009. С. 83.

41. В.В. Катрахов, С.М. Ситник. Краевая задача для стационарного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом// ДАН СССР. 1984. Т. 278, №4. С. 797–799.

42. О.И. Маричев. Метод вычисления интегралов от специальных функций, Минск: Наука и техника. 1978. 312 с.

43. N. Virchenko, I. Fedotova. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications, World Scientific. 2001. 220 p.

44. D. Karp, A. Savenkova, S.M. Sitnik. Series expansions for the third incomplete elliptic integral via partial fraction decompositions// Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007. V. 207, No. 2. P. 331–337.

45. D. Karp, S.M. Sitnik. Asymptotic approximations for the first incomplete elliptic integral near logarithmic singularity,// Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007. V. 205. P. 186–206.

46. D. Karp, S.M. Sitnik. Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function// Journal of Approximation Theory. 2009. V. 161. P. 337—352.

47. D. Karp, S.M. Sitnik. Log–convexity and log–concavity of hypergeometric-like functions// Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2009. (in print).

48. С.М. Ситник. Неравенства для функций Бесселя// ДАН СССР. 1995. Т. 340, № 1. С. 29–32.

49. В.В. Катрахов. Изометрические операторы преобразования и спектральная функция для одного класса одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов// ДАН СССР. 1980. Т. 251, № 5.—С. 1048–1051.

50. В.В. Катрахов. Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона// ДАН СССР. 1981. Т. 259, № 5. С. 1041–1045.

51. С.М. Ситник. Краевая задача с интегральными граничными условиями для одного класса уравнений с сильным вырождением// В сб.: Материалы XXI Всесоюзной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Математика. Новосибирск. 1983. С. 55–58.

52. С.М. Ситник. Об унитарных операторах преобразования// Рукопись депонирована в ВИНИТИ 13.11.1986, N 7770–В86. 1986. Воронежский университет, Воронеж. 9 с.

53. С.М. Ситник. Операторы преобразования для дифференциального выражения Бесселя Рукопись депонирована в ВИНИТИ 23.01.1987, N 535–В87. 1987. Воронежский университет, Воронеж. 28 с.

54. С.М. Ситник. L_2–теория операторов преобразования и её приложения к эллиптическим уравнениям// В сб.: 10-е Чехословацко–Советское совещание: Применение фукциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики. 1988. Стара Тура, Чехословакия. С. 46.

55. С.М. Ситник, С.А. Фадеев. Об одной паре операторов преобразования// Рукопись депонирована в ВИНИТИ 13.07.1988, № 5629–В88. Воронеж, Воронежский политехнический институт. 1988.

56. С.М. Ситник. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи в функциональных пространствах// В сб.: "Линейные операторы в функциональных пространствах". Тезисы докладов Северо–Кавказской региональной конференции. 1989. Грозный. С. 150.

57. С.М. Ситник. Операторы Бушмана–Эрдейи// В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции. Международная научная конференция. 1992. Самара. С. 233–234.

58. S.M. Sitnik. On unitary transmutations for the Bessel operator// В сб.: Международный семинар Day on diffraction 2004. Санкт–Петербург. 2004. С. 71.

59. В.В. Катрахов, С.М. Ситник. Метод факторизации в теории операторов преобразования// В сб.: Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. (Мемориальный сборник памяти Бориса Алексеевича Бубнова, отв. ред. В.Н. Врагов). 1990. Новосибирск. С. 104–122.

60. В.В. Катрахов, С.М. Ситник. Композиционный метод построения В–эллиптических, В–гиперболических и В–параболических операторов преобразования// ДАН СССР. 1994. Т. 337, № 3. С. 307–311.

61. С.М. Ситник. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений// Вестник Самарского Государственного Университета (СамГУ) — Естественнонаучная серия. 2008. № 8/1 (67). С. 237–248.

62. B. Opic, A. Kufner. Hardy–Type Inequalities, Longman. 1990.

63. A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson. The Hardy Inequality, Pilsen. 2007. 162 p.

64. С.М. Ситник. О некоторых задачах теории операторов преобразования// Материалы международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвящённой 70–летию ректора МГУ академика Виктора Антоновича Садовничего. 2009. М.: МГУ. С. 49–50.

65. С.М. Ситник. Об одном обобщении операторов Харди методами теории операторов преобразования// В сб.: Международная конференция по математической физике и её приложениям. Тезисы докладов. Самара: Самарский государственный университет. 2008. С. 191–192.

66. С.М. Ситник. Унитарные операторы преобразования, связанные с операторами Харди// Тезисы докладов третьей международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвящённой 85–летию члена–корреспондента РАН профессора Льва Дмитриевича Кудрявцева. Москва: МФТИ. 2008. С. 324–327.

67. С.М. Ситник. О теоремах вложения для пространств С.Л. Соболева и И.А. Киприянова В сб.: Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева. Россия, Новосибирск. 2008. С. 359.

68. С.М. Ситник. Уточнения интегрального неравенства Коши–Буняковского// Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико–Математические науки". 2000. Вып. 9. С. 37–45.

69. С.М. Ситник. Обобщения неравенств Коши–Буняковского методом средних значений и их приложения// Чернозёмный альманах научных исследований. 2005. № 1(1). С. 3–42.

70. С.М. Ситник. Уточнения и обобщения классических неравенств// Итоги науки (Южный федеральный округ). Математический форум. Т. 3. Исследования по математическому анализу. Владикавказ, 2009. С. 221–266.

ON SOLUTION TO THE PROBLEM OF UNITARY GENERALIZATION TO THE SONINE–POISSON TRANSMUTATIONS

S.M. Sitnik

Voronezh Militia Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Prospekt Patriotov, 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru

Abstract. We consider generalizations to well-known Sonine and Poisson transmutations. They are Buschmann–Erdelyi operators. For these operators we consider composition formulae via fractional integrals and problems of unitarity, invertibility, boundedness. We find generalizations to Sonine and Poisson transmutations which are unitarian for all values of parameter.

Keywords: Sonine and Poisson transmutations, Buschmann–Erdelyi operators, fractional integrals, bounded operators, unitarian operators.