УДК 517.95

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ-НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

С.Л. Хасанова

Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. Зайнаб Биишевой,

ул. Николаева, 10, Стерлитамак, Башкортостан, Россия, e-mail: hasanovasl@rambler.ru

Аннотация. Найдены собственные значения для спектральной задачи в области специального вида для уравнения смешанного типа и построена соответствующая система собственных функций. Система собственных функций исследована на полноту в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом смешанной области.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение смешанного типа, характеристики, собственные числа, собственные функции, разложение по собственным функциям.

1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где λ – комплексный параметр, в области D, ограниченной кусочно-гладкой кривой Γ, которая расположена в полуплоскости $y > 0$ с концевыми точками $A(1,0)$ и $B(0,1)$,, а также характеристиками AC $(x + y = 0)$ и CB $(x - y = 1)$ уравнения (1) при $y < 0$.

Обозначим $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$. В области D для уравнения (1) поставим следующую спектральную задачу.

Спектральная задача Трикоми - Неймана (TN_λ). *Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0, \ (x,y) \in \Gamma, \tag{4}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in AC, \tag{5}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial N}$ - *производная по нормали к границе Γ области D_+.*

Ф.И. Франкль [1, 2] обнаружил важные приложения задачи TN в трансзвуковой газодинамике. А.В. Бицадзе [3] исследовал задачу TN для уравнения (1) при $\lambda = 0$. Вострова Л.Е. [4] изучала задачу TN_λ для уравнения (1) при $\lambda = -1$. М.М. Смирнов [5, гл. II, §6] доказал корректность задачи Трикоми-Неймана для уравнения

$$\operatorname{sgn} y \cdot |\, y \,|^m\, u_{xx} + u_{yy} = 0,\ m > 0\,.$$

В настоящей работе найдены собственные значения задачи TN_λ в области D специального вида и построена соответствующая система собственных функций. Найденная система собственных функций исследована на полноту в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом смешанной области. Затем на основании системы собственных функций задачи TN_λ построены в виде суммы ряда решение задачи TN для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе. Ранее аналогичные исследования по задаче Трикоми, Геллерстедта были проведены в работах Моисеева Е.И. [6], Сабитова К.Б., Карамовой А.А., Кучкаровой А.Н. [7, 8].

Далее спектральная задача TN_λ для уравнения (1) сведена к новой нелокальной спектральной задаче для оператора Лапласа. В случае, когда D_+ является сектором с центром в начале координат, методом разделения переменных, найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи TN_λ. Исследован вопрос о полноте системы собственных функций в пространствах $\mathrm{L}_2(\mathrm{D}_+)$, $\mathrm{L}_2(\mathrm{D}_-)$ и $\mathrm{L}_2(\mathrm{D})$.

2. Построение системы собственных функций задачи TN_λ и исследование её полноты

Предварительно в области D_- для уравнения (1) построим решения краевой задачи Дарбу.

Задача Дарбу. *Найти в области D_- решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (5) и*

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1. \tag{6}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если $\nu(x) \in \mathrm{C}^1(0, 1) \cap \mathrm{L}_1[0, 1]$, то существует единственное решение задачи (1), (5) и (6), и оно определяется формулой*

$$u(x, y) = \int\limits_0^{x+y} \nu(t) J_0 \left[\sqrt{\lambda(x + y - t)(x - y - t)} \right] dt, \tag{7}$$

где $J_0(\cdot)$ *– функция Бесселя,* $\sqrt{\lambda} > 0$ *при* $\lambda > 0$.

Доказательство теоремы 1 приведено в [9].

Полагая в формуле (7) $y = 0$ имеем

$$u(x,0) = \int\limits_0^x u_y(t,0) J_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right] dt\,, \quad 0 \le x \le 1\,. \tag{8}$$

Таким образом, задача TN_λ сведена к новой нелокальной эллиптической задаче на собственные значения в области D_+: *найти значения параметра* λ *и соответствующие им собственные функции* $u(x,y)$, *удовлетворяющие условиям (2), (3), (4) и (8).*

В общем случае, то есть когда кривая Γ является произвольной, пока не удается найти решение указанной нелокальной задачи. Поэтому рассмотрим случай, когда область D_+ является сектором с центром в точке A и радиусом $r = 1:\ 0 < \varphi < \varphi_0 \le \pi,\ 0 < r < 1$.

В области D_+ введем полярные координаты: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 < \varphi < \varphi_0$, $0 < r < 1$. В полярных координатах (r,φ), разделяя переменные $u(x,y) = v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{r^2}\right)R(r) = 0\,, \quad 0 < r < 1\,, \tag{9}$$

$$R(0) = 0\,, \quad R'(1) = 0\,, \tag{10}$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0\,, \quad 0 < \varphi < \varphi_0\,, \tag{11}$$

$$\Phi'(\varphi_0) = 0\,, \tag{12}$$

$$R(x)\Phi(0) = \Phi'(0)\int\limits_0^x t^{-1}R(t)J_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt\,, \quad 0 \le x \le 1\,. \tag{13}$$

Известно, что решением уравнения (9), удовлетворяющим первому условию из (10), является функция Бесселя

$$R(r) = J_\mu(\sqrt{\lambda}r)\,, \quad \mathrm{Re}\,\mu > 0\,. \tag{14}$$

Подставляя функцию (14) в равенство (13) и вычисляя интеграл по формуле из [10],

$$\int\limits_0^a \frac{1}{x}J_\kappa(ca - cx)J_\nu(cx)dx = \frac{1}{\nu}J_{\kappa+\nu}(ac)\,, \quad a, \mathrm{Re}\,\nu > 0,\ \mathrm{Re}\,\kappa > -1\,,$$

что даёт нам второе граничное условие для определения функции $\Phi(\varphi)$

$$\Phi'(0) - \mu\,\Phi(0) = 0\,. \tag{15}$$

Решая краевую задачу (11), (12), (15), найдем

$$\Phi_n(\varphi) = C_n(\cos\mu_n\varphi + \sin\mu_n\varphi)\,, \tag{16}$$

где $C_n = \mathrm{const} \neq 0$, $n = 1, 2, \cdots$,

$$\mu_n = \frac{\pi}{\varphi_0}\left(n - \frac{3}{4}\right)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{17}$$

Потребовав, чтобы функция (14) удовлетворяла второму условию из (10), имеем

$$\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}) = 0\,. \tag{18}$$

Из теории бесселевых функций [11, с. 798] известно, что функция Бесселя $\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(z)$ при $\mu_n > -1$ имеет только вещественные нули. Тогда, обозначая через $\alpha_{n,m}$ m – й корень уравнения (18), получим собственные значения задачи TN_λ :

$$\lambda_{n,m} = \alpha^2_{n,m}\,, \quad n, m = 1, 2, \cdots\,. \tag{19}$$

На основании формул (14), (16), (19), найдем собственные функции задачи TN_λ в области D_+ :

$$u_{n,m}(x,y) = v_{n,m}(r,\varphi) = c_{n,m}J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}r)(\cos\mu_n\varphi + \sin\mu_n\varphi)\,. \tag{20}$$

Для построения собственных функций в области D_- можно воспользоваться формулой (7), но из-за громоздкости такого подхода воспользуемся методом, предложенным в [12]. Для этого в области D_- введем новые переменные

$$\sigma = \sqrt{x^2 - y^2},\;\; \theta = -\frac{y^2}{x^2 - y^2}\,.$$

Тогда в координатах (σ, θ) уравнение (1) принимает вид:

$$4\theta(1-\theta)u_{\theta\theta} + 4\left(\frac{1}{2} - \theta\right)u_\theta + \sigma^2 u_{\sigma\sigma} + \sigma u_\sigma + \lambda\sigma^2 u = 0\,.$$

Разделяя переменные $u(\sigma,\theta) = Q(\theta)P(\sigma)$, получим:

$$P''(\sigma) + \frac{1}{\sigma}P'(\sigma) + \left(\lambda - \frac{\rho^2}{\sigma^2}\right)P(\sigma) = 0\,, \quad 0 < \sigma < 1\,, \tag{21}$$

$$\theta(1-\theta)Q''(\theta) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)Q'(\theta) + \rho^2 Q(\theta) = 0\,, \tag{22}$$

Решением уравнения (21) является функция

$$P(\sigma) = J_\rho(\sqrt{\lambda}\sigma)\,, \quad \mathrm{Re}\,\rho > 0\,. \tag{23}$$

Уравнение (22) является гипергергеометрическим уравнением [13, с. 69]. Его общее решение определяется формулой

$$Q(\theta) = k_1(1-\theta)^{\rho/2}\mathrm{F}\left(\frac{1-\rho}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\theta}{\theta-1}\right) + \\ + k_2(1-\theta)^{-\rho/2}\mathrm{F}\left(\frac{\rho}{2}, \frac{1+\rho}{2}, 1+\rho; \frac{1}{1-\theta}\right) . \tag{24}$$

На основании известных формул [13, с. 110] равенству (24) придадим более простой вид

$$Q(\theta) = k_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2} + k_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2}, \tag{25}$$

Тогда, в силу (23) и (25), находим семейство решений уравнения (1) в области D_-

$$u(x,y) = Q(\sigma)P(\theta) = \left[k_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2} + k_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2}\right] J_\rho\left[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right], \tag{26}$$

где $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$, k_1 и k_2 – произвольные постоянные.

Из формулы (20) вычислим:

$$\tau_{n,m}(x) = u_{n,m}(x,0) = c_{n,m}J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}x)\,, \tag{27}$$

$$\nu_{n,m}(x) = \frac{\partial}{\partial y}\,u_{n,m}(x,0) = c_{n,m}\mu_n x^{-1}J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}x)\,. \tag{28}$$

Если в формуле (26) положить $\rho = \mu_n$, $\lambda = \alpha^2_{n,m}$, $k_1 = 0$, $k_2 = c_{n,m}$, то она определит решение задачи Коши для уравнения (1) в области D_- с краевыми условиями (27) и (28). Следовательно, система собственных функций задачи TN_λ в области D_- имеет вид

$$u_{n,m}(x,y) = c_{n,m}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}\left[\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2-y^2)}\right] . \tag{29}$$

Таким образом, объединяя формулы (20) и (29), получим систему собственных функций задачи T_λ в области D

$$u_{n,m}(x,y) = \\ = \begin{cases} c_{n,m}J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2+y^2)}\right)(\cos\mu_n\varphi + \sin\mu_n\varphi)\,, & (x,y)\in D_+\,, \\ c_{n,m}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2-y^2)}\right), & (x,y)\in D_-\,. \end{cases} \tag{30}$$

Теорема 2. *Система собственных функций* (30) *задачи* TN_λ *полна в* $\mathrm{L}_2(D_+)$.

□ Допустим, что в $L_2(D_+)$ существует функция $F(x,y)$ такая, что

$$\int\int\limits_{D_+} F(x,y)u_{n,m}(x,y)dxdy = 0 \tag{31}$$

для всех $n,m = 1,2,\dots$. Покажем, что $F(x,y) = 0$ почти всюду в D_+. В интеграле (31) перейдем к полярной системе координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда, с учётом (30), получим

$$0 = \int\limits_0^1\int\limits_0^{\varphi_0} f(r,\varphi)J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)(\cos\mu_n\varphi + \sin\mu_n\varphi)rd\varphi dr =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{\varphi_0} f(r,\varphi)J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)\sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right)rd\varphi dr\,.$$

Произведем замену $\varphi = \dfrac{\varphi_0}{\pi}\theta$. Тогда, полагая $f(r,\varphi) = f(r,\varphi_0\theta/\pi) = g(r,\theta)$, $\lambda_n = n - 3/4$, получим

$$\sqrt{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{\varphi_0} f(r,\varphi)J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)\sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right)rd\varphi dr =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi} g(r,\theta)J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)\sin\left(\lambda_n\theta + \frac{\pi}{4}\right)rd\theta dr =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi}\int\limits_0^1 F_n(r)J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)rdr = 0\,, \tag{32}$$

где

$$F_n(r) = \int\limits_0^{\pi} g(r,\theta)\sin\left(\lambda_n\theta + \frac{\pi}{4}\right)d\theta\,.$$

Из (32) имеем, что для функции $F_n(r)$ все коэффициенты ряда Фурье-Бесселя равны нулю, поэтому из теоремы Юнга [11] следует, что $F_n(r) \equiv 0$, $(n = 1,2,\dots)$, если интеграл $\int_0^1 \sqrt{r}|F_n(r)|dr$ существует и абсолютно сходится. В самом деле, из неравенства Коши-Буняковского

$$\int\limits_0^1 \sqrt{r}|F_n(r)|dr \leqslant \left(\int\limits_0^1 rdr\cdot\int\limits_0^1\left|\int\limits_0^{\pi} g(r,\theta)\sin(\lambda_n\theta + \pi/4)d\theta\right|^2 dr\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2}\varphi_0}\sqrt{\int\limits_0^{\pi}\sin^2(\lambda_n\theta + \frac{\pi}{4})d\theta}\cdot\sqrt{\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi} g^2(r,\theta)d\theta dr} =$$

$$= C\|F\|_{L_2(D_+)} < +\infty\,, \quad C = \mathrm{const} > 0,$$

получается, что имеет место соотношение

$$\int\limits_0^{\pi} g(r,\theta)\sin(\lambda_n\theta + \pi/4)d\theta = 0 \tag{33}$$

для всех $n = 1, 2, \cdots$ при любом $r \in (0,1)$. Из результатов [14] следует также, что система синусов $\{\sin(\lambda_n\theta + \pi/4)\}$ образует базис в $\mathrm{L}_2(0,\pi)$. Тогда система функций $\{\sin(\lambda_n\theta + \pi/4)\}$ полна в $\mathrm{L}_2(0,\pi)$. Поэтому из (33) получаем, что при каждом r множество тех θ, где $g(r,\theta) \neq 0$, имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини это означает, что $g(r,\theta) = 0$ почти всюду в D_+. ■

Теорема 3. *Если* $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, *то система собственных функций* (30) *задачи* TN_λ *полна в* $\mathrm{L}_2(D_-)$. *Если* $\varphi_0 \in [\pi/2, \pi]$, *то подсистема системы собственных функций*(30) *задачи* TN_λ, *начиная с номера* $n = 2, 3, \ldots$, *полна в* $\mathrm{L}_2(D_-)$.

□ Допустим, что существует функция $F(x,y) \in \mathrm{L}_2(D_-)$ такая, что

$$\iint\limits_D F(x,y)u_{n,m}(x,y)dxdy = 0 \tag{34}$$

для всех $n, m = 1, 2, \ldots$. Покажем, что $F(x,y) = 0$ почти всюду в D_-. Произведём в (34) замену переменных $2x = \xi + \eta$, $2y = \xi - \eta$. Тогда область D_- перейдет в область $\Delta = \{(\xi,\eta)|\ 0 < \xi < \eta < 1\}$, а интеграл (34) запишется в виде

$$\iint\limits_\Delta f(\xi,\eta)v_{n,m}(\xi,\eta)d\xi d\eta = 0\,, \tag{35}$$

где $f(\xi,\eta) = F(x,y)$, $\;v_{n,m}(\xi,\eta) = u_{n,m}(x,y)$. Учитывая (30), преобразуем интеграл (35)

$$0 = \int\limits_0^1 d\eta \int\limits_0^\eta f(\xi,\eta)\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}\xi\eta})d\xi\,.$$

Полагая во внутреннем интеграле $\xi = \eta t$ и меняя порядок интегрирования, получим:

$$0 = \int\limits_0^1 t^{\mu_n/2}dt \int\limits_0^1 f(\eta t,\eta)J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}\eta^2 t})\eta d\eta\,.$$

Затем, заменяя $\eta\sqrt{t} = r$, $t = s^2$, и меняя порядок интегрирования, запишем

$$0 = \int\limits_0^1 J_{\mu_n}\left(r\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) rdr \int\limits_r^1 s^{\mu_n - 1} f(rs, r/s)ds\,.$$

Из последнего равенства имеем, что для функции

$$F_n(r) = \int\limits_r^1 f(rs, r/s)s^{\mu_n - 1}ds\,, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1\,,\ n \in \mathrm{N}\,,$$

все коэффициенты ряда Фурье-Бесселя равны нулю. Поэтому из теоремы Юнга следует, что

$$\int\limits_r^1 f(rs, r/s)s^{\mu_n - 1}ds = 0$$

для всех $n \in \mathrm{N}$ при каждом $r \in [0, 1]$.

Рассмотрим систему функций $\{s^{\mu_n - 1}\}$. По теореме Мюнца условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} = \infty\,, \quad -\frac{1}{p} < m_1 < m_2 < \ldots\,,$$

необходимо и достаточно для полноты $\{x_k^m\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathrm{L_p[a,b]}$, $a \geq 0$, $p > 1$. В нашем случае при $p = 2$, $m_k = \mu_k - 1$ необходимым и достаточным условием полноты системы функций $\{s^{\mu_n - 1}\}_{n=1}^{\infty}$ является условие $\mu_1 - 1 > -1/2$. Поскольку $\mu_n = \dfrac{\pi}{\varphi_0}(n - 3/4)$, то система $\{s^{\mu_n - 1}\}_{n=1}^{\infty}$ полна в L_2 при $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$. Если же $\varphi_0 \in [\pi/2, \pi]$, то подсистема системы $\{s^{\mu_n - 1}\}_{n=2}^{\infty}$ полна в L_2. Тогда, в силу этой полноты, имеем, что при каждом r множество тех s, где $f(rs, r/s) \neq 0$, имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини это означает, что $f(rs, r/s) = 0$ почти всюду в $D_-^* = \{(s, r) :\ r < s < 1,\ 0 < r < 1\}$, и, стало быть, и в области D_-. ■

Теорема 4. *Система собственных функций* (30) *задачи* TN_λ *не полна в* $\mathrm{L}_2(D)$.

□ В области D рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} F_1(x, y), & (x, y) \in D_+, \\ F_2(x, y), & (x, y) \in D_- \end{cases}$$

из $\mathrm{L}_2(D)$ и интеграл

$$J = \iint\limits_D F(x, y)u_{n,m}(x, y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_+} F_1(x, y)u_{n,m}(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_-} F_2(x, y)u_{n,m}(x, y)dxdy = i_1 + i_2\,. \tag{36}$$

В интеграле i_1, переходя к полярным координатам $\left(r, \dfrac{\varphi_0}{\pi}\theta\right)$, получим

$$i_1 = \frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi} c_{n,m} \int\limits_0^1 \int\limits_0^\pi f_1\left(r, \frac{\varphi_0}{\pi}\theta\right) J_{\mu_n}\left(r\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) \sin\left(\lambda_n\theta + \frac{\pi}{4}\right) r d\theta dr =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi} c_{n,m} \int\limits_0^1 J_{\mu_n}\left(r\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) r dr \int\limits_0^\pi f_1\left(r, \frac{\varphi_0}{\pi}\theta\right) \sin(\lambda_n\theta + \pi/4) d\theta\,, \tag{37}$$

где $\lambda_n = n - \dfrac{3}{4}$; $n = 1, 2, \dots$, $f_1\left(r, \dfrac{\varphi_0}{\pi}\theta\right) = F_1(x, y)$. Интеграл i_2 преобразуем к виду

$$i_2 = c_{n,m} \int\limits_0^1 J_{\mu_n}\left(r\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) r dr \int\limits_r^1 s^{\mu_n - 1} f_2(rs, r/s) ds\,, \tag{38}$$

где $f_2(\xi, \eta) = F_2(x, y)$. Теперь, подставляя (37) и (38) в (36), получим

$$J = c_{n,m} \int\limits_0^1 J_{\mu_n}\left(r\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) r \,\times$$

$$\times \left[\frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi} \int\limits_0^\pi f_1\left(r, \frac{\varphi_0}{\pi}\theta\right) \sin(\lambda_n\theta + \pi/4) d\theta + + \int\limits_r^1 s^{\mu_n - 1} f_2(rs, r/s) ds\right] dr\,. \tag{39}$$

Следуя [12], рассмотрим функции

$$f_1\left(r, \frac{\varphi_0}{\pi}\theta\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}\varphi_0} \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{r^{\mu_k}}{\mu_k} - \frac{r^{\mu_k+1}}{\mu_k + 1} - \frac{1}{\mu_k(\mu_k + 1)}\right] h_k(\varphi)\,, \tag{40}$$

$$f_2(rs, r/s) = 1 - s\,, \tag{41}$$

где $h_k(\varphi)$ – биортогональная система относительно системы синусов $\sin(\lambda_n\theta + \pi/4)$, $n = 1, 2, \dots$, и она имеет вид [14]

$$h_k(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos(\theta/2))^{-1}}{(\mathrm{tg}(\theta/2))^{1/2}} \sum_{n=1}^k \mathrm{B}_{r-n} \sin(n\theta)\,, \tag{42}$$

$$\mathrm{B}_l = \sum_{m=0}^l C_{1/2}^{l-m} C_{1/2}^m (-1)^{l-m}\,, \quad B_l^n = \frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{n!}\,.$$

Поскольку $h_k(\varphi)$ равномерно ограничена по k [14], ряд (40) при любом $r \le 1$ сходится равномерно. Подставляя функции (40), (41) в (39), получим, что существует функция $F(x, y) \in \mathrm{L}_2(D)$ и $F(x, y) \ne 0$ в D такая, что интеграл $J = 0$. Теорема 4 доказана. ■

Литература

1. Франкль Ф.И. К теории сопел Лаваля // Изв. АН СССР, Сер.: Математика. – 1945. – 9,5. – С.387-422.

2. Франкль Ф.И. К теории уравнения $yZ_{xx} + Z_{yy} = 0$ // Изв. РАН СССР, Сер.: Математика. – 1946. – 10,2. – С.135-166.

3. Бицадзе А.В. О некоторых задачах для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. – 1950. – 70,4. – С.561-564.

4. Вострова Л.Е. Смешанная краевая задача для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} - u = 0$ // Ученые записки Куйб. гос. пед. ин-та. – 1958. – 21. – С.219-267.

5. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1970. – 296 с.

6. Моисеев Е.И. Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифференц. уравнения. – 1992. – 26,1. – С.93-103.

7. Сабитов К.Б., Карамова А.А. Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения // Изв. АН, сер. Матем. – 2001. – 65,4. – С.133-150.

8. Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н. Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применение // Сибирский мат. журнал. – 2001. – 42,5. – С.1147-1161.

9. Сабитов К.Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений I // Дифференц. уравнения. – 1990. – 26,6. – С.1023-1032.

10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

11. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций I / Г.Н. Ватсон. – М.: ИЛ, 1949. – 728 с.

12. Сабитов К.Б., Тихомиров В.В. О построении собственных значений и функций одной газодинамической задачи Франкля // Матем. моделирование. – 1990. – 2,10. – С.100-109.

13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. – Т.2. – 294 с.

14. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифференц. уравнения. – 1987. – 23,1. – С.177-179.

SPECTRAL PROPERTIES OF THE TRICOMI-NEUMANN PROBLEM SOLUTION OF THE MIXED TYPE EQUATION AND THEIR APPLICATIONS

S.L. Hasanova

Zainab Biishev Stelitamak State Pedagogical Academy,

Nokolayeva St., 10, Stelitamak, Bashkortostan, Russia, e-mail: hasanovasl@rambler.ru

Abstract. The spectral problem for the differential equation of mixed type in the special domain is studied. Its eigenfunctions are found. It is proved that the eigenfunction system is complete in the elliptic domain and the hyperbolic one. It is also fulfilled in the whole domain.

Key words: differential equation of mixed type, characteristics, eigenvalues, eigenfunctions, eigenseries.