УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ В ПОРОУПРУГИХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ ДЛЯ ОДНОСКОРОСТНОГО КОНТИНУУМА

И.В. Данилец, А.М. Мейрманов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе строится математическая микроскопическая модель распространения акустических волн в пористых средах со специальной геометрией порового пространства. Доказывается корректная разрешимость задачи Коши для микроскопической модели и даётся строгий вывод усреднённых уравнений, получаемых на основе этой модели.

Ключевые слова: уравнения Стокса и Ламэ, двухмасштабная сходимость, уравнения акустики.

Введение

В современной геофизике, изучающей распространение возмущений в естественных подземных грунтах, существуют различные физические и математические модели, описывающие такого рода процессы. Долгое время основной моделью в этой области служила система уравнений Ламэ линейной теории упругости. Но начиная с работ М. Био [1] в геофизике всё больше и больше склоняются к пониманию того, что существенную роль в математическом моделировании природных грунтов играет наличие в них пор и трещин, заполненных флюидами (жидкостями или газами). Таким образом, существенно представление о том, что подземные массивы являются упругими пористыми средами. Феноменологические модели, предложенные М. Био, являются некими комбинациями уравнений Ламэ и уравнений, описывающих динамику флюида в порах (например, системы уравнений фильтрации Дарси). Хорошо известно, что основным недостатком сложных феноменологических моделей является наличие феноменологических постоянных (или функций), которые необходимо как-то доопределять. Да и саму структуру дифференциальных уравнений необходимо критически анализировать. Для понимания сути такого рода моделей Р.Барридж и Дж.Келлер [2] предложили совершенно естественный подход их обоснования. А именно, они рассмотрели математическую модель, описывающую на макроскопическом уровне поведение смеси упругого твёрдого тела и флюида, заполняющего поровое пространство. Эта модель не вызывает сомнений, поскольку состоит их уравнений Ламэ, Стокса и известных законов сохранения на общей границе "твердое тело-флюид" и содержит минимальное количество феноменологических постоянных (постоянные Ламэ, вязкость и скорость звука в флюиде), которые достаточно надёжно определяются из эксперимента. Указанная модель содержит малые и большие быстро осциллирующие коэффициенты, зависящие от малого параметра ε – безразмерного размера пор. Второе предположение авторов, также совершенно естественное, заключается в том, что все феноменологические модели, корректно описывающие данный процесс, должны как-то следовать из основной модели при стремлении малого параметра к нулю. Таким образом, корректные феноменологические модели должны появляться в результате усреднения исходной математической модели, описывающей процесс на микроскопическом уровне. Для периодической системы пор Р.Барридж и Дж.Келлер, используя метод двухмасштабного разложения, формально вывели систему уравнений Био пороупругости. Позже строгий вывод усредненных уравнений был дан в работах Г. Нгуетсенга [3] и А.Мейрманова [4, 5]. Как правило, вывод усредненных уравнений не сопровождается их математическим анализом. Это естественно, поскольку в общем случае такой анализ технически сложен и в принципе является достаточно трудной самостоятельной задачей. Целью настоящей публикации является корректность соответствующей задачи Коши для микроскопической модели и вывод на её основе усредненных уравнений для простейшей геометрии порового пространства в случае односкоростного континуума.

1. Постановка задачи

В данной статье изучается распространение акустических волн в неоднородной среде, занимающей все пространство $\mathbb{R}^3$. Рассматриваемая среда вне бесконечного слоя конечной ширины является упругим телом. В свою очередь, сам слой перфорирован системой пор, которые заполнены вязкой жидкостью. Твёрдая компонента такой среды называется скелетом грунта, а область занятая жидкостью – поровым пространством.

В безразмерных переменных (не отмеченных штрихами)

$$t' = \tau t\,, \quad \boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x}\,,$$

где τ – характерное время, а L – характерный размер рассматриваемого физического процесса, слой $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задается соотношениями

$$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \, |x_1| < 1, \, |x_2| + |x_3| < \infty\}\,,$$

поровое пространство Ω_f^ε есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_f, где $\varepsilon = l/L$, l – средний размер пор, твёрдый скелет Ω_s^ε есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_s, а граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \bigcap \partial\Omega_f^\varepsilon$ есть периодическое повторение в Ω липшицевой границы $\varepsilon\gamma$,

$$\gamma = \partial Y_f \bigcap \partial Y_s, \quad Y = Y_f \bigcup Y_s \bigcup \gamma, \quad Y = (0,1) \times (0,1) \times (0,1)\,.$$

Если χ^ε – характеристическая функция порового пространства $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega$, то

$$\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)\,,$$

где $\chi(\boldsymbol{y})$ – характеристическая функция "жидкой ячейки" Y_f.

Сплошная среда вне Ω описывается системой уравнений Ламэ

$$\rho_* \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_*}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathbb{P}_* + \rho_* \boldsymbol{F}\,, \tag{1}$$

для безразмерного перемещения среды вне Ω

$$\boldsymbol{w}_* = \frac{g\tau^2}{L^2}\boldsymbol{w}'_*\,,$$

где

$$\mathbb{P}_* = \alpha_{\lambda^*}\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_*) + \alpha_{p,*}(\operatorname{div}\boldsymbol{w}_*)\mathbb{I}\,, \tag{2}$$

$$\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla_x \boldsymbol{u} + \nabla_x \boldsymbol{u}^T)\,,$$

$\mathbb{I}$ – шаровый тензор,

$$\alpha_{\lambda^*} = \frac{2\lambda^*\tau^2}{L^2\rho_0}\,, \quad \alpha_{p,*} = \frac{\nu^*\tau^2}{L^2\rho_0}\,,$$

λ^*, ν^* – постоянные Ламэ, ρ_* – безразмерная плотность среды соотнесенная к плотности воды ρ_0, $\boldsymbol{F}$ – заданный вектор массовых сил.

Коротко будем говорить, что область вне Ω является упругим телом плотности ρ_* и упругими характеристиками λ^* и ν^*.

Сама область Ω состоит из чередующихся слоев, параллельных плоскости $\{x_1 = 0\}$, ширины ml заполненных вязкой жидкостью плотности ρ_f и вязкости μ и слоев ширины $(1-m)l$ упругого тела плотности ρ_s с упругими характеристиками λ и ν.

Поведение жидкости в области Ω_f^ε описывается системой уравнений Стокса:

$$\rho_f \frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbb{P}_f + \rho_f \boldsymbol{F}\,, \tag{3}$$

$$\mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}_f) - p_f \mathbb{I}\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} + \alpha_{p,f}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_f = 0\,, \tag{5}$$

для безразмерной скорости

$$\boldsymbol{v} = \frac{g\tau^3}{L^2}\boldsymbol{v}'$$

и давления p_f в жидкости, где

$$\alpha_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2\rho_0}\,, \quad \alpha_{p,f} = \rho_f c_f^2 \frac{\tau^2}{L^2}\,,$$

μ – вязкость жидкости, c_f – скорость звука в жидкости, ρ_f – безразмерная плотность жидкости соотнесенная к плотности воды ρ_0.

Наконец, поведение упругого скелета, заполняющего область Ω_s^ε, описывается системой уравнений Ламэ

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s}{\partial t^2} = \operatorname{div}\mathbb{P}_s + \rho_s \boldsymbol{F}\,, \tag{6}$$

$$\mathbb{P}_s = \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \alpha_{p,s}(\operatorname{div}\boldsymbol{w}_s)\mathbb{I}\,, \tag{7}$$

для безразмерного перемещения среды

$$\boldsymbol{w} = \frac{g\tau^2}{L^2}\boldsymbol{w}'\,,$$

где

$$\alpha_\lambda = \frac{2\lambda\tau^2}{L^2\rho_0}\,, \quad \alpha_{p,s} = \frac{\nu\tau^2}{L^2\rho_0}\,.$$

На границе раздела между различными слоями (упругий скелет – жидкость) выполнены условия непрерывности перемещений:

$$\boldsymbol{w}_f = \boldsymbol{w}_s\,, \quad \boldsymbol{v}_f = \frac{\partial \boldsymbol{w}_f}{\partial t}\,, \tag{8}$$

и нормальных напряжений

$$\mathbb{P}_f \cdot \boldsymbol{n} = \mathbb{P}_s \cdot \boldsymbol{n}\,, \tag{9}$$

а границе раздела жидкого или твердого слоя и основной части грунта выполнены аналогичные условия

$$\boldsymbol{w}_f = \boldsymbol{w}_* \quad (\text{либо } \boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{w}_*)\,, \tag{10}$$

$$\mathbb{P}_f \cdot \boldsymbol{n} = \mathbb{P}_* \cdot \boldsymbol{n} \quad (\text{либо } \mathbb{P}_s \cdot \boldsymbol{n} = \mathbb{P}_* \cdot \boldsymbol{n})\,, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$ – вектор нормали к границе раздела.

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{w}_*(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,, \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}_*}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,, \; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \Omega, \\ &\boldsymbol{w}_f(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,, \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}_f}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,, \; \boldsymbol{x} \in \Omega_f, \\ &\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,, \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,, \; \boldsymbol{x} \in \Omega_s\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Переформулируем задачу для вектора перемещений $\boldsymbol{w}$ и давления p, где

$$\boldsymbol{w} = (1-\xi)\boldsymbol{w}_* + \xi\chi^{\varepsilon}\boldsymbol{w}_f + \xi(1-\chi^{\varepsilon})\boldsymbol{w}_s\,,$$

$$p = (1-\xi)p_* + \xi\chi^{\varepsilon}p_f + \xi(1-\chi^{\varepsilon})p_s\,,$$

которые удовлетворяют закону сохранения количества движения

$$\rho^{\varepsilon}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \operatorname{div}\mathbb{P}(x, \boldsymbol{w}) + \rho^{\varepsilon}\boldsymbol{F} \tag{13}$$

в смысле теории распределений и уравнению неразрывности (определяющим давление)

$$p + \alpha_p^{\varepsilon}\operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0 \tag{14}$$

в обычном смысле.

В уравнениях (1.13)-(1.14) используются обозначения

$$\rho^{\varepsilon} = (1-\xi)\rho_* + \xi\chi^{\varepsilon}\rho_f + \xi(1-\chi^{\varepsilon})\rho_s\,,$$

$$\mathbb{P}(x, \boldsymbol{w}) = (1-\xi)\alpha_{\lambda^*}\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \xi\chi^{\varepsilon}\alpha_{\mu}\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + \xi(1-\chi^{\varepsilon})\alpha_{\lambda}\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I}\,,$$

$$\alpha_p^{\varepsilon} = (1-\xi)\alpha_{p,*} + \xi\chi^{\varepsilon}\alpha_{p,f} + \xi(1-\chi^{\varepsilon})\alpha_{p,s}\,,$$

а функция ξ является характеристической функцией области Ω.

В настоящей работе рассматривается случай односкоростного континуума, когда

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\mu = 0\,, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\lambda = \lambda_0 \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{\lambda^*} = \lambda_0^*\,, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \infty\,,$$

$$0 < \lambda_0,\, \lambda_0^* < \infty\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{p,*} = c^*\,, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{p,f} = c_f\,, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{p,s} = c_s\,,$$

$$0 < c^*,\, c_f,\, c_s < \infty\,.$$

В общей постановке первая краевая задача для ограниченной области Ω без контакта с чисто упругой средой была рассмотрена в [1], [2].

2. Формулировка основных результатов

Определение 1. *Назовем обобщенным решением задачи Коши (12)-(14) функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ и p^ε удовлетворяющие условиям регулярности*

$$\xi(1-\chi^\varepsilon)\nabla\boldsymbol{w}^\varepsilon,\, \xi\chi^\varepsilon\nabla\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t},\, (1-\xi)\nabla\boldsymbol{w}^\varepsilon \in L^2\big(\mathbb{R}^3\times(0,T)\big)\,,$$

уравнению неразрывности (1.14) почти всюду в $\mathbb{R}^3$ и интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_T}\left(\rho_\varepsilon\left[\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} - \boldsymbol{F}\right]\cdot\boldsymbol{\varphi} + \mathbb{P}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})\right)dxdt = 0 \tag{15}$$

для всех гладких функций $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ таких, что

$$\boldsymbol{\varphi},\, \nabla\boldsymbol{\varphi} \in L^2\big(\mathbb{R}^3\times(0,T)\big), \quad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},T) = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{x},T) = 0.$$

В указанном тождестве посредством $\mathbb{A} : \mathbb{B}$ обозначена свёртка по обоим индексам двух тензоров второго ранга,

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} = tr(\mathbb{B}^*\circ\mathbb{A}) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}B_{ji}\,.$$

Теорема 1. *Пусть*

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\boldsymbol{F}|^2 + |\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}|^2\right)dx \le F^2\,.$$

Тогда при всех $\varepsilon > 0$ на произвольном интервале времени $[0,T]$ существует единственное обобщённое решение $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ и p^ε задачи Коши (1.12)-(1.14) такое, что

$$\left\|\sqrt{\alpha_\mu}\,\chi^\varepsilon\left|\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right| + \sqrt{\alpha_\lambda}(1-\chi^\varepsilon)\left|\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right|\right\|_{2,\Omega} \le C\,F^2, \tag{16}$$

$$\left\|\left|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right| + (1-\xi)\alpha_{\lambda^*}\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right\|_{2,\mathbb{R}^3} + \|p^\varepsilon\|_{2,\mathbb{R}^3} \le C\,F^2, \tag{17}$$

где постоянная C не зависит от ε и $t \in (0,T)$.

$$\left\| (1-\xi)\alpha_{\lambda^*}\mathbb{D}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t}(t)\right)\right\|_{2,\,B(N)} + \|p^{\varepsilon,N}\|_{2,\,B(N)} \leq C\,F^2, \tag{25}$$

где постоянная C не зависит от ε, N и $t\in(0,T)$. Продолжая функции $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon,N},\,p^{\varepsilon,N}\}$ нулем вне области $B(N)$ можно считать, что эти функции определены всюду в $\mathbb{R}^3$ и для них выполнены оценки

$$\left\| \left|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t^2}(t)\right| + \sqrt{\alpha_\mu}\chi^\varepsilon \left|\mathbb{D}(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t}(t))\right| + \sqrt{\alpha_\lambda}(1-\chi^\varepsilon)\left|\mathbb{D}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t}(t)\right)\right|\right\|_{2,\mathbb{R}^3} \leq C\,F^2, \tag{26}$$

$$\left\| (1-\xi)\alpha_{\lambda^*}\mathbb{D}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t}(t)\right)\right\|_{2,\,B(N)} + \|p^{\varepsilon,N}\|_{2,\mathbb{R}^3} \leq C\,F^2, \tag{27}$$

Далее воспользуемся стандартным диагональным процессом. Для $k=1,2,\ldots$ пусть $N_{k,j}$, $j=1,2,\ldots$ есть подпоследовательность последовательности $N_{k-1,j}$, $j=1,2,\ldots$, такая, что последовательность $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon,N_{k,j}},\,j=1,2,\ldots\}$ сходится слабо в $L^2\left(B(N_k)\times(0,T)\right)$ (при этом считаем, что последовательность $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon,N_{1,j}},\,j=1,2,\ldots\}$ сходится слабо в $L^2\left(B(N_1)\times(0,T)\right)$). Очевидно, что последовательность $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon,N_{k,k}},\,k=1,2,\ldots\}$ слабо сходится в $L^2\left(B(N)\times(0,T)\right)$, $N=1,2,\ldots$ к функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$, являющейся искомым решением задачи Коши (1.12) – (1.14).

4. Доказательство Теоремы 2

Первое утверждение теоремы есть результат работы [3]. Первая часть второго утверждения теоремы следует из результатов [4] и [2]. Наконец, доказательство второй части второго утверждения можно найти в [1].

5. Доказательство Теоремы 3

Доказательство теоремы стандартное и состоит в выводе макроскопических и микроскопических уравнений. Первое макроскопическое уравнение имеет вид

$$\tilde{\rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div}_x\bar{\mathbb{P}} + \tilde{\rho}\,\boldsymbol{F}, \tag{28}$$

где

$$\bar{\mathbb{P}} = (1-\xi)\,(\lambda_0^*\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) - p\,\mathbb{I}) + \xi\,\bar{\mathbb{P}}_s, \tag{29}$$

$$\bar{\mathbb{P}}_s = \lambda_0\left((1-m)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) + \langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}\right) - p\,\mathbb{I},$$

$$\tilde{\rho} = (1-\xi)\rho^* + \xi\hat{\rho}, \quad \hat{\rho} = m\rho_f + (1-m)\rho_s,$$

получается из интегрального тождества (15) после подстановки пробных функций вида $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ и предельного перехода при $\varepsilon\searrow 0$. Второе макроскопическое уравнение имеет вид

$$\frac{\xi}{c_f}p_f + \frac{\xi}{c_s}p_s + \frac{(1-\xi)}{c^*}p + \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \quad \xi\,p = \xi\,(p_f+p_s). \tag{30}$$

Оно получается из уравнения неразрывности (14), переписанного в виде интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T}\left(\frac{1}{\alpha_p}p^{\varepsilon}\psi-\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi\right)dxdt=0\,, \tag{31}$$

после предельного перехода при $\varepsilon\searrow 0$ с функциями ψ вида $\psi=\psi(\boldsymbol{x},t)$.

Первое микроскопическое уравнение имеет вид

$$\mathrm{div}_y\,\left((1-\chi)\lambda_0\left(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})+\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\right)-P\,\mathbb{I}\right)=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad \boldsymbol{y}\in Y\,. \tag{32}$$

Оно получается из интегрального тождества (2.1)после подстановки пробных функций вида $\boldsymbol{\varphi}=\varepsilon h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\mathrm{supp}\,h\in\Omega$ и предельного перехода при $\varepsilon\searrow 0$.

Второе микроскопическое уравнение имеет вид

$$(1-\chi)\left(\frac{1}{c_s}P+\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}+\mathrm{div}_{\,y}\,\boldsymbol{U}\right)=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad \boldsymbol{y}\in Y\,, \tag{33}$$

и получается из уравнения неразрывности (1.14) после его умножения на $\xi\,(1-\chi^{\varepsilon})$ и двухмасштабного предельного перехода при $\varepsilon\searrow 0$.

Далее необходимо решить систему (32), (33), определить величины $\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}$ и p_s через величины $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})$, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$ и p_f и подставить найденные выражения в макроскопические уравнения (28) и (30), что и приведет в итоге к требуемым усредненным уравнениям:

$$\tilde{\rho}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=\mathrm{div}_x\,\tilde{\mathbb{P}}+\tilde{\rho}\,\boldsymbol{F}\,,$$

где

$$\tilde{\mathbb{P}}=(1-\xi)\,\left(\lambda_0^{*}\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})-p\,\mathbb{I}\right)+\xi\,\tilde{\mathbb{P}}_s\,,$$

а тензор $\tilde{\mathbb{P}}_s$ есть тензор $\mathbb{P}_s$, в котором величины $\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}$ и p_s выражены через величины $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})$, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$ и p_f. Для этого перепишем уравнения (32), (33) в виде

$$\mathrm{div}_y\,\left((1-\chi)\lambda_0\left(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})+\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\right)-(1-\chi)\left(P_s-\frac{p_f}{m}\right)\mathbb{I}\right)=0\,,$$

$$(1-\chi)\left(\frac{1}{c_s}\left(P_s-\frac{p_f}{m}\right)+\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}+\frac{p_f}{m\,c_s}+\mathrm{div}_{\,y}\,\boldsymbol{U}\right)=0\,,$$

и положим

$$\boldsymbol{U}=\sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{U}^{(ij)}(\boldsymbol{y})D_{ij}+\boldsymbol{U}^{(0)}(\boldsymbol{y})\beta\,,$$

$$P_s-\frac{p_f}{m}=\sum_{i,j=1}^{3}P^{(ij)}(\boldsymbol{y})D_{ij}+P^{(0)}(\boldsymbol{y})\beta\,,$$

где

$$D_{ij}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\right),\quad \boldsymbol{u}=(u_1,\,u_2,\,u_3),$$

$$\beta=\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}+\frac{p_f}{m\,c_s}\,.$$

Функции $\boldsymbol{U}^{(ij)}$, $P^{(ij)}$, $\boldsymbol{U}^{(0)}$ и $P^{(0)}$ определяются из следующих периодических краевых задач на элементарной ячейке Y:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div}_y\Big((1-\chi)\left(\lambda_0\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{(ij)})+\lambda_0\mathbb{J}^{ij}-P^{(ij)}\mathbb{I}\right)\Big)=0, \\ (1-\chi)\left(\dfrac{1}{c_s}P^{(ij)}+\operatorname{div}_y\boldsymbol{U}^{(ij)}\right)=0; \end{array}\right\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div}_y\Big((1-\chi)\left(\lambda_0\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{(0)})-P^{(0)}\mathbb{I}\right)\Big)=0, \\ (1-\chi)\left(\dfrac{1}{c_s}P^{(0)}+\operatorname{div}_y\boldsymbol{U}^{(0)}+1\right)=0\,, \end{array}\right\} \tag{35}$$

где $\mathbb{J}^{ij}$ – симметричная матрица 3×3 (тензор второго порядка), у которой по диагонали стоят единицы, при $i\neq j$ на пересечении i-й строки и j-го столбца и на пересечении j – той строки и i-го столбца стоит $1/2$, а на остальных местах – нули.

В силу геометрии порового пространства ($\chi(\boldsymbol{y})=\chi(y_1)$), решения систем (34) и (35) зависят только от переменной y_1. Поэтому эти системы примут вид

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dy_1}\left((1-\chi)\left(\lambda_0\left(\dfrac{dU_1^{(ij)}}{dy_1}+J_{11}^{(ij)}\right)+c_s\dfrac{dU_1^{(ij)}}{dy_1}\right)\right)=0\,, \\ \dfrac{d}{dy_1}\left((1-\chi)\left(\dfrac{dU_2^{(ij)}}{dy_1}+J_{21}^{(ij)}\right)\right)=0\,, \\ \dfrac{d}{dy_1}\left((1-\chi)\left(\dfrac{dU_3^{(ij)}}{dy_1}+J_{31}^{(ij)}\right)\right)=0\,, \end{array}\right\} \tag{36}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dy_1}\left((1-\chi)\left(\lambda_0\dfrac{dU_1^{(0)}}{dy_1}+c_s\dfrac{dU_1^{(0)}}{dy_1}+c_s\right)\right)=0\,, \\ \dfrac{d}{dy_1}\left((1-\chi)\,\dfrac{dU_2^{(0)}}{dy_1}\right)=0\,, \\ \dfrac{d}{dy_1}\left((1-\chi)\,\dfrac{dU_3^{(0)}}{dy_1}\right)=0\,. \end{array}\right\} \tag{37}$$

Единственными решениями этих систем будут функции

$$(1-\chi)\frac{d\,\boldsymbol{U}^{(11)}}{dy_1}=(1-\chi)\left(-\frac{\lambda_0}{\lambda_0+c_s},0,0\right)\,,\quad (1-\chi)P^{(11)}=(1-\chi)\frac{\lambda_0\,c_s}{\lambda_0+c_s}\,,$$

$$(1-\chi)\frac{d\,\boldsymbol{U}^{(12)}}{dy_1}=(1-\chi)\frac{d\,\boldsymbol{U}^{(21)}}{dy_1}=(1-\chi)\left(0,-\frac{1}{2},0\right)\,,$$

$$(1-\chi)P^{(12)}=(1-\chi)P^{(21)}=0\,,$$

$$(1-\chi)\frac{d\boldsymbol{U}^{(13)}}{dy_1} = (1-\chi)\frac{d\boldsymbol{U}^{(31)}}{dy_1} = (1-\chi)\left(0,0,-\frac{1}{2}\right),$$
$$(1-\chi)P^{(13)} = (1-\chi)P^{(31)} = 0,$$

$$(1-\chi)\boldsymbol{U}^{(22)} = (1-\chi)\boldsymbol{U}^{(33)} = 0, \quad (1-\chi)P^{(22)} = (1-\chi)P^{(33)} = 0,$$

$$(1-\chi)\frac{d\boldsymbol{U}^{(0)}}{dy_1} = (1-\chi)\Big(-\frac{c_s}{\lambda_0+c_s},0,0\Big), \qquad (1-\chi)P^{(0)} = -(1-\chi)\frac{\lambda_0\, c_s}{\lambda_0+c_s}.$$

Таким образом,

$$\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s} = \beta\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{(0)})\rangle_{Y_s} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{(11)})\rangle_{Y_s} +$$
$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{(12)})\rangle_{Y_s} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{(13)})\rangle_{Y_s} =$$
$$(1-m)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0+c_s} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{(1-m)}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} +$$
$$+\frac{(1-m)}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} + (1-m)\beta\begin{pmatrix} -\dfrac{c_s}{\lambda_0+c_s} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} =$$

$$-\frac{(1-m)}{4}\begin{pmatrix} \dfrac{4\lambda_0}{(\lambda_0+c_s)}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\\ \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & 0 & 0\\ \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & 0 & 0\end{pmatrix} +$$
$$+(1-m)\beta\begin{pmatrix} -\dfrac{c_s}{\lambda_0+c_s} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$p_s - \frac{(1-m)}{m}p_f = \left\langle P_s - \frac{p_f}{m}\right\rangle_{Y_s} = \sum_{i,j=1}^{3}\langle P^{(ij)}\rangle_{Y_s}D_{ij} + \langle P^{(0)}\rangle_{Y_s}\beta =$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\langle P^{(11)}\rangle_{Y_s} + \langle P^{(0)}\rangle_{Y_s}\beta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(1-m)\frac{\lambda_0\, c_s}{(\lambda_0 + c_s)} - \beta(1-m)\frac{\lambda_0\, c_s}{(\lambda_0 + c_s)} =$$

$$-(1-m)\frac{\lambda_0\, c_s}{(\lambda_0 + c_s)}\operatorname{div}' \boldsymbol{u} - \frac{\lambda_0(1-m)}{(\lambda_0 + c_s)m}\, p_f\,,$$

Следовательно,

$$p_s = -(1-m)\frac{\lambda_0\, c_s}{(\lambda_0 + c_s)}\operatorname{div}' \boldsymbol{u} + \frac{c_s(1-m)}{(\lambda_0 + c_s)m}\, p_f\,, \tag{38}$$

$$p = p_s + p_f = -(1-m)\frac{\lambda_0\, c_s}{(\lambda_0 + c_s)}\operatorname{div}' \boldsymbol{u} + \frac{c_s + m\lambda_0}{(\lambda_0 + c_s)m}\, p_f\,, \tag{39}$$

где

$$\operatorname{div}' \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\,.$$

Собирая все вычисленные слагаемые вместе, получим

$$\tilde{\mathbb{P}}_s = \lambda_0\left((1-m)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) + \langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}\right) - p\,\mathbb{I} = \tag{40}$$

$$\lambda_0(1-m)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{(1-m)\,\lambda_0\, c_s}{(\lambda_0 + c_s)m}\, p_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - p\,\mathbb{I}\,.$$

Литература

1. Мейрманов А.М. Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. матем. журнал. – 2007. – 48,3. – С.645-667.

2. Meirmanov A. A description of acoustic seismic wave propagation in elastic porous media via homogenizaton // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – 40,3. – P.1272-1289.

3. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // J. math. pures et appl. – 1985. – 64. – P.31-75.

4. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – 20,3. – P.608-623.

DERIVATION OF ACOUSTIC EQUATIONS IN POROUS STRATIFIED MEDIA FOR THE ONE-VELOCITY CONTINUUM

I.V. Danilets, A.M. Meirmanov

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

Abstract. The mathematical microscopic model of the acoustic wave propagation in porous media with special geometry of porous space is biult. Correct solvability of the Cauchy problem for the microscopic model is proved and, on the basis on it, the rigorous derivation of averaged equations is given.

Key words: Stock's equations and Lame's equations, twin-scale convergence, acoustic equations.