УДК 517.983

О НЕКОТОРЫХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

С.А. Гриценко, Н.Н. Мотькина

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: Gritsenko@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе получены асимптотические формулы для числа решений задач Гольдбаха, Хуа Ло-Кена, Лагранжа с числами специального вида.

Ключевые слова: аддитивные задачи, числа специального вида, число решений, асимптотическая формула, квадратичная иррациональность.

1 Введение

В теории чисел важную роль играют задачи о представлении натуральных чисел в виде суммы определенного вида слагаемых (аддитивные задачи). Самыми известными аддитивными задачами являются великая теорема Ферма, проблема Гольдбаха, проблема Варинга, проблема делителей Ингама. Некоторые из перечисленных задач в настоящее время полностью решены, другие решены не полностью или вообще не решены. В современной теории чисел существует ряд направлений, в которых развивается теория аддитивных задач. Одним из них является рассмотрение аддитивных задач с дополнительными условиями на переменные, что позволяет получать новую информацию о структуре решений аддитивных задач. Наши исследования относятся к указанному направлению.

2 Аддитивные задачи с числами специального вида

1. В аддитивной теории чисел рассматривается задача о представлении натурального числа N в виде суммы n—ных степеней простых чисел $p_1,\ p_2,\dots,p_k$ ($k\geq 2$ и $n\geq 1$)

$$p_1^n+p_2^n+\cdots+p_k^n=N.$$

Обозначим как $I_{k,n}(N)$ число таких представлений.

При $k=3$, $n=1$ задачу о представлении нечетного числа в виде суммы трех простых чисел называют тернарной проблемой Гольдбаха. Для числа решений задачи Гольдбаха И.М. Виноградов в 1937 г. получил асимптотическую формулу (см. [1])

$$I_{3,1}(N)=\sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3}+O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),$$

где

$$\sigma(N)=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\backslash N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right).$$

При $k = 5$, $n = 2$ Хуа Ло—кен доказал, что достаточно большое натуральное N, $N \equiv 5 \pmod{24}$, представимо суммой квадратов пяти простых чисел (см. [2]). С помощью метода тригонометрических сумм И.М. Виноградова, можно получить приближенное равенство

$$I_{5,2}(N) \asymp \frac{N^{3/2}}{(\log N)^5}$$

для числа решений задачи Хуа Ло–Кена (см. [3]).

2. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое подмножество множества простых чисел. Интересно рассмотреть задачу о числе решений $J_{k,n}(N)$ уравнения

$$p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n = N$$

в простых числах $p_1,\ p_2, \ldots, p_k$ из множества $\mathcal{P}$. Естественно предположить, что

$$J_{k,n}(N) \sim \mu^k(\mathcal{P}) I_{k,n}(N), \tag{1}$$

где

$$\mu(\mathcal{P}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi(N)} \sum_{\substack{p \le N \\ p \in \mathcal{P}}} 1$$

— «плотность» $\mathcal{P}$, $0 < \mu(\mathcal{P}) < 1$.

К примеру, С.А. Гриценко в 1988 г. рассмотрел множество

$$\mathcal{P} = \{p \mid \{1/2p^{1/c}\} < 1/2, 1 < c \le 2\},$$

получил, что приближенное равенство

$$J_{k,n}(N) \sim (1/2)^k I_{k,n}(N)$$

выполняется для $n = 1$, $k = 3$, а также для $n \ge 2$, $k \ge k_0(n)$ (см. [4]).

Мы рассмотрели задачу Гольдбаха и задачу Хуа Ло–Кена с простыми числами из специальных множеств. Для них приближенное равенство (1) не выполняется.

3. Далее в работе η — квадратичная иррациональность, a и b — произвольные числа из интервала $(0, 1)$. Рассмотрим вариант тернарной проблемы Гольдбаха

$$p_1 + p_2 + p_3 = N$$

с простыми числами из специального множества

$$\mathcal{P} = \{p \mid a < \{\eta p\} < b\}.$$

Теорема 1 *Для любого положительного C справедливо равенство*

$$J_{3,1}(N) = I_{3,1}(N)\sigma(N, a, b) + O(N^2 \ln^{-C} N),$$

где

$$\sigma(N, a, b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 1{,}5(a+b))} \frac{\sin^3 \pi m(b-a)}{\pi^3 m^3}.$$

Заметим, что сумма ряда $\sigma(N,a,b) \geq 0$. При выполнении некоторых условий на длину промежутка $b-a$ можно гарантировать, что $\sigma(N,a,b) > 0$.

Схема доказательства теоремы 1. Число решений задачи Гольдбаха представим интегралом

$$J_{3,1}(N) = \int_0^1 S_0^3(x) e^{-2\pi i x N} dx,$$

где

$$S_0(x) = \sum_{p \leq N} \psi(\eta p) e^{2\pi i x p},$$

$\psi(x)$ — характеристическая функция интервала (a,b), продолженная с периодом 1 на всю числовую ось.

Разложив предварительно «сглаженную» функцию $\psi(x)$ в ряд Фурье, перейдем к рассмотрению сумм

$$\sum_{m_1,m_2,m_3} c(m_1)c(m_2)c(m_3) \int_0^1 S(x+m_1\eta)S(x+m_2\eta)S(x+m_3\eta)e^{-2\pi i x N} dx,$$

где

$$S(x) = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i x p}.$$

Если $m_1 = m_2 = m_3 = m$, то

$$\int_0^1 S^3(x+m\eta)e^{-2\pi i x N} dx = e^{2\pi i m \eta N} I_{3,1}(N).$$

Если не все m_1, m_2, m_3 равны друг другу, то допустим, что $m_1 < m_2$. Сделаем замену $t = x + m_1\eta$.

Отрезок интегрирования разбиваем на две части: множество точек, находящихся близко к рациональным числам с малыми знаменателями («большие» дуги E_1), множество остальных точек («малые» дуги E_2). На «малых» дугах известна хорошая оценка для $|S(t)|$. На «больших» дугах получаем оценку для $|S(t+m\eta)|$. Здесь используем то обстоятельство, что η — квадратичная иррациональность, и числа $t+m\eta$ хорошо приближаются несократимыми дробями со знаменателями, которые «не слишком малы» и «не слишком велики». Тогда интеграл

$$\int_E |S(t)||S(t+m\eta)||S(t+m'\eta)| dt$$

оценивается как

$$\begin{aligned} &\ll (\int_{E_1} + \int_{E_2})|S(t)||S(t+m\eta)||S(t+m'\eta)| dt \ll \\ &\ll \pi(N)(\max_{t\in E_1}|S(t+m\eta)| + \max_{t\in E_2}|S(t)|) \ll \\ &\ll N^2 \ln^{-C} N \end{aligned}$$

и попадает в остаток.

4. Пусть в задаче Хуа Ло–Кена

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N$$

простые числа p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 принадлежат специальному множеству

$$\mathcal{P} = \{p \mid a < \{\eta p^2\} < b\}.$$

Теорема 2 *Справедлива формула*

$$J_{5,2}(N) = I_{5,2}(N) s(N, a, b) + O(N^{3/2-0,00002}),$$

где

$$s(N, a, b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 2,5(a+b))} \frac{\sin^5 \pi m(b-a)}{\pi^5 m^5}.$$

5. Рассмотрим задачу со специальными целыми числами, где приближенное равенство, подобное (1), выполняется. Пусть $I(N)$ — число решений задачи Лагранжа

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = N$$

в целых числах l_1, l_2, l_3, l_4. Известно, что (см. [5])

$$I(N) = \pi^2 N \sum_{1 \le q} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{1 \le a \le q \\ (a,q)=1}} S_{a,q}^4 e^{-2\pi i N a/q} + O(N^{17/18+\varepsilon}),$$

где

$$S_{a,q} = \sum_{j=1}^{q} e^{2\pi i a j^2/q}$$

— сумма Гаусса, ε — произвольное положительное число.

Пусть

$$\mathcal{A} = \{l \mid a < \{\eta l\} < b\}$$

— подмножество множества целых чисел, $J(N)$ — число решений задачи Лагранжа в целых числах из множества $\mathcal{A}$. Тогда выполняется приближенное равенство

$$J(N) \sim \mu^4(\mathcal{A}) I(N),$$

где $\mu(\mathcal{A})$ — «плотность» множества $\mathcal{A}$.

Теорема 3 *Для любого положительного малого ε справедлива формула*

$$J(N) = (b-a)^4 I(N) + O(N^{7/8+\varepsilon}).$$

6. Можно предположить, что для уравнений вида

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = N,$$

где $x_1, x_2, ..., x_k$ из множества

$$\mathcal{A} = \{x \mid a < \{\eta x^r\} < b\},$$

при $r = n$ в формуле для числа решений будут присутствовать ряды, подобные рядам $\sigma(N, a, b), s(N, a, b)$ из теорем 1, 2.

Литература

1. Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел //ДАН СССР, 1937. Т.15, с. 169—172.

2. L.K. Hua, Some results in the additive prime number theory, Quart. J. Math., 9 (1938), p. 68—80.

3. Хуа Ло–ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Мир, 1964.

4. Гриценко С.А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха-Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида //УМН, 1988. Т. 43, вып.4 (262), с.203-204.

5. Kloosterman H.D. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ //Acta mathematica, 49, 1926, p. 407—464.

ADDITIVE PROBLEMS WITH GIVEN NUMBERS

S.A. Gritsenko, N.N. Motkina

Belgorod State University,

Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Gritsenko@bsu.edu.ru

Abstract. The object of the present paper is to treat the additive problems such as ternary problem of Goldbach, Hua Loo Keng's problem and Lagrang's problem with given numbers. We have got an asymptotic formulas for the number of solutions of these problems.

Keywords: additive problems, primes of special type, number of solutions, asymptotic formula, quadratic irrationality.