УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

О МЕТОДЕ ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СТОКСА

Св.А. Гриценко, И.В. Некрасова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Nekrasova_i@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается периодическая начально-краевая задача для уравнений Стокса. С помощью метода фиктивных областей доказывается корректность исходной задачи, а именно, рассматривается корректная вспомогательная задача, определенная в более широкой области, зависящая от большого параметра и такая, что её решение сходится к решению исходной задачи при стремлении параметра к бесконечности.

Ключевые слова: уравнения Стокса, метод фиктивных областей, метод Галеркина.

1. Постановка задачи

Рассмотрим единичный куб $Y = (0,1)\times(0,1)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ и его подмножество $Y_f \subset Y$. Пусть области

$$\partial Y_f \bigcap \{y_i = 0\} = \sigma_{i,0},$$
$$\partial Y_f \bigcap \{y_i = 1\} = \sigma_{i,1},$$
$$i = 1,2,3$$

как множества в $\mathbb{R}^2$ удовлетворяют условиям периодичности

$$\sigma_{i,0} = \sigma_{i,1}, \ \ i = 1,2,3\,,$$

а граница $\gamma = \partial Y_f \bigcap Y$ есть липшицева поверхность.

Рассмотрим следующую периодическую начально-краевую задачу для скорости жидкости $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)$ в области Y_f, состоящую из системы дифференциальных уравнений Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} - \mu\triangle\boldsymbol{V} + \nabla Q = 0, \quad \mathrm{div}_y \boldsymbol{V} = 0\,, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f, \quad t > 0\,, \tag{1}$$

начального условия

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},0) = \boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y} \in Y_f\,, \tag{2}$$

краевого условия

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t) = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma, \quad t > 0 \tag{3}$$

и условий 1-периодичности по пространственной переменной $\boldsymbol{y}$ на границе $\partial Y_f \bigcap \partial Y$ для функции $\boldsymbol{V}$.

Для функциональных пространств будем использовать обозначения, принятые в [1].

Через H^0 обозначим пространство вектор-функций из $L^2((0,T);\mathbb{W}^1_2(Y_f))$, 1-периодичных по переменной $\boldsymbol{y}$ на границе $\partial Y_f \bigcap \partial Y$ и равных нулю на границе $\gamma = \partial Y_f \bigcap Y$.

Через H^1 – пространство вектор-функций из $\mathbb{W}_2^{1,1}(Y_f \times (0,T))$, 1-периодичных по переменной $\boldsymbol{y}$ на границе $\partial Y_f \bigcap \partial Y$ и равных нулю на границе $\gamma = \partial Y_f \bigcap Y$.

H^2 обозначает пространство вектор-функций из $L^2((0,T);\mathbb{W}_2^1(Y))$, 1-периодичных по переменной $\boldsymbol{y}$ на границе ∂Y.

H^3 – пространство вектор-функций из $\mathbb{W}_2^{1,1}(Y \times (0,T))$, 1-периодичных по переменной $\boldsymbol{y}$ на границе ∂Y.

2. Основной результат

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (1)-(3) называется вектор-функция $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t) \in H^0$, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$-\int_0^T \int_{Y_f} \boldsymbol{V} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}\, d\boldsymbol{y}\, dt + \mu \int_0^T \int_{Y_f} \nabla \boldsymbol{V} : \nabla \boldsymbol{\eta}\, d\boldsymbol{y}\, dt = \int_{Y_f} \boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},0)\, d\boldsymbol{y}\,, \tag{4}$$

для любой соленоидальной ($\mathrm{div}\boldsymbol{\eta} = 0$) в области Y_f вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},t) \in H^1$, равной нулю при $t = T$.
Здесь используются обозначения: $A : B = tr(AB^T)$ для квадратных матриц A и B, $Y_T = Y \times (0,T)$ – цилиндр.

Теорема 1. *Существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3) и для него справедлива оценка:*

$$\frac{1}{2} \max_{0<t<T} \int_Y |\boldsymbol{V}|^2\, d\boldsymbol{y} + \mu \int_{Y_T} \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y_i} \right|^2 d\boldsymbol{y}\, dt \;\leqslant\; \frac{1}{2} \int_Y |\boldsymbol{V}_0|^2\, d\boldsymbol{y}\,. \tag{5}$$

Для доказательства существования и единственности обобщенного решения задачи (1)-(3) воспользуемся методом фиктивных областей. Суть метода заключается в том, что в более широкой области находятся решения вспомогательных задач, слабо сходящиеся к решению исходной задачи.

Введем положительный параметр λ. Будем рассматривать задачу (1)-(3), как предельную при $\lambda \to \infty$, для следующих вспомогательных задач, зависящих от параметра λ :

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}^\lambda}{\partial t} = \mu \Delta \boldsymbol{V}^\lambda - \nabla Q - \lambda \boldsymbol{V}^\lambda (1 - \chi(\boldsymbol{y})), Q + \lambda \mathrm{div} \boldsymbol{V}^\lambda = 0\,, \quad \boldsymbol{y} \in Y, \quad t > 0 \tag{6}$$

с начальным условием

$$\boldsymbol{V}^\lambda(\boldsymbol{y},0) = \chi \boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})\,, \quad \boldsymbol{y} \in Y \tag{7}$$

и условиями 1-периодичности по $\boldsymbol{y}$ на границе ∂Y. Здесь $\chi(\boldsymbol{y})$ – характеристическая функция Y_f в Y:

$$\chi(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{y} \in Y_s, \\ 1, & \boldsymbol{y} \in Y_f. \end{cases}$$

Определение 2. *Обобщенным решением задачи (6)-(7) называется вектор-функция $\boldsymbol{V}^\lambda(\boldsymbol{y},t) \in H^2$, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$
-\int_{Y_T} \boldsymbol{V}^{\lambda}\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}\,d\boldsymbol{y}\,dt + \mu \int_{Y_T} \nabla \boldsymbol{V}^{\lambda} : \nabla \boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt +
$$

$$
+\lambda \int_{Y_T} (\mathrm{div} \boldsymbol{V}^{\lambda})\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt + \lambda \int_{Y_T} (1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{V}^{\lambda}\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{y}\,dt =
$$

$$
= \int_{Y} \chi \boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},0)\,d\boldsymbol{y} \tag{8}
$$

для любой вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},t) \in H^3$, равной нулю при $t = T$.

Теорема 2. *При всех $\lambda > 0$ обобщенное решение задачи (6)-(7) существует, единственно и для него справедлива оценка:*

$$
\frac{1}{2}\max_{0<t<T}\int_{Y} |\boldsymbol{V}^{\lambda}|^2\,d\boldsymbol{y} + \mu \int_{Y_T} \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial \boldsymbol{V}^{\lambda}}{\partial y_i}\right|^2 d\boldsymbol{y}\,dt +
$$

$$
+\lambda \int_{Y_T} |\mathrm{div}\, \boldsymbol{V}^{\lambda}|^2\,d\boldsymbol{y}\,dt + \lambda \int_{Y_T} (1-\chi)|\boldsymbol{V}^{\lambda}|^2\,d\boldsymbol{y}\,dt \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{1}{2}\int_{Y} |\chi \boldsymbol{V}_0|^2\,d\boldsymbol{y}\,. \tag{9}
$$

3. Доказательство Теоремы 2

Всюду в этом разделе для удобства изложения мы опускаем индекс λ.

Для доказательства существования обобщенного решения задачи (6)-(7) будем использовать метод Галеркина.

Обозначим через $\boldsymbol{W}^1_{2,\Pi}(Y)$ пространство вектор-функций из $\boldsymbol{W}^1_2(Y)$, 1-периодичных на границе ∂Y.

Выберем в этом пространстве полную систему вектор-функций $\{\boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{y})\}$ (назовем их базисными функциями), ортонормированную в $L_2(Y)$:

$$
(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) = \int_{Y} \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\varphi}_j(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = \delta_{ij}\,,
$$

и такую, что

$$
\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} H_N} = \boldsymbol{W}^1_{2,\Pi}(Y)\,,
$$

где конечномерное подпространство H_N представляет собой линейную оболочку первых N базисных функций.

Приближенное решение будем искать в виде:

$$
\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},t) = \sum_{m=1}^{N} c_m(t)\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\,. \tag{10}
$$

Функция $\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},t)$ должна удовлетворять начальному условию

$$\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},0) = \boldsymbol{V}_0^N(\boldsymbol{y})\,, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{V}_0^N(\boldsymbol{y})$ есть ортогональная проекция вектора $\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})$ на подпространство H_N. Следовательно, $\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{V}_0^N(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{z}$ есть ортогональная составляющая вектора $\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})$ относительно H_N. Так как $\boldsymbol{V}_0^N(\boldsymbol{y}) \in H_N$, то

$$\boldsymbol{V}_0^N(\boldsymbol{y}) = \sum_{m=1}^{N} b_m \boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\,,$$

$$b_m = (\boldsymbol{V}_0^N(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y}))_{L_2(Y)} = (\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})) = (\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})) - (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y}))\,,$$

и, учитывая, что $\boldsymbol{z}\perp\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})$, окончательно получаем

$$b_m = (\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})) = \int_Y \chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,. \tag{12}$$

Коэффициенты разложения $c_m(t)$ в формуле (10) определяются из условия ортогональности в $L_2(Y)$ невязки

$$\mathfrak{L}(\boldsymbol{V}_N) = \frac{\partial \boldsymbol{V}_N}{\partial t} - \mu\Delta\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{N}} + \nabla Q + \lambda\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{N}}(1-\chi(\boldsymbol{y}))$$

подпространству H_N, то есть из условия

$$(\mathfrak{L}(\boldsymbol{V}_N), \boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y}))_{L_2} = 0\,, \quad \forall\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y}) \in H_N, \quad m = 1,2,\ldots,N\,.$$

Таким образом, учитывая, что $Q + \lambda\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$, для определения коэффициентов $c_m(t)$ имеем систему уравнений:

$$\int_Y \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}_N}{\partial t}\boldsymbol{\varphi}_m + \mu\nabla\boldsymbol{V}_N : \nabla\boldsymbol{\varphi}_m + \lambda(\mathrm{div}\boldsymbol{V}_N)\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}_m + \lambda(1-\chi)\boldsymbol{V}_N\boldsymbol{\varphi}_m \right) d\boldsymbol{y} = 0\,. \tag{13}$$

Подставляя в эти уравнения

$$\boldsymbol{V}_N = \sum_{m=1}^{N} c_m(t)\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\,,$$

получаем систему N обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\dot{c}_m(t) + \sum_{k=1}^{N} c_k(t) \int_Y (\mu\nabla\boldsymbol{\varphi}_m : \nabla\boldsymbol{\varphi}_k + \lambda(\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}_m)\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}_k + \;+\lambda(1-\chi)\boldsymbol{\varphi}_m\boldsymbol{\varphi}_k)\,d\boldsymbol{y} = 0\,,$$

$$c_m(0) = b_m, m = 1,2,\ldots,N\,. \tag{14}$$

Полученная система при заданных начальных условиях имеет единственное решение (см.[2]), следовательно и функция

$$\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},t) = \sum_{m=1}^{N} c_m(t)\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\,, \quad \forall N = 1,2,\ldots$$

определяется однозначно.

Докажем теперь ограниченность последовательности галеркинских приближений $\{\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},t)\}$ в норме пространства H^2:

$$\|\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)\|^2 = \int_{Y_T} \left(|\boldsymbol{V}|^2 + \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y_i} \right|^2 \right) d\boldsymbol{y}\, dt\,. \tag{15}$$

Для этого умножим произвольное уравнение с номером m из (14) на $c_m(t)$ и просуммируем по m от 1 до N. Получим

$$\sum_{m=1}^{N} \dot{c}_m c_m + \mu \int_Y \nabla \boldsymbol{V}_N : \nabla \boldsymbol{V}_N\, d\boldsymbol{y} + \lambda \int_Y (\mathrm{div} \boldsymbol{V}_N)^2\, d\boldsymbol{y} + \; + \lambda \int_Y (1-\chi)|\boldsymbol{V}_N|^2\, d\boldsymbol{y} = 0\,. \tag{16}$$

Далее представим первое слагаемое в виде

$$\sum_{m=1}^{N} \dot{c}_m c_m = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_Y |\boldsymbol{V}_N|^2\, d\boldsymbol{y}\,,$$

учтем, что

$$\nabla \boldsymbol{V}_N : \nabla \boldsymbol{V}_N = \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \boldsymbol{V}_N}{\partial y_i} \right|^2,$$

и проинтегрируем уравнение от 0 до t :

$$\frac{1}{2} \int_Y |\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},t)|^2\, d\boldsymbol{y} + \mu \int_{Y_t} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \boldsymbol{V}_N}{\partial y_i} \right|^2 d\boldsymbol{y}\, d\tau +$$

$$+ \lambda \int_{Y_t} (\mathrm{div} \boldsymbol{V}_N)^2\, d\boldsymbol{y}\, d\tau + \lambda \int_{Y_t} (1-\chi)|\boldsymbol{V}_N|^2\, d\boldsymbol{y}\, d\tau = \frac{1}{2} \int_Y |\boldsymbol{V}_0^N|^2\, d\boldsymbol{y}\,. \tag{17}$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{V}_0^N$ является ортогональной проекцией $\chi \boldsymbol{V}_0$ на подпространство H_N, то $|\boldsymbol{V}_0^N| \leqslant |\chi \boldsymbol{V}_0|$ и, следовательно,

$$\frac{1}{2} \max_{0<t<T} \int_Y |\boldsymbol{V}_N|^2\, d\boldsymbol{y} + \mu \int_{Y_T} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \boldsymbol{V}_N}{\partial y_i} \right|^2 d\boldsymbol{y}\, dt +$$

$$+ \lambda \int_{Y_T} (\mathrm{div} \boldsymbol{V}_N)^2\, d\boldsymbol{y}\, dt + \lambda \int_{Y_T} (1-\chi)|\boldsymbol{V}_N|^2\, d\boldsymbol{y}\, dt \leqslant \frac{1}{2} \int_Y |\chi \boldsymbol{V}_0|^2\, d\,. \tag{18}$$

Таким образом, последовательность $\{\boldsymbol{V}_N\}$ ограничена в норме (15).

Из известной теоремы функционального анализа о том, что любое ограниченное подмножество гильбертова пространства слабо компактно, следует слабая компактность $\{\boldsymbol{V}_N\}$. Таким образом, из $\{\boldsymbol{V}_N\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в H^2 к некоторой функции $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)$. Покажем, что эта функция $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)$ и является искомым обобщенным решением задачи, то есть удовлетворяет интегральному тождеству (8) для любой вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},t) \in H^3$, равной нулю при $t = T$. Для этого, в свою очередь, достаточно установить выполнение этого условия для некоторого счетного всюду плотного множества в H^3.

Докажем, что интегральное тождество (8) справедливо для любой функции $\boldsymbol{\eta}_N$ вида

$$\boldsymbol{\eta}_N(\boldsymbol{y},t)=\sum_{m=1}^{N} d_m(t)\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\,, \tag{19}$$

где $d_m(t)$ есть произвольные функции из $L^2(0,T)$.

Зафиксируем $N'\leqslant N$. Умножим каждое уравнение системы (13) на свою гладкую функцию $d_m(t)$, просуммируем по m от 1 до N' и проинтегрируем по t от 0 до T. Получим

$$\int_0^T dt\ \left(\int_Y \frac{d\boldsymbol{V}_N}{dt}\boldsymbol{\eta}_{N'}\,d\boldsymbol{y}+\mu\int_Y \nabla\boldsymbol{V}_N:\nabla\boldsymbol{\eta}_{N'}\,d\boldsymbol{y}+\right.$$
$$\left.+\lambda\int_Y(\mathrm{div}\boldsymbol{V}_N)\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}_{N'}\,d\boldsymbol{y}+\lambda\int_Y(1-\chi)\boldsymbol{V}_N\boldsymbol{\eta}_{N'}\,d\boldsymbol{y}\right)=0\,, \tag{20}$$

и далее, интегрируя первое слагаемое по частям, имеем:

$$-\int_{Y_T}\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},t)\frac{\partial\boldsymbol{\eta}_{N'}}{\partial t}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\int_{Y_T}\mu\nabla\boldsymbol{V}_N:\nabla\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{N'}}\,d\boldsymbol{y}\,dt+$$
$$+\int_{Y_T}\lambda\,(\mathrm{div}\boldsymbol{V}_N)\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{N'}}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\int_{Y_T}\lambda(1-\chi)\boldsymbol{V}_N\boldsymbol{\eta}_{N'}\,d\boldsymbol{y}\,dt=$$
$$=\int_Y\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\eta}_{N'}(\boldsymbol{y},0)\,d\boldsymbol{y}\,. \tag{21}$$

Зафиксируем функцию $\boldsymbol{\eta}_{N'}(\boldsymbol{y},t)$ и перейдем к пределу при $N\to\infty$ по выбранной подпоследовательности. Получим интегральное тождество для $\boldsymbol{V}$ вместо $\boldsymbol{V}_N$:

$$-\int_{Y_T}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)\frac{\partial\boldsymbol{\eta}_{N'}}{\partial t}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\int_{Y_T}\mu\nabla\boldsymbol{V}:\nabla\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{N'}}\,d\boldsymbol{y}\,dt+$$
$$+\int_{Y_T}\lambda(\mathrm{div}\boldsymbol{V})\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{N'}}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\int_{Y_T}\lambda(1-\chi)\boldsymbol{V}\boldsymbol{\eta}_{N'}\,d\boldsymbol{y}\,dt=$$
$$=\int_Y\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\eta}_{N'}(\boldsymbol{y},0)\,d\boldsymbol{y}\,, \tag{22}$$

справедливое для любой функции $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{N'}}(\boldsymbol{y},t)$ вида (19). Но такие $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{N'}}$ всюду плотны в H^3, поэтому интегральное тождество выполняется и для любой функции $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},t)\in H^3$.

Таким образом,

$$\lim_{N\to\infty}\boldsymbol{V}_N=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)$$

и есть искомое обобщенное решение задачи.

Заметим, что найденное обобщенное решение является единственным. Действительно, предположим, что задача (6)-(7) имеет два обобщенных решения, тогда их разность $\boldsymbol{w}$ будет удовлетворять интегральному тождеству

$$-\int_{Y_T}\boldsymbol{w}\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial t}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\mu\int_{Y_T}\nabla\boldsymbol{w}:\nabla\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt+$$

$$+\lambda\int_{Y_T}(\mathrm{div}\boldsymbol{w})\,\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\lambda\int_{Y_T}(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{w}\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt=0 \qquad (23)$$

для любой вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},t)\in H^3$, равной нулю при $t=T$.

Функция $\boldsymbol{w}$, таким образом, является обобщенным решением задачи (6)-(7) с однородным начальным условием $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{y},0)=0$. Тогда из неравенства (18) следует, что

$$\frac{1}{2}\max_{0<t<T}\int_Y|\boldsymbol{w}|^2\,d\boldsymbol{y}+\mu\int_{Y_T}\sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial y_i}\right|^2\,d\boldsymbol{y}\,dt+$$

$$+\lambda\int_{Y_T}(\mathrm{div}\boldsymbol{w})^2\,d\boldsymbol{y}\,dt+\lambda\int_{Y_T}(1-\chi)|\boldsymbol{w}|^2\,d\boldsymbol{y}\,dt\leqslant 0\,,$$

т.е. $\boldsymbol{w}=0$, что и доказывает единственность решения.

4. Доказательство Теоремы 1

Теорема 1 является следствием теоремы 2 и следующей леммы.

Лемма. *Решение $\boldsymbol{V}^\lambda$ вспомогательной задачи (6)-(7) слабо в H^0 сходится к решению $\boldsymbol{V}$ задачи (1)-(3).*

□ Для каждого фиксированного λ мы нашли решение $\boldsymbol{V}^\lambda$ вспомогательной задачи (6)-(7), для которого справедлива оценка (9). Поэтому последовательность $\{\boldsymbol{V}^\lambda\}$ является ограниченной в норме (15), то есть из нее опять же можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Выбирая подпоследовательность, для которой будем сохранять прежнее обозначение, получаем, что при $\lambda\to\infty$ решение $\boldsymbol{V}^\lambda$ вспомогательной задачи сходится слабо в H^0 к решению $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{V}^\lambda\rightharpoonup\boldsymbol{V}\,. \qquad (24)$$

В частности, мы получаем слабую в $L_2(Y\times(0,T))$ сходимость $\nabla\boldsymbol{V}^\lambda$ к $\nabla\boldsymbol{V}$:

$$\nabla\boldsymbol{V}^\lambda\rightharpoonup\nabla\boldsymbol{V}\,. \qquad (25)$$

Неравенство (9) дает сильную в H^0 сходимость $\mathrm{div}\boldsymbol{V}^\lambda$ и $(1-\chi)\boldsymbol{V}^\lambda$ к нулю:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V}^\lambda\to 0\,, \qquad (26)$$

$$(1-\chi)\boldsymbol{V}^\lambda\to 0\,. \qquad (27)$$

Из (25),(26) следует, что

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V}=0,\quad \boldsymbol{y}\in Y_f\,, \qquad (28)$$

из (24),(26) –

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)=0,\quad \boldsymbol{y}\in Y_s\,, \qquad (29)$$

а утверждения (29) и принадлежность $\boldsymbol{V}$ пространству H^0 гарантируют выполнение краевого условия $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)=0,\quad \boldsymbol{y}\in\gamma$.

Рассмотрим интегральное тождество (8) при $\lambda\to\infty$. Выберем функцию $\boldsymbol{\eta}$ так, чтобы она была финитная и соленоидальная в области Y_f.

Тогда

$$\lambda\int_0^T\int_Y(\mathrm{div}\boldsymbol{V}^\lambda)\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt=\lambda\int_0^T\int_{Y_f}(\mathrm{div}\boldsymbol{V}^\lambda)\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt+$$

$$+\lambda\int_0^T\int_{Y_s}\mathrm{div}\boldsymbol{V}^\lambda\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt=0,$$

так как соленоидальность $\boldsymbol{\eta}$ дает нам нуль в первом слагаемом, а финитность – во втором. Кроме того,

$$\lambda\int_0^T\int_Y(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{V}^\lambda\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt=\lambda\int_0^T\int_{Y_f}(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{V}^\lambda\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt+$$

$$+\lambda\int_0^T\int_{Y_s}(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{V}^\lambda\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt=0,$$

так как $\chi(\boldsymbol{y})=1$, если $\boldsymbol{y}\in Y_f$, и $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},t)=0$ при $\boldsymbol{y}\in Y_s$.

Таким образом, функция $\boldsymbol{V}=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\boldsymbol{V}^\lambda$ удовлетворяет интегральному тождеству (4).

Неравенство (18) дает нам требуемую оценку (5). ■

Литература

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: УРСС, 2004.

ON THE FICTITIOUS DOMAIN METHOD FOR THE PERIODICAL INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR THE STOKES EQUATIONS

Sv.A. Gritsenko, I.V. Nekrasova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Nekrasova_i@bsu.edu.ru

Abstract. The periodical initial-boundary problem for the Stokes equation is considered. It is proved the correctness of this problem by the fictitious domain method, namely, we consider the correct auxiliary problem on the more wide domain. This auxiliary problem depends on the large parameter and its solution tends to the solution of the original problem if the parameter tends to infinity.

Key words: Stokes equation, fictitious domain method, Galyorkin's method.