УДК 517.968

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В ВЕСОВЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С.Н. Асхабов

Чеченский государственный университет,
ул. Киевская, 33, 364037, г. Грозный, Россия, e-mail: askhabov@yandex.ru

Аннотация. Методом монотонных операторов доказываются теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала в весовых комплексных пространствах Лебега. Получены также оценки норм решений.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, операторы типа потенциала, весовые пространства Лебега, метод монотонных операторов.

1 Введение

В работе рассматриваются различные классы нелинейных уравнений, содержащих операторы вида

$$(B^\alpha u)(x) = \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(t)\, u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}}, \quad 0<\alpha<1,$$

где $\Gamma(\alpha)$ есть гамма-функция Эйлера, а заданная комплекснозначная функция $b(x) \neq 0$ почти всюду на $\mathbf{R}^1 = (-\infty, \infty)$. Получены нелокальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений в комплексных пространствах $L_p(\rho)$ с общим весом $\rho(x)$, $1<p<\infty$, а также оценки норм решений. В основе исследования лежит метод монотонных (по Браудеру-Минти) операторов и некоторые его модификации, связанные, в частности, с комбинированием его с принципом сжимающих отображений. При этом существенно используется найденное в работе условие на функцию $b(x)$, обеспечивающее непрерывное действие оператора B^α из $L_p(\rho)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(\rho^{1-p'})$, $p'=p/(p-1)$, и его положительность:

$$\mathrm{Re}\langle B^\alpha u, u\rangle = \mathrm{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(t)\, u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}} \right) \overline{u(x)} dx \ge 0, \quad \forall u(x) \in L_p(\rho).$$

В связи с результатами данной статьи отметим работы К.Ф. Андерсена, Э.Т. Сойера [1] и Д.В. Прохорова, В.Д. Степанова [2], где в *вещественных* пространствах $L_p(0,\infty)$ рассмотрены, соответственно, весовые операторы Римана-Лиувилля вида:

$$(B^\alpha_{0+} u)(x) = \frac{b(x)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{b(t)\, u(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (R^\alpha u)(x) = \frac{b_1(x)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{b_2(t)\, u(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

при условии, что $0 < \alpha < 1/p$ и $1 < p < q = p/(1 - \alpha \cdot p)$. В [1] доказано, что если $b(x)$ есть почти всюду положительная локально суммируемая на полуоси $[0, \infty)$ функция, то оператор B_{0+}^{α} действует непрерывно из $L_p(0, \infty)$ в $L_q(0, \infty)$, если и только если

$$\sup_{0<h<a} \left(\frac{1}{h} \int\limits_{a}^{a+h} b^q(x)dx \right)^{1/q} \left(\frac{1}{h} \int\limits_{a-h}^{a} b^{p'}(x)dx \right)^{1/p'} < \infty .$$

Тем самым в [1] дано непосредственное обобщение известной теоремы Харди-Литтлвуда, в которой $b(x) = 1$. В статье [2] при условии монотонности одной из функций $b_1(x)$, $b_2(x)$ получены критерии ограниченности и компактности оператора R^{α} как оператора, действующего из $L_p(0, \infty)$ в $L_q(0, \infty)$. В монографии [3], в связи с приложениями к интегральным уравнениям с монотонными нелинейностями, найдено условие на функцию $b(x)$ при котором оператор B_{0+}^{α} действует непрерывно из $L_p(0, \infty)$ в $L_{p'}(0, \infty)$ (в частности, из $L_2(0, \infty)$ в $L_2(0, \infty)$) и, что особенно важно, обладает свойством положительности. А именно, в [3] доказано, что если $p \in [2, \infty)$ и $b(x) \in L_{2p/[p(1+\alpha)-2]}(0, \infty)$, то оператор B_{0+}^{α} действует непрерывно из $L_p(0, \infty)$ в $L_{p'}(0, \infty)$ и является строго положительным. При этом функция $b(x)$ не обязана быть почти всюду положительной как в [1] (достаточно, чтобы она была почти всюду отлична от нуля). Кроме того, если в [1] взять $p < q = p'$, то получим, что $p = 2/(1 + \alpha) \in (1, 2)$, тогда как в [3] $p \in [2, \infty)$ и можно брать $p = p' = 2$. В [3] также доказано, что если $p \in [2, \infty)$ и $b_1(x), b_2(x) \in L_{2p/[p(1+\alpha)-2]}(0, \infty)$, то оператор R^{α} действует непрерывно из $L_p(0, \infty)$ в $L_{p'}(0, \infty)$. Следует отметить, что в статье Д.В. Прохорова, В.Д. Степанова [2] получен критерий существования в "малом" решения уравнения

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{x} \frac{u^p(t)\, dt}{(x - t)^{1-\alpha}} + \varepsilon \cdot f(x)\,,\ x \in (0, a)\,,\ a, \varepsilon \in (0, \infty)\,,$$

со степенной нелинейностью в классе *неотрицательных* почти всюду конечных на полуоси функций. В данной работе разыскиваются решения других уравнений с монотонными (не обязательно степенными) нелинейностями в *комплексных* весовых пространствах Лебега.

2 Условия положительности операторов с ядрами типа потенциала

Рассмотрим сначала вопрос о положительности оператора типа потенциала

$$(I^{\alpha}u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)\, dt}{|x - t|^{1-\alpha}}\,,\ 0 < \alpha < 1\,,\ x \in \mathbf{R}^1,$$

в *комплексном* пространстве $L_p(\mathbf{R}^1)$. Обозначим через $C_0^{\infty}(\mathbf{R}^1)$ множество всех бесконечнодифференцируемых финитных на оси $\mathbf{R}^1$ функций.

Лемма 1 *Оператор I^{α} действует из $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R}^1)$ в сопряженное с ним пространство $L_{2/(1-\alpha)}(\mathbf{R}^1)$ и является непрерывным, симметрическим и строго положительным.*

Доказательство. То, что оператор $I^\alpha : L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R}^1) \to L_{2/(1-\alpha)}(\mathbf{R}^1)$ и непрерывен вытекает из теоремы Харди-Литтлвуда (см. следствие 3.1 в [3]). Докажем, что оператор I^α является положительным в $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R}^1)$, т.е. что

$$\mathrm{Re}\,\langle I^\alpha u, u\rangle = \mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}\right)\cdot\overline{u(x)}\,dx \geq 0,\ \forall u(x)\in L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R}^1)\,. \tag{1}$$

Для этого воспользуемся известной формулой для гамма-функции Эйлера:

$$\Gamma(z)\cdot\cos\frac{\pi\cdot z}{2} = \int\limits_0^\infty t^{z-1}\cos t\,dt\,, \qquad 0 < Re\,z < 1\,. \tag{2}$$

Далее будем придерживаться схемы доказательства теоремы 1.3.1 А.М. Нахушева [4], в которой рассмотрен оператор типа потенциала I^α_{ab} на конечном отрезке $[a,b]$. Сделаем сначала в (2) подстановку $t = \xi\cdot\eta$, где $\xi > 0$ - любое число, и затем положим $\xi = |x-t|$ и $z = 1-\alpha$. В результате получим

$$\Gamma(1-\alpha)\cdot\sin\frac{\pi\cdot\alpha}{2}\cdot|x-t|^{\alpha-1} = \int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha}\cos\left[\eta\cdot(x-t)\right]d\eta\,. \tag{3}$$

Пусть $u(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$ произвольная функция. В силу равенства (3) имеем

$$\Gamma(1-\alpha)\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\sin\frac{\pi\cdot\alpha}{2}\cdot\langle I^\alpha u, u\rangle =$$

$$= \Gamma(1-\alpha)\cdot\sin\frac{\pi\cdot\alpha}{2}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}\right)\overline{u(x)}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha}cos\left[\eta\,(x-t)\right]d\eta\right]u(t)\,dt\right)\overline{u(x)}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(t)\cdot cos\left[\eta\,(x-t)\right]dt\right)\overline{u(x)}\,dx\right]\frac{d\eta}{\eta^\alpha} =$$

$$= \int\limits_0^\infty\left(\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(\eta\,t)\cdot u(t)\,dt\right|^2 + \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin(\eta\,t)\cdot u(t)\,dt\right|^2\right)\frac{d\eta}{\eta^\alpha}. \tag{4}$$

Поскольку $\Gamma(1-\alpha)\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\sin(\pi\,\alpha/2) > 0$ при $0<\alpha<1$, то из (4) следует, что $\langle I^\alpha u, u\rangle \geq 0$, $\forall u(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$. Так как класс $C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$ плотен в $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R}^1)$, то на основании теоремы Банаха (см., например, теорему 1.7 из [5]) получаем:

$$\langle I^\alpha u, u\rangle \geq 0,\ \forall u(x)\in L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R}^1)\,, \tag{5}$$

т.е. оператор I^α является положительным в $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R}^1)$.

То, что оператор I^α является симметрическим сразу вытекает из четности его ядра $|x|^{\alpha-1}$.

Докажем, наконец, что оператор I^α является строго положительным в комплексном пространстве $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$, т.е. что знак равенства в (5) достигается лишь на функции $u(x)=0$ (заметим, что здесь схема доказательства из [4] не применима). Для этого, в силу плотности $C_0^\infty(\mathbf{R^1})$ в $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$, достаточно рассмотреть функции из $C_0^\infty(\mathbf{R^1})$. Итак, пусть $\langle I^\alpha u, u\rangle = 0$ и $u(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R^1})$. Тогда, в силу равенства (4), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot\cos(\eta t)\,dt = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot\sin(\eta t)\,dt = 0$$

для любого $\eta \ge 0$, а, значит, и для любого $\eta\in\mathbf{R}^1$. Поэтому

$$\widehat{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot e^{-ixt}dt = 0\,, \quad \forall x\in\mathbf{R}^1. \tag{6}$$

Согласно теореме 1.9 из [6], для всех $x\in\mathbf{R^1}$ справедливо равенство

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N}\left(1-\frac{|t|}{N}\right)\widehat{u}(t)\,e^{ixt}dt\ .$$

Но тогда, в силу равенства (6), $u(x)=0$ - что и требовалось доказать.

Замечание 1. Как видно из доказательства леммы 1, символ Re всюду в неравенстве (1) можно *опустить*. Этого и следовало ожидать, поскольку хорошо известно, что скалярное произведение (Ax,x) *вещественно* для любого элемента x из *комплексного* гильбертова пространства H, если A является линейным ограниченным самосопряженным оператором, действующим из H в H.

Пусть $\rho(x)$ есть произвольная неотрицательная почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля на $\mathbf{R}^1$ функция. Обозначим через $L_p(\rho)$, $p>1$, множество всех измеримых по Лебегу на $\mathbf{R}^1$ функций $u(x)$ с конечной нормой

$$||u||_{p,1} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\cdot|u(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Известно [7], что $L_p(\rho)$ есть *рефлексивное банахово* пространство и *сопряженным* с ним является $L_{p'}(\rho^{1-p'})$, $p'=p/(p-1)$. Будем писать $u(x)\in L_p^+(\rho)$, если $u(x)\in L_p(\rho)$ и $u(x)$ является неотрицательной на $\mathbf{R}^1$ функцией. Обозначим через $\|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)}$ норму оператора I^α действующего непрерывно, согласно лемме 1, из $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$ в $L_{2/(1-\alpha)}(\mathbf{R^1})$, а через $\|\cdot\|_{p,q}$ - норму в пространстве $L_p(\rho^q)$. Если $\rho(x)=1$, то будем писать $L_p(\mathbf{R^1})$ и $\|\cdot\|_{p,0}=\|\cdot\|_p$.

Лемма 2 *Пусть* $2\le p<\infty$, $r=2/[p\,(1+\alpha)-2]$ *и функция* $b(x)\in L_{p\cdot r}(\rho^{-r})$. *Тогда оператор* B^α *действует непрерывно из* $L_p(\rho)$ *в сопряженное с ним пространство* $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ *и* *является строго положительным симметрическим оператором, причем* $\forall u(x) \in L_p(\rho)$ *выполняются неравенства*

$$||B^\alpha u||_{p',1-p'} \le \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||u||_{p,1} \quad \text{и} \quad \langle B^\alpha u, u\rangle \ge 0\ . \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $u \in L_p(\rho)$. Тогда

$$||b\,u||_{2/(1+\alpha)} \le ||b||_{p\cdot r,-r} \cdot ||u||_{p,1}\ . \tag{8}$$

В силу леммы 1 и неравенства (8), $I^\alpha(b\,u) \in L_{2/(1-\alpha)}(\mathbf{R}^1)$ и

$$||I^\alpha(b\,u)||_{2/(1-\alpha)} \le \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||_{p\cdot r,-r} \cdot ||u||_{p,1}\,, \quad \forall u \in L_p(\rho)\ . \tag{9}$$

Аналогично, имеем:

$$||B^\alpha u||_{p',1-p'} = \|\overline{b}\,I^\alpha(b\,u)\|_{p',1-p'} \le ||b||_{p\cdot r,-r} \cdot ||I^\alpha(b\,u)||_{2/(1-\alpha)}\ . \tag{10}$$

Из (10) и (9) непосредственно вытекает первое неравенство из (7). Значит, оператор B^α действует непрерывно из $L_p(\rho)$ в $L_{p'}(\rho^{1-p'})$. Далее, замечая, что $b \cdot u \in L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R}^1)$ и $\langle B^\alpha u, u\rangle = \langle I^\alpha(b\,u), b\,u\rangle$, на основании леммы 1 получаем, что оператор B^α является строго положительным. Наконец, используя симметричность оператора I^α, для любых $u, v \in L_p(\rho)$ имеем

$$\langle B^\alpha u, v\rangle = \langle I^\alpha(b\,u), b\,v\rangle = \langle b\,u, I^\alpha(b\,v)\rangle = \langle u, b\,I^\alpha(b\,v)\rangle = \langle u, B^\alpha v\rangle\ ,$$

т.е. B^α является симметрическим оператором.

Лемма 3 *Пусть* $1 < p \le 2$ *и* $b(x) \in L_{p\cdot q}(\rho^q)$, *где* $q = 2/[2 - p\,(1-\alpha)]$. *Тогда оператор* B^α *действует из* $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ *в* $L_p(\rho)$, *непрерывен, строго положителен и симметричен, причем* $\forall v \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$ *выполняются неравенства*

$$||B^\alpha v||_{p,1} \le \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot q,q} \cdot ||v||_{p',1-p'} \quad \text{и} \quad \langle B^\alpha v, v\rangle \ge 0\ . \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $v \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$. Тогда

$$||b\,v||_{2/(1+\alpha)} \le ||b||_{p\cdot q,q} \cdot ||v||_{p',1-p'}\ . \tag{12}$$

В силу леммы 1 и неравенства (12), $I^\alpha(b\,v) \in L_{2/(1-\alpha)}(\mathbf{R}^1)$ и

$$||I^\alpha(b\,v)||_{2/(1-\alpha)} \le \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||_{p\cdot q,q} \cdot ||v||_{p',1-p'}\,. \tag{13}$$

Аналогично,

$$||B^\alpha v||_{p,1} \le ||b||_{p\cdot q,q} \cdot ||I^\alpha(b\,v)||_{2/(1-\alpha)}\ . \tag{14}$$

Из (14) и (13) непосредственно вытекает первое неравенство из (11). Значит, оператор B^α действует непрерывно из $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ в $L_p(\rho)$. Далее, замечая, что $b \cdot v \in L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R}^1)$ и $\langle B^\alpha v, v\rangle = \langle I^\alpha(b\,v), b\,v\rangle$, на основании леммы 1 получаем, что оператор B^α является строго положительным. Наконец, используя симметричность оператора I^α, для любых $u, v \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$ имеем

$$\langle B^\alpha u, v\rangle = \langle I^\alpha(b\,u), b\,v\rangle = \langle b\,u, I^\alpha(b\,v)\rangle = \langle u, b\,I^\alpha(b\,v)\rangle = \langle u, B^\alpha v\rangle\ ,$$

т.е. B^α является симметрическим оператором.

Следствие 1. *Если* $b(x) \in L_{2/\alpha}(\mathbf{R}^1)$, *то оператор* B^α *действует из* $L_2(\mathbf{R}^1)$ *в* $L_2(\mathbf{R}^1)$, *ограничен, строго положителен и симметричен, причем*

$$||B^\alpha u||_2 \le \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{2/\alpha} \cdot ||u||_2 \quad \text{и} \quad (B^\alpha u, u) \ge 0\,, \quad \forall u \in L_2(\mathbf{R}^1)\,. \tag{15}$$

3 Теоремы существования и единственности решения. Оценки норм решений

Обозначим через $\mathbf{C}$ множество всех комплексных чисел. Выпишем для удобства ссылок все ограничения, накладываемые ниже на комплекснозначную функцию $F(x,z) : \mathbf{R}^1 \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, удовлетворяющую *условиям Каратеодори* [3] и определяющую нелинейность исследуемых в этом параграфе нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала. Именно, в зависимости от рассматриваемого класса нелинейных уравнений, будем накладывать на нелинейность $F(x,z)$ либо условия **1)-3)**, либо условия **4)-6)**:

1) *существуют* $c(x) \in L^+_{p'}(\rho^{1-p'})$ *и* $d_1 > 0$ *такие,что для почти всех* $x \in \mathbf{R}^1$ *и любого* $z \in \mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$|F(x,z)| \le c(x) + d_1 \cdot \rho(x) \cdot |z|^{p-1}$.

2) *для почти всех* $x \in \mathbf{R}^1$ *и всех* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$Re\left\{[F(x,z_1) - F(x,z_2)] \cdot \overline{[z_1 - z_2]}\right\} \ge 0.$

3) *существуют* $D(x) \in L^+_1(\mathbf{R}^1)$ *и* $d_2 > 0$ *такие, что для почти всех* $x \in \mathbf{R}^1$ *и всех* $z \in \mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$Re\,\{F(x,z) \cdot \overline{z}\} \ge d_2 \cdot \rho(x) \cdot |z|^p - D(x).$

4) *существуют* $g(x) \in L_p(\rho)$ *и* $d_3 > 0$ *такие,что для почти всех* $x \in \mathbf{R}^1$ *и любого* $z \in \mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$|F(x,z)| \le g(x) + d_3 \cdot \left([\rho(x)]^{-1} \cdot |z|\right)^{1/(p-1)}.$

5) *для почти всех* $x \in \mathbf{R}^1$ *и всех* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$Re\left\{[F(x,z_1) - F(x,z_2)] \cdot \overline{[z_1 - z_2]}\right\} > 0.$

6) *существуют* $D(x) \in L^+_1(\mathbf{R}^1)$ *и* $d_4 > 0$ *такие, что для почти всех* $x \in \mathbf{R}^1$ *и всех* $z \in \mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$Re\,\{F(x,z) \cdot \overline{z}\} \ge d_4 \cdot \left([\rho(x)]^{-1} \cdot |z|\right)^{1/(p-1)} \cdot |z| - D(x).$

Замечание 2. Если выполнены условия 1)-3), то оператор Немыцкого F, порожденный функцией $F(x,z)$, действует из $L_p(\rho)$ в $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ и является непрерывным, монотонным и коэрцитивным. Если же выполнены условия 4)-6), то оператор F действует из $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ в $L_p(\rho)$ и является непрерывным, строго монотонным и коэрцитивным оператором (см., например, теоремы 2.1, 2.2 и лемму 2.1 в [3]).

Доказательство следующей теоремы основано на теореме Браудера-Минти (см., например, теорему 1.8 в [3]).

Теорема 1 *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $2 \le p < \infty$ *и* $b(x) \in L_{p \cdot r}(\rho^{-r})$, *где* $r = 2/[p\,(1+\alpha) - 2]$. *Если выполнены условия 1)-3), то уравнение*

$$F[x, u(x)] + \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s)\, u(s)\, ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{16}$$

имеет решение $u^*(x) \in L_p(\rho)$ *при любом* $f(x) \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$. *Решение единственно, если* $b(x) \ne 0$ *почти всюду на* $\mathbf{R}^1$. *Кроме того, если условие 3) выполнено при* $D(x) = 0$, *то* $\|u^*\|_{p,1} \le \left(d_2^{-1}\, \|f\|_{p',1-p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Доказательство. Запишем данное уравнение (16) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = Fu + B^{\alpha}u$. Из условий 1)-3) (см. замечание 2) вытекает, что оператор суперпозиции $F : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$ непрерывен, монотонен и коэрцитивен. В силу леммы 2 оператор $B^{\alpha} : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$ непрерывен и строго положителен. Следовательно оператор $A : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, по теореме Браудера-Минти, уравнение $Au = f$, а с ним и данное уравнение (16), имеет единственное решение $u^* \in L_p(\rho)$.

Осталось доказать оценку нормы решения. Так как $Au^* = f$, то используя условие 3) при $D(x) = 0$ и второе неравенство из (7), имеем

$$d_2 \cdot ||u^*||^p_{p,\rho} \le \mathrm{Re}\langle Fu^*, u^*\rangle \le \mathrm{Re}\langle Fu^*, u^*\rangle + \langle B^{\alpha}u^*, u^*\rangle = \mathrm{Re}\langle f, u^*\rangle \le ||f||_{p',\sigma} \cdot ||u^*||_{p,\rho} ,$$

откуда легко получаем доказываемую оценку.

В следующей теореме $p < 2$ и α имеет специальный вид.

Теорема 2 *Пусть* $1 < p < 2$ *и нелинейность* $F(x, z)$ *удовлетворяет условиям 1)-3) при* $\rho(x) = 1$. *Тогда уравнение*

$$F[x, u(x)] + \lambda \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{|x-s|^{2(p-1)/p}}\, ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\mathbf{R}^1)$ *при любом* $\lambda > 0$ *и любом* $f(x) \in L_{p'}(\mathbf{R}^1)$. *Кроме того, если условие 3) выполняется при* $D(x) = 0$ *и* $\rho(x) = 1$, *то справедлива оценка* $||u^*||_p \le \left(d_2^{-1} \cdot ||f||_{p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Доказательство теоремы 2 проводится точно так же, как и в теореме 1, с использованием следствия 3.2 [3] вместо леммы 1.

Положив $p = 4/3$ в теореме 2, получим следующее

Следствие 2. *При любом* $\lambda > 0$ *и любом* $f(x) \in L_4(\mathbf{R}^1)$ *уравнение*

$$\sqrt[3]{u(x)} + \lambda \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{\sqrt{|s-x|}}\, ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{4/3}(\mathbf{R}^1)$, *причем* $||u^*||_{4/3} \le ||f||^3_4$.

Рассмотрим теперь другой класс нелинейных уравнений типа потенциала, соответствующий случаю когда нелинейность находится под знаком интеграла. В данном случае применить непосредственно теорему Браудера-Минти нельзя, поскольку произведение монотонных операторов не является, вообще говоря, монотонным оператором и поэтому требуется другой подход к исследованию таких классов уравнений.

Теорема 3 *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $1 < p \le 2$ *и* $b(x) \in L_{p \cdot q}(\rho^q)$, $q = 2/[2 - p(1-\alpha)]$. *Если* $F(x, z)$ *удовлетворяет условиям 1), 3) и 5), то уравнение*

$$u(x) + \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s)\, F[s, u(s)]}{|x-s|^{1-\alpha}}\, ds = f(x) \qquad (17)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\rho)$ *при любом* $f(x) \in L_p(\rho)$. *Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при* $c(x) = D(x) = 0$, *то* $||u^*||_{p,1} \le d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot ||f||_{p,1}$.

Доказательство. В силу замечания 2 оператор F отображает $L_p(\rho)$ на $L_{p'}(\rho^{1-p'})$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, по лемме 2.1 [3], существует обратный оператор F^{-1}, отображающий $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ на $L_p(\rho)$, хеминепрерывный, строго монотонный и коэрцитивный. Поэтому, с учетом леммы 3, имеем, что оператор $A = F^{-1} + B^\alpha$ удовлетворяет условиям теоремы Браудера-Минти. Значит, уравнение $F^{-1}v + B^\alpha v = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$. Но тогда $u^* = F^{-1}v^* \in L_p(\rho)$ является решением уравнения $u + B^\alpha F u = f$, т.е. данного уравнения (17). В самом деле, так как $F^{-1}v^* + B^\alpha v^* = f$ и $F\,F^{-1}\psi = \psi, \quad \forall \psi \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$, то

$$u^* + B^\alpha F u^* = F^{-1}v^* + B^\alpha F\,F^{-1}v^* = F^{-1}v^* + B^\alpha v^* = f\ . \tag{18}$$

Докажем единственность решения уравнения (17). В самом деле, если допустить противное, что уравнение (17) имеет два различных решения u_1 и u_2, т.е. $u_1 + B^\alpha F u_1 = f$ и $u_2 + B^\alpha F u_2 = f$, то придем к противоречию:

$$0 = \mathrm{Re}\langle u_1 + B^\alpha F u_1 - u_2 - B^\alpha F u_2, F u_1 - F u_2\rangle =$$

$$= \mathrm{Re}\langle u_1 - u_2, F u_1 - F u_2\rangle + \langle B^\alpha(F u_1 - F u_2), F u_1 - F u_2\rangle > 0$$

так как в силу условия 5) и леммы 3, оба последних слагаемых строго положительны.

Осталось доказать оценку нормы решения. Используя условия 1) и 3) (с учетом, что $c(x) = D(x) = 0$), второе неравенство из (11), равенство (18) и неравенство Гельдера, имеем

$$d_2 \cdot ||u^*||^p_{p,\rho} \le \mathrm{Re}\langle u^*, F u^*\rangle \le \mathrm{Re}\langle f, F u^*\rangle \le d_1 \cdot ||f||_{p,\rho} \cdot ||u^*||^{p-1}_{p,\rho}\ ,$$

откуда легко получаем доказываемую оценку.

В следующей теореме $p > 2$ и α имеет специальный вид.

Теорема 4 *Пусть* $2 < p < \infty$ *и нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям 1), 3) и 5) при* $\rho(x) = 1$. *Тогда уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F[s, u(s)]}{|s - x|^{2/p}}\, ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\mathbf{R}^1)$ *при любом* $\lambda > 0$ *и любом* $f(x) \in L_p(\mathbf{R}^1)$. *Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при* $c(x) = D(x) = 0$, *то справедлива оценка* $\|u^*\|_p \le d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot ||f||_p$.

Доказательство теоремы 4 проводится точно так же как и в теореме 3 с использованием следствия 3.3 [3] вместо леммы 3.

Следствие 3. *При любом* $\lambda > 0$ *и* $f(x) \in L_4(\mathbf{R}^1)$ *уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^3(s)\, ds}{\sqrt{|s - x|}} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_4(\mathbf{R}^1)$, *причем* $||u^*||_4 \le ||f||_4$.

Рассмотрим, наконец, класс нелинейных уравнений, соответствующий случаю когда интегральный оператор с ядром типа потенциала входит в уравнение нелинейно. Обратим внимание на то, что в этом случае ограничения на нелинейность подбираются таким образом, чтобы соответствующий оператор суперпозиции действовал непрерывно из $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ в $L_p(\rho)$ и был строго монотонным и коэрцитивным.

Теорема 5 *Пусть* $2 \le p < \infty$ *и* $b(x) \in L_{p\cdot r}(\rho^{-r})$, *где* $r = 2/[p\,(1+\alpha) - 2]$. *Если нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям 4)-6), то уравнение*

$$u(x) + F\left[x,\ \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s)\,u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}\right] = f(x) \tag{19}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\rho)$ *при любом* $f(x) \in L_p(\rho)$. *Кроме того, если в условиях 4) и 6)* $g(x) = 0$ *и* $D(x) = 0$, *то*

$$||u^* - f||_{p,1} \le \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot ||I^\alpha||_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,\,-r} \cdot ||f||_{p,1}\right]^{1/(p-1)} .$$

Доказательство. Из леммы 2 и условий 4)-6) вытекает, соответственно, что оператор $B^\alpha : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$ непрерывен и строго положителен, а оператор $F : L_{p'}(\rho^{1-p'}) \to L_p(\rho)$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, по лемме 2.1 [3], существует хеминепрерывный, строго монотонный, коэрцитивный обратный оператор $F^{-1} : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$. Запишем уравнение (19) в операторном виде: $u + F\,B^\alpha u = f$. Полагая в нем $u = f - v$ и применяя затем к обеим частям получающегося уравнения оператор F^{-1}, приходим к уравнению:

$$\Phi v = 0\ , \qquad \Phi v \equiv F^{-1} v + B^\alpha v - B^\alpha f\ . \tag{20}$$

Поскольку оператор Φ удовлетворяет всем требованиям теоремы Браудера-Минти, то уравнение (20) имеет единственное решение $v^* \in L_p(\rho)$. Но тогда данное уравнение (19) имеет решение $u^* = f - v^* \in L_p(\rho)$. Покажем, что это решение единственно. Допустим противное, что уравнение (19) имеет два разных решения u_1 и u_2, т.е. $u_1 + FB^\alpha u_1 = f$ и $u_2 + FB^\alpha u_2 = f$. Тогда приходим к противоречию:

$$0 = \mathrm{Re}\langle u_1 + F\,B^\alpha u_1 - u_2 - F\,B^\alpha u_2, B^\alpha u_1 - B^\alpha u_2\rangle =$$

$$= \langle u_1 - u_2, B^\alpha(u_1 - u_2)\rangle + \mathrm{Re}\langle F\,B^\alpha u_1 - F\,B^\alpha u_2, B^\alpha u_1 - B^\alpha u_2\rangle > 0$$

так как, в силу леммы 2 и условия 5), оба последних слагаемых в правой части строго положительны (заметим, что $B^\alpha(u_1 - u_2) \ne 0$, так как если предположить противное, то получим противоречие: $0 = \langle B^\alpha(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle > 0$, в силу леммы 2).

Осталось доказать оценку нормы $\|u^* - f\|_{p,1}$. Воспользуемся доказанными равенствами $u^* + F\,B^\alpha u^* = f$ и $F^{-1}v^* + B^\alpha v^* = B^\alpha f$, где $u^* = f - v^*$. Положим $\psi = F^{-1}v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Используя условия 4) и 6) при $g(x) = D(x) = 0$, оба неравенства из (7) и неравенство Гельдера, имеем

$$d_4\,||\psi||^{p'}_{p',\sigma} \le \mathrm{Re}\langle F\psi, \psi\rangle = \mathrm{Re}\langle v^*, F^{-1}v^*\rangle \le \mathrm{Re}\langle v^*, F^{-1}v^*\rangle + \langle v^*, B^\alpha v^*\rangle \le$$

$$\leq ||v^*||_{p,1} \cdot ||B^\alpha f||_{p',1-p'} \leq ||v^*||_{p,1} \cdot ||I^\alpha||_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,1} =$$

$$= ||I^\alpha||_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,1} \cdot ||F\psi||_{p,1} \leq$$

$$\leq ||I^\alpha||_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,1} \cdot d_3 \cdot ||\psi||^{p'-1}_{p',1-p'} ,$$

откуда

$$||\psi||_{p',1-p'} \leq d_3 \cdot d_4^{-1} \cdot ||I^\alpha||_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,1} . \tag{21}$$

Так как $||f - u^*||_{p,1} = ||v^*||_{p,1} = ||F\psi||_{p,1} \leq d_3 \cdot ||\psi||^{p'-1}_{p',1-p'}$ то, используя оценку (21) с учетом, что $p' - 1 = 1/(p-1)$, получаем

$$||u^* - f||_{p,1} \leq d_3 \cdot \left[d_3 \cdot d_4^{-1} \cdot ||I^\alpha||_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,1} \right]^{1/(p-1)} .$$

Если вместо леммы 2 использовать следствие 3.2 [3], то точно так же как и теорема 5 доказывается следующая теорема.

Теорема 6 *Пусть* $1 < p < 2$ *и нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям 4)-6) при* $\rho(x) = 1$. *Тогда уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot F\left[x, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{|x-s|^{2(p-1)/p}}\, ds\right] = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\mathbf{R}^1)$ *при любом* $\lambda > 0$ *и любом* $f(x) \in L_p(\mathbf{R}^1)$. *Кроме того, если в условиях 4) и 6)* $g(x) = D(x) = 0$ *и* $\rho(x) = 1$, *то справедлива оценка:* $||u^* - f||_p \leq \lambda \cdot \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot ||I^\alpha||_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||f||_p \right]^{1/(p-1)}$.

Следствие 4. *При любом* $\lambda > 0$ *и любом* $f(x) \in L_{4/3}(\mathbf{R}^1)$ *уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)\, ds}{\sqrt{|s-x|}} \right)^3 = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_{4/3}(\mathbf{R}^1)$, *причем* $||u^* - f||_{4/3} \leq \lambda \cdot \left(||I^{1/2}||_{4/3\to 4} \cdot ||f||_{4/3} \right)^3$.

4 Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала

Теоремы 1-6 предоставляют условия существования и единственности решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала, но они не содержат информации о том как можно найти эти решения. Рассмотрим в этой связи вопрос о приближенном их решении в *комплексных* пространствах $L_2(\mathbf{R}^1)$.

Теорема 7 *Пусть функция $F(x,z)$ удовлетворяет условиям:*

7) *существует $M > 0$ такое, что для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ и почти всех $x \in \mathbf{R}^1$ выполняется неравенство :* $|F(x,z_1) - F(x,z_2)| \le M \cdot |z_1 - z_2|$;

8) *существует $m > 0$ такое, что для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ и почти всех $x \in \mathbf{R}^1$ выполняется неравенство :* $\mathrm{Re}\left\{[F(x,z_1) - F(x,z_2)] \cdot \overline{[z_1 - z_2]}\right\} \ge m \cdot |z_1 - z_2|^2$.

Если $b(x) \in L_{2/\alpha}(\mathbf{R}^1)$, $0 < \alpha < 1$, то при любом $f(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ уравнение

$$F[x, u(x)] + \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s)\, u(s)\, ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{22}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:

$$u_n = u_{n-1} - \mu \cdot (Fu_{n-1} + B^\alpha u_{n-1} - f)\,, \qquad n \in \mathbf{N}\,, \tag{23}$$

причем справедлива оценка погрешности:

$$||u_n - u^*||_2 \le \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot ||Fu_0 + B^\alpha u_0 - f||_2\,, \tag{24}$$

где $\mu = m/(M + \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot \|b\|^2_{2/\alpha})^2$, $\alpha = \sqrt{1 - m/\mu} < 1$, $u_0(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ - *произвольная функция.*

Доказательство. Запишем данное уравнение (22) в операторном виде: $Au = f$, где $Au \equiv Fu + B^\alpha u$. Так как $b(x) \in L_{2/\alpha}(\mathbf{R}^1)$, то, в силу следствия 1, оператор B^α действует непрерывно из $L_2(\mathbf{R}^1)$ в $L_2(\mathbf{R}^1)$ и является строго положительным оператором, причем $\forall u(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ выполняются неравенства

$$\|B^\alpha u\|_2 \le \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot \|b\|^2_{2/\alpha} \cdot \|u\|_2 \quad \text{и} \quad (B^\alpha u, u) \ge 0\,. \tag{25}$$

Из условия 7) следует, что оператор суперпозиции F действует непрерывно из $L_2(\mathbf{R}^1)$ в $L_2(\mathbf{R}^1)$ и удовлетворяет условию Липшица:

$$\|Fu - Fv\|_2 \le M \cdot \|u - v\|_2\,, \quad \forall u, v \in L_2(\mathbf{R}^1)\,, \tag{26}$$

а из условия 8) вытекает, что он является сильно монотонным:

$$\mathrm{Re}\,(Fu - Fv, u - v) \ge m \cdot \|u - v\|_2^2\,, \quad \forall u, v \in L_2(\mathbf{R}^1)\,. \tag{27}$$

Используя неравенства (25)-(27), имеем

$$\|Au - Av\|_2 \le \left(M + \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot \|b\|^2_{2/\alpha}\right) \cdot \|u - v\|_2\,, \tag{28}$$

$$\mathrm{Re}\,(Au - Av, u - v) \ge m \cdot \|u - v\|_2^2\,, \quad \forall u, v \in L_2(\mathbf{R}^1)\,. \tag{29}$$

Из неравенств (28) и (29), в частности, вытекает, что оператор A действует непрерывно из $L_2(\mathbf{R}^1)$ в $L_2(\mathbf{R}^1)$, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, на основании теоремы

Браудера-Минти, уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$. Осталось доказать, что это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле (23) и что справедлива оценка скорости их сходимости (24). Для этого рассмотрим вспомогательное уравнение $u = \Phi\, u$, где $\Phi\, u \equiv u - \mu \cdot (Au - f)$ (число μ определено в формулировке теоремы), которое эквивалентно данному уравнению $Au = f$. Очевидно, что оператор Φ действует непрерывно из $L_2(\mathbf{R}^1)$ в $L_2(\mathbf{R}^1)$ и, силу оценок (28) и (29), $\forall u(x), v(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ удовлетворяет неравенству:

$$\|\Phi\, u - \Phi\, v\|_2^2 \le \|u - v\|_2^2 - 2\,\mu\,\mathrm{Re}\,(Au - Av, u - v) +$$

$$+\mu^2 \cdot \|Au - Av\|_2^2 \le \left[1 - m^2/(M + \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot \|b\|_{2/\alpha}^2)^2\right] \cdot \|u - v\|_2^2,$$

т.е. $\|\Phi\, u - \Phi\, v\|_2 \le \alpha \cdot \|u - v\|_2$, где α определено в формулировке теоремы. Следовательно, доказываемые утверждения (23) и (24) непосредственно вытекают из принципа сжимающих отображений.

Теорема 8 *Пусть $b(x) \in L_{2/\alpha}(\mathbf{R}^1)$, $0 < \alpha < 1$, а $F(x, z)$ удовлетворяет условиям 7) и 8). Тогда при любом $f(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ уравнение*

$$u(x) + \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s) \cdot F[s, u(s)]}{|s - x|^{1-\alpha}}\, ds = f(x) \tag{30}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:

$$u_n = F^{-1} v_n\,, \quad v_n = v_{n-1} - \mu \cdot \left(B^\alpha v_{n-1} + F^{-1} v_{n-1} - f\right)\,, \quad n \in \mathbf{N}\,, \tag{31}$$

где $\mu = m/[M \cdot (m^{-1} + \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot \|b\|_{2/\alpha}^2)]^2$, F^{-1} есть оператор обратный к F. При этом справедлива оценка погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_2 \le \frac{\mu}{m} \cdot \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot \|B^\alpha v_0 + F^{-1} v_0 - f\|_2\,, \tag{32}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m\,\mu/M^2}$, а $v_0(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ - произвольная функция.

Доказательство. Из оценок (26) и (27) вытекает, что оператор суперпозиции F имеет обратный оператор $F^{-1} : L_2(\mathbf{R}^1) \to L_2(\mathbf{R}^1)$, причем $\forall u(x), v(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ выполняются неравенства (см., например, [3]):

$$\|F^{-1} u - F^{-1} v\|_2 \le m^{-1} \cdot \|u - v\|_2\,, \tag{33}$$

$$\mathrm{Re}\,(F^{-1} u - F^{-1} v, u - v) \ge m \cdot M^{-2} \cdot \|u - v\|_2^2\,. \tag{34}$$

Запишем данное уравнение (30) в операторном виде:

$$u + B^\alpha F u = f\,. \tag{35}$$

По теореме 3 оно имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$. Осталось доказать, что последовательность (31) сходится к $u^*(x)$ и справедлива оценка (32). Для этого рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\Phi\, v = f\,, \quad \text{где} \quad \Phi\, v \equiv F^{-1} v + B^\alpha v\,. \tag{36}$$

Очевидно, что если $v^* \in L_2(\mathbf{R}^1)$ является решением уравнения (36), то $u^* = F^{-1}v^* \in L_2(\mathbf{R}^1)$ является решением уравнения (35). Поэтому достаточно доказать, что уравнение (36) имеет единственное решение $v^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$, причем его можно найти по формуле (31) и справедлива оценка (32). Используя неравенства (25), (33) и (34), $\forall u(x), v(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ имеем:

$$\|\Phi\, u - \Phi\, v\|_2 \le (m^{-1} + \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot \|b\|^2_{2/\alpha}) \cdot \|u - v\|_2\,, \tag{37}$$

$$\mathrm{Re}\,(\Phi\, u - \Phi\, v, u - v) \ge m \cdot M^{-2} \cdot \|u - v\|_2^2\,. \tag{38}$$

Далее, заменяя уравнение (36) на эквивалентное уравнение $v = \Psi\, v$, где $\Psi\, v \equiv v - \mu \cdot (\Phi\, v - f)$, как и при доказательстве теоремы 7, получим $\|\Psi\, u - \Psi\, v\|_2 \le \alpha \cdot \|u - v\|_2$, где $\alpha = \sqrt{1 - m\,\mu/M^2} < 1$. Следовательно, на основании принципа сжимающих отображений, уравнение $v = \Psi\, v$, а значит и уравнение (36), имеет единственное решение $v^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$, причем последовательность

$$v_n = \Psi\, v_{n-1} = v_{n-1} - \mu \cdot \left(B^\alpha v_{n-1} + F^{-1}v_{n-1} - f\right)\,,$$

т.е. последовательность (31), сходится к $v^*(x)$ и

$$\|v_n - v^*\|_2 \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|\Psi\, v_0 - v_0\|_2 = \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|B^\alpha v_0 + F^{-1}v_0 - f\|_2\,. \tag{39}$$

Наконец, замечая, что $v^* = Fu^*$ и используя неравенства (33), (39), получаем

$$\|u_n - u^*\|_2 = \|F^{-1}v_n - F^{-1}v^*\|_2 \le m^{-1} \cdot \|v_n - v^*\|_2 \le$$

$$\le \frac{\mu}{m} \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|B^\alpha v_0 + F^{-1}v_0 - f\|_2\,,$$

т.е. справедливо неравенство (32).

Теорема 9 *Пусть $b(x) \in L_{2/\alpha}(\mathbf{R}^1)$, $0 < \alpha < 1$, а $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 7) и 8). Тогда при любом $f(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ уравнение*

$$u(x) + F\left[x,\ \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s)\cdot u(s)}{|s-x|^{1-\alpha}}\, ds\right] = f(x) \tag{40}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:

$$u_n = u_{n-1} + \mu \cdot \left(F^{-1}(f - u_{n-1}) - B^\alpha u_{n-1}\right)\,, \quad n \in \mathbf{N}\,, \tag{41}$$

где $\mu = m/[M \cdot (m^{-1} + \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot \|b\|^2_{2/\alpha})]^2$, F^{-1} есть оператор обратный к F. При этом справедлива оценка погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_2 \le \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|F^{-1}(f - u_0) - B^\alpha u_0\|_2\,, \quad n \in \mathbf{N}\,, \tag{42}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m\,\mu/M^2}$, а $u_0(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ - произвольная функция.

Доказательство. Запишем уравнение (40) в операторном виде

$$u + FB^{\alpha}u = f\,. \tag{43}$$

В силу теоремы 5 оно имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$. Осталось доказать, что последовательность (41) сходится к $u^*(x)$ и справедлива оценка (42). Для этого обозначим $f - u = v$. Тогда уравнение (43) примет вид $FB^{\alpha}(f - v) = v$. Применив к обеим частям последнего уравнения оператор F^{-1}, существование которого установлено в доказательстве теоремы 8, приходим к уравнению вида (36):

$$Av = B^{\alpha}f\,, \quad \text{где} \quad Av \equiv F^{-1}v + B^{\alpha}v\,. \tag{44}$$

Точно так же, как и при доказательстве теоремы 8, получаем, что уравнение (44) имеет единственное решение $v^*(x) = f(x) - u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$, причем последовательность

$$\begin{gathered} v_n = v_{n-1} - \mu \cdot (Av_{n-1} - B^{\alpha}f) = \\ = v_{n-1} - \mu \cdot (F^{-1}v_{n-1} + B^{\alpha}v_{n-1} - B^{\alpha}f) \end{gathered} \tag{45}$$

сходится к $v^*(x)$ и

$$\|v_n - v^*\|_2 \le \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|F^{-1}v_0 + B^{\alpha}v_0 - B^{\alpha}f\|_2\,. \tag{46}$$

Но тогда $u^*(x) = f(x) - v^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ является (единственным) решением уравнения (43) и, в силу связи $v_n = f - u_n$, из (45) и (46) получаем

$$f - u_n = f - u_{n-1} - \mu \cdot (F^{-1}(f - u_{n-1}) - B^{\alpha}u_{n-1})\,,$$

$$\|u_n - u^*\|_2 \le \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|F^{-1}(f - u_0) - B^{\alpha}u_0\|_2\,,$$

т.е. справедливы утверждения (41) и (42).

В заключение отметим, что результаты данной работы при $p = 2$ охватывают, в частности, и случай линейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала.

Литература

1. K.F. Andersen, E.T. Sawyer. Weighted norm inequalities for the Riemann-Liouville and Weyl fractional integral operators // Trans. Amer. Math. Soc. V. 308, N 2. 1988. P. 547-558.

2. Д.В. Прохоров, В.Д. Степанов. Весовые оценки операторов Римана-Лиувилля и приложения // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 243. 2003. С. 289-312.

3. С.Н. Асхабов. Нелинейные уравнения типа свертки, М: Физматлит. 2009. 304 с.

4. А.М. Нахушев. Дробное исчисление и его применение, М: Физматлит. 2003. 272 с.

5. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения, Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

6. М.М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М: Наука. 1966. 672 с.

7. Б.В. Хведелидзе. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Труды Тбилис. матем. ин-та АН Груз. ССР. Т. 23. 1956. С. 3-158.

INTEGRAL EQUATIONS WITH POTENTIAL TYPE KERNELS IN WEIGHTED COMPLEX LEBESGUE SPACES

S.N. Askhabov

Chechen State University,
Kiev str., 33, Grozny, 364037, Russia, e-mail: askhabov@yandex.ru

Abstract. By method of monotone operators, theorems on existence, uniqueness and methods of finding solutions are proved for some classes of nonlinear integral equations with potential type kernels in weighted complex Lebesgue spaces and also norm estimates of solutions are obtained.

Keywords: nonlinear integral equations, potential type operators, weighted Lebesgue spaces, method of monotone operators.