УДК 517.9

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ДВУМЕРНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Л.А. Ковалева, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: kovaleva_l@bsu.edu.ru

Аннотация. Описывается подход к исследованию краевых задач на двумерных стратифицированных множествах с кусочно-гладкой границей для гармонических функций. Подход основан на редукции изучаемых задач к нелокальным краевым задачам теории функций в семействе плоских областей.

Ключевые слова: задача Дирихле на стратифицированном множестве, задача Неймана на стратифицированном множестве, обобщенная задача Римана-Гильберта.

По определению, гладкой дугой Γ мы называем образ непрерывно-дифференцируемого отображения $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, которое взаимно-однозначно и его производная $\gamma'(s) \neq 0$, $0 \leq s \leq 1$. Это отображение называется также (гладкой) параметризацией. Оно наделяет дугу Γ ориентацией. Точки $\gamma(0), \gamma(1)$ называются концами дуги Γ. Точки, отличные от $\gamma(0), \gamma(1)$, составляют её внутренность. Класс таких дуг обозначим C^1, запись $\Gamma \in C^{1,\mu}$ означает, что Γ допускает параметризацию класса $C^{1,\mu}[0,1]$. Объединение Γ конечного числа гладких дуг $\Gamma_1, .., \Gamma_m$, которые могут попарно пересекаться лишь по своим концам, мы называем кусочно-гладкой кривой. Конечное множество F, составленное из концов этих дуг, мы называем множеством угловых точек. Точки множества $\dot{\Gamma} = \Gamma \setminus F$ являются внутренними точками данной кривой. Кусочно-гладкая кривая, составленная из совокупности дуг $\Gamma_1, .., \Gamma_m$, называется составной частью кривой Γ.

Кусочно-гладкая кривая, все связные компоненты которой гомеоморфны окружности, естественно называть (кусочно-гладким) контуром. Ниже, удобно под кусочно-гладкой областью понимать конечную плоскую область $D \subseteq \mathbb{C}$, ограниченную кусочно-гладким контуром ∂D. По отношению к этой области дуги, составляющие кривой Γ, являются сторонами, а узлы контура – вершинами.

Пусть задано непрерывно дифференцируемое взаимно-однозначное отображение α замкнутой кусочно-гладкой области D в $\mathbb{R}^3$, частные производные $\partial\alpha/\partial x$, $\partial\alpha/\partial y$ которого, как векторы, линейно независимы в каждой точке $z = x + iy \in \overline{D}$. Тогда, по определению, образ $G = \alpha(D)$ области D представляет собой гладкую поверхность, ограниченную кусочно-гладким контуром $\partial G = \alpha(\partial D)$. Эту гладкую поверхность мы называем листом с кусочно-гладким краем ∂G, или, кратко, кусочно-гладким листом. Соответственно, α есть гладкая параметризация листа G.

По определению, класс $C^1(G)$ непрерывно дифференцируемых функций φ на G определяется условием $\varphi \circ \alpha \in C^1(D)$. Для такой функции определены производные $\partial\varphi/\partial e$ вдоль единичных касательных векторов e к поверхности G. Именно, по определению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial e}(y_0) = \lim \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{|\, y - y_0 \,|} \quad \text{при} \quad y \in G, \quad y \to y_0, \quad \frac{y - y_0}{|\, y - y_0 \,|} \to e\,. \tag{1}$$

Ясно, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(-e)} = -\frac{\partial\varphi}{\partial e}\,. \tag{2}$$

Если заданная на отрезке $I \subseteq \mathbb{R}$ вектор-функция γ со значениями в G непрерывно дифференцируема и $\gamma'(t_0)/\mid\gamma'(t_0)\mid = e$, то, очевидно,

$$(\varphi\circ\gamma)'(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial e}[\gamma(t)]|\gamma'(t)|\,. \tag{3}$$

Если дуга L входит в состав контура ∂G и функция $\varphi \in C^1(G\cup\dot{L})$ (т.е. $\varphi\circ\alpha \in C^1(D\cup\dot{\Gamma})$, где $\Gamma = \alpha^{-1}(L)$), то определение (1) сохраняет свою силу и для точек $y \in \dot{L}$ и касательных векторов e, направленных в сторону G. В частности, имеет смысл нормальная производная $\partial\varphi/\partial n$, где касательный к G вектор n есть единичная внутренняя нормаль к L во внутренней точке y дуги.

Пусть задано конечное число $G_1,..,G_n$ кусочно-гладких листов, замыкания которых могут попарно пересекаться лишь по своим вершинам или сторонам. Более точно, если $a \in \overline{G}_k\cap\overline{G}_r$, то либо a является вершиной каждого из краёв $\partial\overline{G}_k$ и $\partial\overline{G}_r$, либо внутренней точкой, причём стороны $L_i \subseteq \partial\overline{G}_k$ и $L_j \subseteq \partial\overline{G}_r$, содержащие эту точку, совпадают. Очевидно, объединение $L = \bigcup_k\partial\overline{G}_k$ представляет собой кусочно-гладкую кривую, которая содержит контура $\partial\overline{G}_k$ в качестве своих составных частей. Дуги $L_1,\dots,L_l$, составляющие кривую L, назовём сторонами, если они принадлежат краю только одного листа, и рёбрами в противном случае. К каждому ребру L_k сходится несколько листов G_r, их номера образуют некоторое подмножество из $1,..,n$, которое обозначим Δ_k. Пусть m_k означает число элементов этого множества, так что дуга L_k является стороной при $m_k = 1$ и ребром при $m_k > 1$.

Объединение G листов $G_1,..,G_n$ и внутренностей всех ребер назовём стратифицированной областью. Очевидно, её замыкание $\overline{G}$ совпадает с $\overline{G}_1\cup...\cup\overline{G}_n$, а дополнение $\partial G = \overline{G}\setminus G$ состоит из кусочно-гладкой кривой $\partial^1 G$, составленной из сторон, и не пересекающегося с ней конечного множества $\partial^0 G$ узлов кривой Γ, к которым сходятся только ребра. Множество узлов F кривой Γ распадается на подмножество F^1, состоящее из узлов $\partial^1 G$, и $\partial^0 F$.

Рассмотрим гладкие параметризации $\alpha_r : \overline{D}_r \to \overline{G}_r$ листов G_r, $1 \le r \le n$. Напомним, что D_r является кусочно-гладкой областью, т.е. конечной областью, ограниченной кусочно-гладким контуром ∂D_r. Каждому ребру L_k отвечает семейство дуг $\Gamma_{kr} \subseteq \partial D_r$, $r \in \Delta_k$, которые при отображении α_r переходят в L_k. Таким образом, точке $y \in \dot{L}_k$ отвечают точки $z_r = \alpha_r^{-1} \in \dot{\Gamma}_{kr}$. Можно сказать, что ребра L_k получаются "склеиванием" сторон $\Gamma_{kr} \subseteq \partial D_r$ по точкам y_r. С другой стороны, каждой стороне $L_k \subseteq \partial^1 G$ отвечает ровно один лист G_r, сходящийся к этой стороне, и соответственно сторона $\Gamma_{kr} \subseteq \partial D_r$, которая переходит в L_k при отображении α_r. В этом случае множество Δ_k состоит из одного элемента r.

Таким образом, с топологической точки зрения, стратифицированное множество G можно получить из семейства кусочно-гладких областей $D_1,..,D_n \subseteq \mathbb{C}$, никак не связанных между собой, путем "склеивания" некоторых дуг, составляющих контура ∂D_r. В результате, получаются ребра стратифицированной области. Те дуги из контуров ∂D_r, которые не участвуют в склеивании, образуют стороны G. Заметим, что аналогичный способ часто используется [1] при описании римановых поверхностей.

В дальнейшем на параметризации α_r во внутренних граничных точках контуров ∂D_r накладываем дополнительное условие

$$\frac{\partial \alpha_r}{\partial n} \perp \frac{\partial \alpha_r}{\partial e}, \qquad \left|\frac{\partial \alpha_r}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial \alpha_r}{\partial e}\right|, \tag{4}$$

где единичные векторы n и e, соответственно, ортогональны и касательны к ∂D_r в рассматриваемых точках. В силу (2) это условие не зависит от выбора (одного из двух возможных) направлений векторов n и e.

Непрерывную функцию $u \in C(G)$ назовём гармонической в стратифицированной области G, если для каждого $1 \le r \le n$ функция $u_r = u \circ \alpha_r$ гармонична в области D_r. Кроме того, для любого $1 \le k \le l$ сужение u на лист G_r, $r \in \Delta_k$, принадлежит классу $C^1(G_r \cup \dot{L}_k)$, и выполнено так называемое контактное условие

$$\sum_{r\in\Delta_k} \frac{\partial u}{\partial n_r}(y) = 0, \quad y \in \dot{L}_k\,, \tag{5}$$

для её нормальных производных вдоль листов G_k, $r \in \Delta_k$. Здесь, единичный вектор n_r касательный к G_k в точке y, ортогонален L_k и направлен в сторону G_k.

На границе $\partial^1 G$ для функции u можно ставить различные краевые условия аналогичные случаю плоских областей. Например, можно рассмотреть задачу Дирихле

$$u^+ = f\,, \tag{6}$$

где символом "+" здесь и ниже мы указываем на граничные значения функции $u \in C(\overline{G} \setminus F)$ на $\partial^1 G$, и задачу Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n}^+ = g\,, \tag{7}$$

для нормальной производной функции u на $\partial^1 G$. Более точно, каждая дуга $L_k \subseteq \partial^1 G$ является стороной единственного листа G_r, функция $u \in C^1(G_r \cup \dot{L}_k)$ и её производная $\partial u/\partial n$ по направлению внутренней нормали $n(y)$ к Γ_1 в точке $y \in \dot{L}_k$ принимает значение $g(y)$.

Возможны и другие типы краевых условий, например, смешанные краевые условия. На поведение функции u в окрестности изолированных особых точек $\tau \in \partial^0 G$ накладываются дополнительные условия. Например, можно поставить вопрос, если u ограничена в окрестности точки τ, то будет ли в этих условиях существовать предел $\lim\limits_{z\to\tau} u(t)$?

Контактное условие (5) можно переписать по отношению к функции $u_r = u \circ \alpha_r$. Пусть точка y лежит внутри ребра L_k и $z_r = \alpha_r^{-1}(y) \in \dot{\Gamma}_{kr} \subseteq \partial D_r$, $r \in \Delta_k$. В силу (4), нормальное направление к ∂D_r в точке z_r при отображении α_r перейдет в нормальное направление к ребру L_k в точке y вдоль касательной плоскости к G_r. Поэтому, по определению (1),

$$\frac{\partial u_r}{\partial n}(z_r) = \frac{\partial u}{\partial n_r}(y) \left|\frac{\partial \alpha_r}{\partial n}(z_r)\right|\,.$$

Подставляя это выражение в (5) и пользуясь вторым условием (4), получим:

$$\sum_{r\in\Delta_k}\left|\frac{\partial\alpha_r}{\partial e}(z_r)\right|^{-1}\frac{\partial u_r}{\partial n}(z_r)=0\,. \tag{8}$$

Заметим, что непрерывность функции u в точке y означает, что предельные значения u_r^+ в точках z_r совпадают:

$$u_r^+(z_r)=u(y),\quad r\in\Delta_k,\,. \tag{9}$$

Обратимся к семейству областей D_r, $1\le r\le n$. Дуги, составляющие их границы, занумеруем единым образом $\Gamma_1,..,\Gamma_m$. Те из них, которые составляют контур ∂D_k, описываем с помощью подмножества $O_k\subseteq\{1,..,m\}$. Другими словами, множество $\{1,..,m\}$ разбито на попарно непересекающиеся подмножества $O_1,..,O_n$ и дуги Γ_j, $j\in O_r$, составляют контур ∂D_r.

Напомним, что дуга L_k служит стороной листов G_r, $r\in\Delta_k$. Дуге $\Gamma_{kr}=\alpha_r^{-1}(L_k)\subseteq\partial D_r$ отвечает в единой нумерации некоторый номер $j=j(r)\in O_r$. Такого рода номера образуют подмножество $I_k\subseteq\{1,..,m\}$, так что

$$\alpha_r(\Gamma_{j(r)})=L_k,\quad r\in\Delta_k\,. \tag{10}$$

В результате, получаем разбиение множества $\{1,\ldots,m\}$ на попарно непересекающиеся подмножества $I_1,..I_l$, отвечающие дугам $L_1,..,L_l$, причём отображение $r\to j(r)$ осуществляет биекцию Δ_k на I_k. Конечно, в случае, когда рассматривается одна сторона L_k, множество I_k состоит из одного элемента.

Граничные значения u_r^+ на ∂D_r удобно описывать единым образом с помощью гладких параметризаций $\gamma_j:[0,1]\to\Gamma_j$ дуг Γ_j. Положим

$$u_{\gamma,j}^+=u_r^+\circ\gamma_j,\quad j\in O_r\,. \tag{11}$$

Таким образом, семейство функций $u_{\gamma,j}^+$, $j\in O_r$, описывает граничное значение u_r^+, снесённое параметризациями на отрезок $[0,1]$ действительной оси. Параметризации γ_j, $j\in I_k$, дуг Γ_j, отвечающих L_k, удобно выбрать специальным образом. С этой целью зададим параметризацию $l_k:[0,1]\to L_k$ и γ_j, $j\in I_k$, подчиним условию

$$\gamma_{j(r)}=\alpha_r\circ l_k,\quad r\in\Delta_k\,, \tag{12}$$

где $j=j(r)$ – отображение, фигурирующее в (10). При таком выборе точки y и z_r, $r\in\Delta_k$, фигурирующие в (5), описываются как значения $l_k(t)$ и $\gamma_{j(r)}(t)$, $r\in\Delta_k$ в некоторой точке t интервала (0,1). В силу (3), (12) можем записать:

$$\left|\frac{\partial\alpha_r}{\partial e}\right||\gamma'_{j(r)}|=|l'_k|\,.$$

В таком случае соотношение (8) переписывается в форме

$$\sum_{r\in\Delta_k}|\gamma'_{j(r)}(t)|\frac{\partial u_r}{\partial n}[\gamma_{j(r)}(t)]=0\,,\quad 0<t<1\,.$$

Напомним, что отображение $r \to j(r)$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между Δ_k и I_k. Следовательно, в обозначениях (11), применённых к нормальным производным $\partial u/\partial n$, предыдущее равенство переходит в

$$\sum_{j\in I_k} |\gamma_j'(t)| \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+_{\gamma,j}(t) = 0\,, \quad 0 < t < 1\,. \tag{13}$$

Точно также условие непрерывности (9) принимает вид

$$u^+_{\gamma,j}(t) = u[l_k(t)]\,, \qquad j \in I_k,\;\; 0 < t < 1. \tag{14}$$

Рассмотрим ориентацию дуг Γ_j, определяемых параметризацией γ. По отношению к области D_r ориентация дуги Γ_j, $j \in O_r$ может быть как положительна, когда область D_r остается слева, так и отрицательна. Это обстоятельство описывается сигнатурой ориентации σ_j, принимающей значения, соответственно, $+1$ и -1.

Рассмотрим гармоническую функцию v_r, сопряжённую к u_r в области D_r. Напомним, что n означает единичный вектор, ортогональный к ∂D_r во внутренней граничной точке и направленный в сторону D_r. Если e – единичный касательный вектор в этой точке, то в силу условий Коши-Римана

$$\frac{\partial u_r}{\partial n} = \mp\frac{\partial v_r}{\partial e}\,,$$

где верхний (нижний) знак отвечает случаю, когда D лежит слева (справа) от e. Полагая $e = \gamma_j'(t)/\mid \gamma_j'(t)\mid$, заключаем, что

$$\mid \gamma_j' \mid \frac{\partial u_r}{\partial n}\circ\gamma_j = -\sigma_j(v_r\circ\gamma_j)', \qquad j \in O_r.$$

В результате, соотношению (13) можно придать следующую простую форму:

$$\sum_{j\in I_k} \sigma_j v^+_{\gamma,j} = \mathrm{const}\,, \qquad m_k > 1. \tag{15}$$

Краевые условия (6) в принятых обозначениях принимают вид

$$u^+_{\gamma,j} = f_j, \quad j \in I_k,\;\; m_k = 1, \tag{16}$$

а задача Неймана переходит в

$$v^+_{\gamma,j} = f_j + \mathrm{const}, \quad j \in I_k,\;\; m_k = 1. \tag{17}$$

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующую постановку задачи. Пусть задано семейство кусочно-гладких областей D_r, $1 \le r \le n$. Дуги, составляющие контур ∂D_r, занумерованы единым образом Γ_j, $1 \le j \le m$. При этом

$$\partial D_r = \bigcup_{j\in O_r} \Gamma_j \tag{18}$$

по отношению к некоторому разбиению O множества индексов $\{1,..,m\}$ на попарно не пересекающиеся подмножества $O_1,..,O_n$. Пусть F_r – множество узлов контура ∂D_r. Выберем гладкие параметризации $\gamma_j : [0,1] \to \Gamma_j$ дуг Γ_j и рассмотрим некоторое разбиение I множества $\{1,..,m\}$ на подмножества $I_1,..,I_l$.

Будем говорить, что семейство функций $u_r \in C(\overline{D}_r \setminus F_r)$, $1 \le r \le n$, реализуется как непрерывная на двумерной стратифицированной области G функция u, если в обозначениях (11) выполнено условие (14) для каждого $k = 1,..,l$. Другими словами, точки $\gamma_j(t) \in \Gamma_j$, $j \in I_k$, склеиваются при каждом $0 < t < 1$.

Если дополнительно выполнено соотношение (15) для каждого $k = 1,..,l$, то функцию u называем гармонической в G.

Полагая $\phi_r = u_r + iv_r$, в соответствии с (16), приходим к следующей обобщенной задаче Римана-Гильберта для семейства $(\phi_r)_1^n$ аналитических функций:

$$\mathrm{Re}\, A\, \phi_\gamma^+ = f\,, \tag{19}$$

где заданная на $[0,1]$ матрица функция $A(t) = (A_{ij}(t))^l$ блочно-диагональна относительно разбиения I и её диагональные блоки $A(t, I_k)$ при $m_k > 1$ имеют описываемый ниже специальный вид.

Пусть $I_k = \{i_1,..,i_s\}$ и, относительно этой нумерации, $s \times s$-матрица $A(t, I_k)$ записана как $A_{(k)} = \{A_{(k),ij}\}$, $1 \le i,j \le s$. Тогда

$$A_{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ i\sigma_{(1)} & i\sigma_{(2)} & i\sigma_{(3)} & \dots & i\sigma_{(s_{k-1})} & i\sigma_{(s_k)} \end{pmatrix}, \quad k \ge 1,$$

где σ_j, $1 \le j \le m$ – сигнатура ориентаций дуг Γ_j, определенная по γ_j как было указано выше, и $\sigma_{(r)} = \sigma_{j_r}$.

Литература

1. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей / Дж. Спрингер. – М.: ИЛ, 1960.

HARMONIOUS FUNCTIONS ON TWO-DIMENSIONAL STRATIFIED SETS WITH PIECEWISE SMOOTH BOUNDARY

L.A. Kovaleva, A.P. Soldatov

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: kovaleva_l@bsu.edu.ru

Abstract. The investigating approach to boundary value problems on two-dimensional stratified sets with piecewise smooth boundary for the harmonious function is developped. It is based on the reduction of problem under consideration to connected nonlocal boundary value problem of function theory. Corresponding functions are defined on the family of plain sets.

Key words: the Dirichlet problem on stratified sets, the Neumann problem on stratified sets, the generalized Riemann-Gilbert problem.