УДК 517.987

АЛГЕБРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1)]

Ю.П. Вирченко, Н.Н. Витохина

Белгородский государственный университет
ул.Победы, 85, г.Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Строится алгебра преобразований последовательностей из $\mathbb{C}^\infty$. Разработанный алгебраический формализм применяется для вычисления коэффициентов разложения суперпозиций аналитических функций, определённых степенными рядами.

Ключевые слова: аналитические функции, степенные ряды, операция свёртки, суперпозиции функций.

1. Введение. Составным элементом решения многих математических задач является анализ функций $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, определённых посредством их разложений в степенные ряды

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (1)$$

с наборами коэффициентов $\langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$ и сходящихся в окрестности некоторой фиксированной точки z_0. В процессе анализа приходится выполнять различные операционные действия с этими функциями: их дифференцирование и интегрирование, обращение и различные алгебраические преобразования, решение дифференциальных уравнений, в которых функции $f(z)$ присутствуют в качестве коэффициентов и т.д. Все эти действия приходится осуществлять в терминах разложений (1), оперируя только наборами $\langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$, и результатом этих действий снова являются степенные ряды.

Помимо вопросов, связанных собственно с функциями $f(z)$, на которые необходимо получать ответ в результате анализа их коэффициентов, например, о значениях функций в определённых точках или об оценке этих значений при изменении аргумента z в некоторой области, об асимптотическом поведении в окрестностях различных точек, о расположении и характере их особенностей, часто объектом исследования являются не сами функции, а только определяющие их коэффициенты. Наиболее важными примерами в этом отношении могут служить так называемые производящие функции, которые появляются в некоторых задачах аналитической теории чисел [1], в задачах комбинаторики [2], в теории специальных функций [3], в задачах теории вероятностей, связанных с распределениями вероятностей дискретных случайных величин [4], в том числе в задачах математической физики (см., например, [5], [6]). Центральной проблемой в этих задачах является вычисление (в общем случае, приближённое) набора коэффициентов $\langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$ либо их оценка. Обычно, решение тех задач, для которых в качестве инструмента исследования вводится производящая функция, состоит в том, что подыскивается последовательность простых, в смысле их явной выполнимости, математических операций, которые позволяют либо найти производящую функцию явно, а затем разложить в степенной ряд, либо свести её вычисление к решению какого-либо уравнения, которому она удовлетворяет и которое

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП ГК № 02.740.11.0545

позволяет получить требуемую информацию о её коэффициентах. Возможны, однако, случаи, когда даже конструирование указанной последовательности операций, упрощающей получение явного вида производящей функции, не позволяет произвести все указанные выше вычисления, и приходится на каждом этапе оперировать только со степенными рядами. В этом случае возникает проблема приближённого выполнения всех необходимых операций над рядами с контролируемой оценкой точности, которая понимается как оценка точности приближёний последовательности её коэффициентов разложения.

В настоящей работе мы изложим некоторые базовые положения алгебраического исчисления последовательностей коэффициентов степенных рядов, которое упрощает и унифицирует многие операции, связанные с преобразованиями степенных рядов. По-видимому, это исчисление может иметь многочисленные применения. Уверенность в этом придаёт тот факт, что похожие алгебраические построения получили распространение в статистической механике (см., например, [7]) и конструктивной квантовой теории поля (см., например, [8]). В этой работе мы применяем разработанную алгебраическую технику к вычислению коэффициентов a_k и/или их оценке, равномерной по номеру $k \in \mathbb{N}_+$ для функций $f(z)$, которые являются результатом суперпозиции $f_n(f_{n-1}(...f_2(f_1(z))...))$ последовательности функций $\langle f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z)\rangle$, $z \in \mathbb{C}$, заданных рядами

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)}(z-z_0)^k\,, \quad j = 1 \div n\,,$$

сходящимися в окрестности точки z_0. Естественно, предполагается, что каждый из этих рядов имеет ненулевой радиус сходимости r_j, $j = 1 \div n$, соответственно. При этом для результирующей функции $f(z)$ вычисляются коэффициенты определяющего её ряда, также имеющего ненулевой радиус сходимости. Применение предлагаемой техники позволяет получить алгебраический алгоритм вычисления коэффициентов суперпозиции произвольной совокупности аналитических функций, заданных в виде степенных рядов, и найти эффективные оценки величины их коэффициентов a_k, $k \in \mathbb{N}_+$.

2. Линейное многообразие $\mathbb{C}^\infty$. Мы начинаем изложение с линейного многообразия $\mathbb{C}^\infty$ бесконечных последовательностей $\langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ комплексных чисел (в связи с дальнейшими применениями вводимых обозначений, мы нумеруем компоненты последовательностей метками из $\mathbb{N}_+ = \langle 0, 1, 2, ...\rangle$), которые в дальнейшем называем элементами всякий раз, когда нет необходимости указывать их математическую природу. Линейные операции на многообразии $\mathbb{C}^\infty$ и нулевой элемент $\mathbf{0} = \langle a_k = 0; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ определены естественным образом. А именно, если $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ и $\mathsf{b} = \langle b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ – любые две последовательности из $\mathbb{C}^\infty$, то последовательности $\mathsf{a} + \mathsf{b}$ и $\lambda\mathsf{a}$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ определяются формулами

$$\mathsf{a} + \mathsf{b} = \langle a_k + b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle\,, \quad \lambda\mathsf{a} = \langle \lambda a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle\,. \tag{2}$$

Образ естественной инъекции линейного многообразия $\mathbb{C}^{n+1}$ конечных последовательностей $\langle a_k; k = 0 \div n\rangle$ длины $(n+1)$ в $\mathbb{C}^\infty$, определяемых по формуле

$$\langle a_k; k = 0 \div n\rangle \mapsto \langle b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle = \begin{cases} b_k = a_k & \text{, если } k = 0 \div n\,, \\ b_k = 0 & \text{, если } k > n\,, \end{cases}$$

является линейным подмногообразием в $\mathbb{C}^\infty$, которое мы обозначим $\mathbb{C}^\infty_n$.

Теоретико-множественный предел расширяющейся последовательности $\langle \mathbb{C}_n^\infty; n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ представляет собой линейное подмногообразие в $\mathbb{C}^\infty$, состоящее из финитных последовательностей $\langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$, у которых все $a_k = 0$, начиная с достаточно большого номера k. Это подмногообразие мы обозначаем посредством $\mathbb{C}^{(0)}$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{C}_n^\infty = \mathbb{C}^{(0)} . \tag{3}$$

Для каждого элемента $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ любую из его компонент a_k, $k \in \mathbb{N}_+$ можно рассматривать как соответствующую проекцию на $\mathbb{C}$. Мы будем записывать этот факт в виде $a_k = (\mathsf{a})_k$. Кроме того, для каждого элемента $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$ из $\mathbb{C}^\infty$ обозначим посредством $\mathsf{a}^{(n)}$ его проекцию на $\mathbb{C}_n^\infty$, где $\left(\mathsf{a}^{(n)}\right)_k = a_k$ при $k \le n$ и $\left(\mathsf{a}^{(n)}\right)_k = 0$ при $k > n$.

3. Линейное многообразие полиномов. Введём теперь в рассмотрение линейные многообразия $\mathfrak{L}_n$, $n \in \mathbb{N}_+$, $\dim \mathfrak{L}_n = n+1$ полиномов $p(z)$, $z \in \mathbb{C}$ степени, не превосходящей n,

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k , \quad \deg p(z) \le n , \tag{4}$$

с естественными линейными операциями над полиномами

$$\begin{aligned} \lambda p(z) &= \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k z^k , \quad \lambda \in \mathbb{C} , \\ p(z) + q(z) &= \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) z^k , \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k .$$

Теоретико-множественный предел расширяющейся последовательности $\langle \mathfrak{L}_n; n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ представляет собой линейное многообразие, обозначаемое нами

$$\mathfrak{L}^{(0)} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n .$$

Оно состоит из всех полиномов без ограничения на степень.

Формула (4) определяет отображение $\mathsf{F} : \mathbb{C}^{(0)} \mapsto \mathfrak{L}^{(0)}$, которое является биекцией. Связи линейных операций над полиномами с линейными операциями над последовательностями из $\mathbb{C}^{(0)}$, которые следуют из формул (5), указывают на то, что это отображение линейно и поэтому оно устанавливает изоморфизм между $\mathbb{C}^{(0)}$ и $\mathfrak{L}^{(0)}$. При этом каждому элементу $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$ из $\mathbb{C}^{(0)}$ сопоставляется полином $p(z)$ степени $n = \max\{k : a_k \ne 0\}$. Образ этого элемента будем обозначать $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$, $z \in \mathbb{C}$. Таким образом,

$$p(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}] , \tag{6}$$

где

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a}] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k , \tag{7}$$

и, ввиду (5), для любых двух элементов $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^{(0)}$, $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^{(0)}$ и числа $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \mathsf{F}[z|\mathsf{a}+\mathsf{b}] &= \mathsf{F}[z|\mathsf{a}] + \mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\,, \\ \mathsf{F}[z|\lambda\mathsf{a}] &= \lambda\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\,. \end{aligned} \tag{8}$$

4. Операция свёртки. Введём на многообразии $\mathbb{C}^\infty$ бинарную операцию, которая называется *свёрткой* последовательностей и которую будем обозначать символом $*$. Операция свёртки сопоставляет любым двум элементам $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty$ элемент $\mathsf{a}*\mathsf{b}$ с компонентами

$$(\mathsf{a}*\mathsf{b})_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\,, \quad k \in \mathbb{N}_+\,. \tag{9}$$

Справедлива

Т е о р е м а 1. *Если* $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{C}^{(0)}$, *то* $\mathsf{a}*\mathsf{b} \in \mathbb{C}^{(0)}$. *При этом если* $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty_m$, $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty_n$, *то* $\mathsf{a}*\mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty_{m+n}$.

□ При $k > m+n$ в формуле (9) все слагаемые равны нулю: либо потому что $k \geq j > m$ и $a_j = 0$, либо потому что $j \leq m$, но при этом $k-j > n$ и $b_{k-j} = 0$. ■

Отображение F мультипликативно на $\mathbb{C}^{(0)}$, то есть справедлива

Т е о р е м а 2. *Для любых двух элементов* $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{C}^{(0)}$ *имеет место тождество*

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a}*\mathsf{b}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\,\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{10}$$

□ Так как для элементов $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{C}^{(0)}$, в силу теоремы 1, ряды, определяющие $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}*\mathsf{b}]$, $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$, $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$, конечны, то обоснованы их следующие алгебраические преобразования

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a}*\mathsf{b}] = \sum_{l=0}^{\infty} z^l (\mathsf{a}*\mathsf{b})_l = \sum_{l=0}^{\infty} z^l \sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k \sum_{l=k}^{\infty} z^{l-k} b_{l-k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} z^l b_l\right) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\,\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\,. \quad \blacksquare$$

Алгебраические свойства свёртки описываются следующим утверждением.

Т е о р е м а 3. *Операция свёртки коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна относительно сложения на* $\mathbb{C}^\infty$, *т.е. для любых трёх элементов* $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \in \mathbb{C}^\infty$ *имеют место тождества*

$$\mathsf{a}*\mathsf{b} = \mathsf{b}*\mathsf{a}\,, \quad (\mathsf{a}*\mathsf{b})*\mathsf{c} = \mathsf{a}*(\mathsf{b}*\mathsf{c})\,, \tag{11}$$

$$(\mathsf{a}+\mathsf{b})*\mathsf{c} = \mathsf{a}*\mathsf{c} + \mathsf{b}*\mathsf{c}\,. \tag{12}$$

Кроме того, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ *и любых* $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty$ *выполняется тождество*

$$(\lambda\mathsf{a})*\mathsf{b} = \lambda(\mathsf{a}*\mathsf{b})\,. \tag{13}$$

□ Первое тождество в (11) получается заменой переменной суммирования j на $(k-j)$ в (9). Тождества (12) и (13) очевидны. Доказательство второго тождества в (11) проще всего доказать, воспользовавшись изоморфизмом между линейными многообразиями $\mathbb{C}^{(0)}$

и $\mathfrak{L}^{(0)}$. В этом случае левой и правой частям этого тождества соответствует один и тот же полином $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\,\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\,\mathsf{F}[z|\mathsf{c}]$. Таким образом, оно верно для элементов из $\mathbb{C}^{(0)}$.

Пусть теперь $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ – произвольные элементы из $\mathbb{C}^\infty$. Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$ и определим для него проекции $\mathsf{a}^{(n)}$, $\mathsf{b}^{(n)}$, $\mathsf{c}^{(n)}$ этих последовательностей, которые являются элементами из $\mathbb{C}^{(0)}$.

Для любого $\mathsf{h} \in \mathbb{C}^\infty$ справедливо $(\mathsf{h})_k = (\mathsf{h}^{(n)})_k$ при $k = 0 \div n$. Поэтому для любых $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathbb{C}^\infty$ имеет место $(\mathsf{f} * \mathsf{g})^{(n)} = \left(\mathsf{f}^{(n)} * \mathsf{g}^{(n)}\right)^{(n)}$. Так как $\mathsf{a}^{(n)}$, $\mathsf{b}^{(n)}$, $\mathsf{c}^{(n)} \in \mathbb{C}^{(0)}$ для любых $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \in \mathbb{C}^{(0)}$, то это равенство приводит к тому, что доказываемое тождество справедливо для проекций на $\mathbb{C}_n^\infty$, $n \in \mathbb{N}$,

$$((\mathsf{a} * \mathsf{b}) * \mathsf{c})^{(n)} = \left((\mathsf{a}^{(n)} * \mathsf{b}^{(n)})^{(n)} * \mathsf{c}^{(n)}\right)^{(n)} =$$

$$= \left(\mathsf{a}^{(n)} * (\mathsf{b}^{(n)} * \mathsf{c}^{(n)})^{(n)}\right)^{(n)} = (\mathsf{a} * (\mathsf{b} * \mathsf{c}))^{(n)}\,.$$

Ввиду произвольности числа $n \in \mathbb{N}$, имеет место равенство всех компонент с любым номером k соответствующих друг другу левых и правых частей равенств (11)-(13). ■

5. Алгебра $\mathbb{C}^\infty$. Теорема 3 указывает на то, что свёртка играет роль "умножения"на линейном многообразии $\mathbb{C}^\infty$. При наличии такого умножения, $\mathbb{C}^\infty$ превращается в коммутативную алгебру над полем $\mathbb{C}$, которую мы будем обозначать тем же символом $\mathbb{C}^\infty$.

В алгебре $\mathbb{C}^\infty$ имеется единица e, которая представляется последовательностью $\mathsf{e} = \langle 1, 0, 0, ...\rangle$, так как для любого $\mathsf{a} \in \mathfrak{L}$ выполняются соотношения

$$\mathsf{a} * \mathsf{e} = \mathsf{e} * \mathsf{a} = \mathsf{a}\,, \tag{14}$$

например, $(\mathsf{a} * \mathsf{e})_n = \sum_{k=0}^{n} a_k e_{n-k} = a_n e_0 = a_n$. Для элемента e, в соответствии с (7), имеем $\mathsf{F}[z|\mathsf{e}] = 1$.

Очевидно, что подмножество $\bar{\mathbb{C}}^\infty = \{\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty : (\mathsf{a})_0 = 0\}$ является линейным подмногообразием в $\mathbb{C}^\infty$, т.е. оно замкнуто относительно линейных операций. Кроме того, оно замкнуто относительно операции свёртки, так как на основании (9) имеем

$$(\mathsf{a} * \mathsf{b})_0 = a_0 b_0 = 0 \tag{15}$$

для любой пары a и b элементов из $\bar{\mathbb{C}}^\infty$. Следовательно, многообразие $\bar{\mathbb{C}}^\infty$ вместе с операцией свёртки образует подалгебру (без единицы) алгебры $\mathbb{C}^\infty$. Её мы будем обозначать тем же символом $\bar{\mathbb{C}}^\infty$.

Подалгебра $\bar{\mathbb{C}}^\infty$ является идеалом алгебры $\mathbb{C}^\infty$, т.е. для любого $\mathsf{a} \in \bar{\mathbb{C}}^\infty$ и любого $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty$ имеет место $\mathsf{a} * \mathsf{b} \in \bar{\mathbb{C}}^\infty$, что следует из (15).

В связи с особой ролью подалгебры $\bar{\mathbb{C}}^\infty$ введём полезную для дальнейших построений операцию проектирования произвольного элемента $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ на подалгебру $\bar{\mathbb{C}}^\infty$. А именно, будем обозначать посредством $\bar{\mathsf{a}}$ проекцию элемента $\mathsf{a} = \langle a_n; n \in \mathbb{N}_+\rangle$, $\bar{\mathsf{a}} \equiv \mathsf{a} + (-a_0)\mathsf{e} = \langle 0, a_1, a_2, ...\rangle$. Таким образом, по определению,

$$\mathsf{a} = a_0\mathsf{e} + \bar{\mathsf{a}}\,. \tag{16}$$

Алгебра $\mathbb{C}^\infty$ является алгеброй без деления. В самом деле, из выполнимости равенства $\mathsf{a} * \mathsf{b} = \mathsf{e}$ для некоторой пары a и b элементов из $\bar{\mathbb{C}}^\infty$ следует $(\mathsf{a} * \mathsf{b})_0 = a_0 b_0 = 1$, что невозможно в том случае, когда $\mathsf{a} \in \bar{\mathbb{C}}^\infty$. Следовательно, элементы из $\bar{\mathbb{C}}^\infty$ не имеют обратных.

Однако, подалгебра $\bar{\mathbb{C}}^\infty$ является максимальным идеалом в алгебре $\mathbb{C}^\infty$, то есть имеет место

Т е о р е м а 4. *Для любого элемента* $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty \setminus \bar{\mathbb{C}}^\infty$ *существует единственный обратный ему элемент* b, *удовлетворяющий равенствам*

$$\mathsf{a} * \mathsf{b} = \mathsf{b} * \mathsf{a} = \mathsf{e}\,. \tag{17}$$

□ Определим компоненты последовательности $\mathsf{b} = \langle b_n : n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ рекуррентно следующей формулой

$$b_n = -a_0^{-1} \sum_{k=1}^{n} b_{n-k} a_k\,, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{18}$$

где $a_0 \neq 0$, если $\mathsf{a} \notin \bar{\mathbb{C}}^\infty$. При этом положим $b_0 = a_0^{-1}$. Очевидно, что таким образом определённый элемент b удовлетворяет (17), так как $a_0 b_0 = 1$, и для любого $n \in \mathbb{N}$, выполняется тождество

$$\sum_{k=0}^{n} b_{n-k} a_k = 0\,. \tag{19}$$

С другой стороны, если для некоторого элемента $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty$ выполняется (17) при заданном $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty \setminus \bar{\mathbb{C}}^\infty$, то $a_0 b_0 = 1$ и выполняется тождество (19), из которого следует (18). Таким образом, элемент b определяется равенствами (17) единственным образом. ■

В связи с доказанной теоремой введем обозначение a^{-1} для элемента, обратного элементу $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty \setminus \bar{\mathbb{C}}^\infty$. Для него имеют место равенства

$$\mathsf{a}^{-1} * \mathsf{a} = \mathsf{a} * \mathsf{a}^{-1} = \mathsf{e}\,, \tag{20}$$

и его компоненты определяются формулами

$$(\mathsf{a}^{-1})_0 = a_0^{-1}\,,$$

$$(\mathsf{a}^{-1})_n = -a_0^{-1} \sum_{k=1}^{n} (\mathsf{a}^{-1})_{n-k} a_k\,, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{21}$$

Будем далее использовать следующие сокращённые обозначения для степеней любого элемента $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$:

$$\mathsf{a}^0 = \mathsf{e}, \quad \mathsf{a}^1 = \mathsf{a}, \quad \mathsf{a} * \mathsf{a} = \mathsf{a}^2\,, \ \dots, \quad \mathsf{a}^n * \mathsf{a} = \mathsf{a}^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{22}$$

Из определения степени элемента $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ непосредственно следует

Т е о р е м а 5. *Компоненты* $(\mathsf{a}^n)_m$, $m \in \mathbb{N}_+$ *степеней* $n \in \mathbb{N}$ *элемента* $\mathsf{a} = \langle a_m ; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ *определяются формулой*

$$(\mathsf{a}^n)_m = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 0: \\ k_1 + \dots + k_n = m}} a_{k_1} \dots a_{k_n}\,, \quad m = 1, 2, \dots. \tag{23}$$

□ Доказательство этого утверждения проведём индукцией по n, начиная с $n = 2$. При $n = 2$ имеем

$$(\mathsf{a}^2)_m = \sum_{k=0}^{m} a_k a_{m-k} = \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0: \\ k_1 + k_2 = m}} a_{k_1} a_{k_2}\,.$$

Пусть для n-й степени формула (23) верна. На основе рекуррентного определения степени построим индукционный шаг к значению $(n+1)$:

$$(\mathsf{a}^{n+1})_m = (\mathsf{a}^n * \mathsf{a})_m = \sum_{j=0}^{m} (\mathsf{a}^n)_j \, a_{m-j} = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{\substack{k_1,\dots,k_n \geq 0: \\ k_1+\dots+k_n=j}} a_{k_1} \dots a_{k_n} \right) \cdot a_{m-j} =$$

$$= \sum_{\substack{j,k_{n+1}\geq 0: \\ j+k_{n+1}=m}} a_{k_{n+1}} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\geq 0: \\ k_1+\dots+k_n=j}} a_{k_1}\dots a_{k_n} = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_{n+1}\geq 0: \\ k_1+\dots+k_{n+1}=m}} a_{k_1}\dots a_{k_{n+1}} \,. \quad \blacksquare$$

С л е д с т в и е. *Если* $\mathsf{a} \in \bar{\mathbb{C}}^\infty$, *то для степеней этого элемента имеет место формула*

$$(\mathsf{a}^n)_m = \sum_{\substack{n > j_1,\dots,j_n \geq 1: \\ j_1+\dots+j_n=m}} a_{j_1}\dots a_{j_n} \,, \tag{24}$$

и поэтому

$$(\mathsf{a}^n)_m = 0 \tag{25}$$

для всех $m > n$.

6. Полиномы в алгебре $\mathbb{C}^\infty$. На алгебре $\mathbb{C}^\infty$ определены выражения вида

$$p(\mathsf{b}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathsf{b}^k \,, \tag{26}$$

представляющие собой *полиномы* от элементов $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty$. Каждому полиному такого типа сопоставим полином $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ над $\mathbb{C}$, который является образом последовательности $\mathsf{a} = \langle a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots \rangle$ при отображении F, $p(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$. Пусть элемент b принадлежит алгебре $\mathbb{C}^{(0)}$. Сопоставим этому элементу полином $q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$. Так как $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^{(0)}$, то элемент $p(\mathsf{b})$ также содержится в $\mathbb{C}^{(0)}$. Поэтому образ $\mathsf{F}[z|p(\mathsf{b})]$ этого элемента при отображении F также является полиномом. В этом случае возникает вопрос о связи между всеми введёнными полиномами. Для формулировки ответа на этот вопрос введём следующие определения. Обозначим посредством $(p \circ q)(z)$ операцию *суперпозиции* двух полиномов $p(z)$ и $q(z)$, результатом которой является полином $p(q(z))$, то есть

$$(p \circ q)(z) = p(q(z)) \,. \tag{27}$$

Линейное многообразие $\mathfrak{L}^{(0)}$, снабжённое этой операцией, является полугруппой с единицей, представленной полиномом $p(z) = z$.

Кроме того, введём бинарную операцию двух последовательностей $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^{(0)}$ и $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty$, которую также будем называть их суперпозицией и обозначать тем же символом $\circ$. Результатом $\mathsf{a} \circ \mathsf{b}$ применения этой операции к паре $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b} \rangle$ является элемент из $\mathbb{C}^\infty$, которая представляется полиномом $p(\mathsf{b})$ вида (26), то есть

$$\mathsf{a} \circ \mathsf{b} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathsf{b}^k \,. \tag{28}$$

Ответ на поставленный выше вопрос даёт утверждение о мультипликативности отображения F относительно операции суперпозиции.

Т е о р е м а 6. *Имеет место следующая формула суперпозиции*

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a} \circ \mathsf{b}] = (p \circ q)(z)\,. \tag{29}$$

□ Согласно определению полинома $p(\mathsf{b})$, линейности и мультипликативности отображения F на алгебре $\mathbb{C}^{(0)}$, получаем

$$\mathsf{F}[z|p(\mathsf{b})] = \mathsf{F}[z|\sum_{k=0}^{n} a_k \mathsf{b}^k] = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathsf{F}[z|\mathsf{b}^k] = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\right)^k =$$

$$= \mathsf{F}\left[\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]|\mathsf{a}\right] = p(q(z))\,. \quad \blacksquare$$

Таким образом, имеется два группоида с элементами соответственно из $\mathbb{C}^{(0)}$ и $\mathfrak{L}^{(0)}$ и с операцией суперпозиции $\circ$, причём на $\mathfrak{L}^{(0)}$ эта операция ассоциативна. Согласно доказанной теореме, между этими группоидами имеется изоморфизм, устанавливаемый отображением F. По этой причине операция суперпозиции ассоциативна на $\mathbb{C}^{(0)}$. Иными словами, из доказанной теоремы вытекает

С л е д с т в и е. *Многообразие $\mathbb{C}^{(0)}$ вместе с операцией суперпозиции на нём является полугруппой с единицей $\mathsf{i} = \langle 0, 1, 0, 0, \ldots\rangle$. При этом $z = \mathsf{F}[z|\mathsf{i}]$.*

□ В самом деле, пусть имеются три полинома p, q и r. Они определяются, соответственно элементами a, b и c из $\mathbb{C}^{(0)}$ так, что $p(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$, $q(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$ и $r(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{c}]$. Тогда суперпозиции полиномов $p \circ (q \circ r)$ соответствует, согласно определению, элемент $\mathsf{a} \circ (\mathsf{b} \circ \mathsf{c}) \in \mathbb{C}^{(0)}$, $(p \circ (q \circ r))(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a} \circ (\mathsf{b} \circ \mathsf{c})]$, а суперпозиции полиномов $(p \circ q) \circ r$ соответствует элемент $(\mathsf{a} \circ \mathsf{b}) \circ \mathsf{c} \in \mathbb{C}^{(0)}$, $((p \circ q) \circ r)(z) = \mathsf{F}[z|(\mathsf{a} \circ \mathsf{b}) \circ \mathsf{c}]$. Ввиду ассоциативности суперпозиции полиномов $p(z)$, $q(z)$, $r(z)$, получаем равенство $\mathsf{F}[z|\mathsf{a} \circ (\mathsf{b} \circ \mathsf{c})] = \mathsf{F}[z|(\mathsf{a} \circ \mathsf{b}) \circ \mathsf{c}]$, которое влечёт равенство $\mathsf{a} \circ (\mathsf{b} \circ \mathsf{c}) = (\mathsf{a} \circ \mathsf{b}) \circ \mathsf{c}$. ■

Заметим, что, как и при всяком изоморфном (или гомоморфном) отображении одной полугруппы на другую, единица i полугруппы $\mathbb{C}^{(0)}$ отображается посредством F в единицу полугруппы $\mathfrak{L}^{(0)}$.

Утверждение теоремы 6 непосредственно обобщается на произвольную последовательность полиномов $\langle p_1(z), p_2(z), \ldots, p_n(z)\rangle$. Справедлива

Т е о р е м а 7. *Пусть задана последовательность полиномов $\langle p_j(z) \in \mathfrak{L}^{(0)}; j = 1 \div n\rangle$, определяемых посредством последовательности $\langle \mathsf{a}_n, \ldots, \mathsf{a}_2, \mathsf{a}_1\rangle$, то есть $p_j(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}_j]$, $j = 1 \div n$. Имеет место формула суперпозиции*

$$(p_n \circ \ldots \circ p_2 \circ p_1)(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}_n \circ \ldots \circ \mathsf{a}_2 \circ \mathsf{a}_1]\,. \tag{30}$$

□ Доказательство проводится индукцией по n. Согласно теореме 6, утверждение верно при $n = 2$, где $p(z) = p_2(z)$, $q(z) = p_1(z)$. Индукционный шаг от n к $(n+1)$ строится также на основе утверждения этой теоремы, положив $p(z) = p_{n+1}(z)$, $q(z) = (p_n \circ \ldots \circ p_2 \circ p_1)(z)$, $\mathsf{a} = \mathsf{a}_{n+1}$, $\mathsf{b} = \mathsf{a}_n \circ \ldots \circ \mathsf{a}_2 \circ \mathsf{a}_1$,

$$(p_{n+1} \circ (p_n \circ \ldots \circ p_2 \circ p_1))(z) = (p \circ q)(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a} \circ \mathsf{b}] =$$

$$= \mathsf{F}[z|\mathsf{a}_{n+1} \circ (\mathsf{a}_n \circ \ldots \circ \mathsf{a}_2 \circ \mathsf{a}_1)]\,. \quad \blacksquare$$

Формула (30) принципиально решает задачу об алгоритме последовательного вычисления коэффициентов полинома, являющегося суперпозицией $p_n(p_{n-1}(...(p_1(z))...))$ произвольного набора $\langle p_1(z), p_2(z), ..., p_n(z)\rangle$ полиномов. Они представляют собой компоненты элемента $\mathsf{a}_n \circ ... \circ \mathsf{a}_2 \circ \mathsf{a}_1 \in \mathbb{C}^{(0)}$ с соответствующим номером.

7. Аналитические функции в $\mathbb{C}^\infty$. Нашей следующей задачей является обобщение построенного алгоритма на бесконечные последовательности из $\mathbb{C}^\infty$, то есть распространение на эти последовательности теорем 2,6,7. Первым шагом на этом пути является введение понятия *аналитической функции* $g(\mathsf{a})$ *на алгебре* $\mathbb{C}^\infty$. Пусть $g(z)$, $z \in \mathbb{C}$ – аналитическая функция в окрестности точки $z = 0$, определяемая степенным рядом

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

с ненулевым радиусом сходимости. Тогда для каждого $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ значение аналитической функции $g(\mathbf{a})$ на $\mathbb{C}^\infty$ даётся рядом (мы не вводим для функций, определяемых на $\mathbb{C}^\infty$, каких-либо обозначений, отличных от функций на $\mathbb{C}$, подразумевая, что смысл используемого функционального обозначения всегда ясен из смысла её аргумента):

$$g(\mathsf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathsf{a}^n ; \quad b_n \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N}_+ \tag{31}$$

в том случае, когда он покомпонентно сходится, т.е. по определению для каждого $m \in \mathbb{N}_+$ должен сходиться ряд

$$(g(\mathsf{a}))_m = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\mathsf{a}^n\right)_m . \tag{32}$$

Если ряды (32) сходятся для всех $m \in \mathbb{N}_+$, то введенное понятие об аналитической функции на $\mathbb{C}^\infty$ можно рассматривать как обобщение определения операции суперпозиции двух элементов a и b, данного нами ранее, согласно (28), для финитных последовательностей из $\mathbb{C}^{(0)}$. Тогда, сохраняя прежнее обозначение для этой операции, формулу (31) можно записать в эквивалентном виде

$$\mathsf{b} \circ \mathsf{a} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathsf{a}^n ; \quad b_n \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N}_+ . \tag{33}$$

Ряды (31) заведомо сходятся покомпонентно в том случае, когда $\mathsf{a} \in \bar{\mathbb{C}}^\infty$, так как, ввиду (25), они являются конечными. При этом каждая n-я компонента значения функции $g(\mathsf{a})$ вычисляется на основе конечного ряда

$$(g(\mathsf{a}))_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \left(\mathsf{a}^k\right)_n . \tag{34}$$

В общем случае на вопрос о существовании значений аналитической функции g на $\mathbb{C}^\infty$ отвечает следующее утверждение.

Т е о р е м а 8. *Пусть элемент* $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ *такой, что его нулевая компонента* a_0 *находится внутри круга сходимости ряда* $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. *Тогда существует значение соответствующей аналитической функции (31), равное*

$$g(\mathsf{a}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} g^{(l)}(a_0)\, \bar{\mathsf{a}}^l . \tag{35}$$

□ Так как a_0 находится внутри круга сходимости, то по признаку Коши

$$|a_0| \limsup_{k\to\infty} |b_k|^{1/k} < 1 .$$

Поэтому ряды $\sum_{k=l}^{\infty} b_k \frac{a_0^{k-l} k!}{(k-l)!}$, определяющие значения l-х производных функции g в точке a_0, также сходятся. Это следует из оценки

$$|a_0| \limsup_{k\to\infty} \left| b_k \frac{k!}{(k-l)!} \right|^{1/k} = |a_0| \limsup_{k\to\infty} |b_k|^{1/k} < 1 .$$

Ввиду сходимости рядов для производных, имеем

$$g(\mathsf{a}) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \mathsf{a}^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(a_0 \mathsf{e} + \bar{\mathsf{a}}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \bar{\mathsf{a}}^l a_0^{k-l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{k=l}^{\infty} b_k \frac{k!}{(k-l)!} a_0^{k-l} \right) \bar{\mathsf{a}}^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} g^{(l)}(a_0)\, \bar{\mathsf{a}}^l .$$

Таким образом, каждая ненулевая компонента элемента из $\mathbb{C}^\infty$, являющегося значением аналитической функции g на элементе a, может быть представлена как соответствующая компонента значения на элементе $\bar{\mathsf{a}} \in \bar{\mathbb{C}}^\infty$ другой аналитической функции, которая порождается функцией

$$g_+(z, a_0) = g(z + a_0) - g(a_0) = \sum_{l=1}^{\infty} z^l g^{(l)}(a_0)/l! ,$$

аналитической в окрестности нуля. Последнее же значение заведомо существует ввиду конечности, согласно (35), каждого из определяющих их рядов. ■

З а м е ч а н и е. 1. Формулу (35) можно рассматривать как альтернативное выражение для вычисления суперпозиции двух элементов b и a из $\mathbb{C}^\infty$:

$$\mathsf{b} \circ \mathsf{a} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} g^{(l)}(a_0)\, \bar{\mathsf{a}}^l . \tag{36}$$

8. Топология в $\mathbb{C}^\infty$. В предыдущем пункте мы при построении аналитических функций на $\mathbb{C}^\infty$ использовали понятие покомпонентной сходимости. Тем самым мы ввели конкретный тип топологии в $\mathbb{C}^\infty$. Введение топологии на $\mathbb{C}^\infty$ превращает это линейное многообразие в линейное топологическое пространство. В этом пространстве имеется счётное семейство окрестностей $U_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n}$ элемента $\mathbf{0}$ с рациональными метками $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n$ и $n \in \mathbb{N}_+$, где

$$U_{\varepsilon_0,...,\varepsilon_n} = \{\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty : |a_k| < \varepsilon_k, k = 0 \div n\},$$

то есть выполнена первая аксиома счётности. Тогда семейство открытых множеств $U_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n} + \mathsf{a}$, где элементы a выбираются из $\mathbb{C}_n^\infty$, $n \in \mathbb{N}_+$ и имеют рациональные компоненты, образует счётную базу. Следовательно, введенное топологическое пространство сепарабельно.

Топология с указанной выше базой эквивалентна топологии счётно-нормированного пространства, у которого последовательность функционалов $\langle \mathsf{N}_m(\cdot); m \in \mathbb{N}\rangle$,

$$\mathsf{N}_m(\mathsf{a}) = \sum_{k=0}^{m} |a_k|, \quad \mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty, \ m \in \mathbb{N}$$

на $\mathbb{C}^\infty$ является соответствующей счётной системой согласованных полунорм.

Замечательно то, что $*$-произведение в $\mathbb{C}^\infty$ определяет непрерывное отображение в описанной топологии покомпонентной сходимости, и поэтому при наличии операции умножения на $\mathbb{C}^\infty$ это сепарабельное топологическое пространство является сепарабельной топологической алгеброй.

Непрерывность произведения следует из того, что каждая n-компонента $(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n$ произведения двух сомножителей a и b, согласно (9), определяется только компонентами этих сомножителей с номерами, не превосходящими n.

Топология покомпонентной сходимости очень грубая. Однако, несмотря на то, что база топологии имеет мощность $\aleph_0$, и при этом мощность множества $\mathbb{C}^\infty$ равна $\aleph_1^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_1} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$, соответствующее линейное топологическое пространство $\mathbb{C}^\infty$ является отделимым, так как у двух различных последовательностей a и b из $\mathbb{C}^\infty$ всегда имеется первая отличающая их компонента с некоторым номером n. Поэтому при достаточно малой величине ε_n открытые множества $U_{\varepsilon_0,...,\varepsilon_n} + \mathsf{a}$ и $U_{\varepsilon_0,...,\varepsilon_n} + \mathsf{b}$ разделяют a, и b.

9. Отношение порядка на $\mathbb{C}^\infty$. При нахождении априорных оценок остатков рядов, представляемых отображением $\mathsf{F}[z|\cdot]$, удобно использовать понятие о неравенствах на $\mathbb{C}^\infty$, т.е. считать порождающее многообразие полуупорядоченным. Это достигается соглашением о том, что если все компоненты a_k, $k \in \mathbb{N}_+$ элемента a неотрицательны, то, по определению, $\mathsf{a} \geq 0$. Тогда будем полагать, что два элемента a и b сравнимы, и писать $\mathsf{a} \geq \mathsf{b}$, если $\mathsf{a} + (-1)\mathsf{b} \geq 0$.

Для любого элемента $\mathsf{a} = \langle a_n; n \in \mathbb{N}_+\rangle \in \mathbb{C}^\infty$ обозначим $|\mathsf{a}| = \langle |a_n|; n \in \mathbb{N}_+\rangle$. Тогда $|\lambda \mathsf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathsf{a}|$. Очевидно, что $|\mathsf{a}| \geq \mathsf{a}$ для любого элемента $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$.

В соответствии с введённым соглашением для операции сложения и операции $*$ имеют место также неравенства

$$|\mathsf{a} + \mathsf{b}| \leq |\mathsf{a}| * |\mathsf{b}|, \quad |\mathsf{a} * \mathsf{b}| \leq |\mathsf{a}| * |\mathsf{b}| \tag{37}$$

при любых $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty$, то есть справедливы числовые неравенства для всех компонент последовательностей, стоящих в обеих их частях. Второе из неравенств (37) влечёт выполнение для любой степени $n \in \mathbb{N}_+$ и любого элемента $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ неравенства

$$|\mathsf{a}^n| \leq |\mathsf{a}|^n. \tag{38}$$

10. Пространства $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$. Перейдём теперь к распространению теорем 2, 6 и 7 на произвольное линейное многообразие всевозможных аналитических функций с общим множеством аналитичности. Для этого нам придётся, в частности, ввести другую топологию, так как отображение F, как указано в замечании 2, не является непрерывным относительно использованной нами ранее топологии покомпонентной сходимости.

Пусть $\mathfrak{A}$ – линейное многообразие с естественными линейными операциями функций комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$, аналитических в каком-либо круге ненулевого радиуса с центром в точке $z = 0$. Таким образом, каждая функция из $\mathfrak{A}$ представима в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{39}$$

с набором коэффициентов $\langle a_k \in \mathbb{C}; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ таких, что

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} < \infty\,. \tag{40}$$

Согласно признаку Коши сходимости степенных рядов, это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы ряд (39), построенный на основе последовательности $\langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ коэффициентов, принадлежал $\mathfrak{A}$. В связи с этим определим множество $\mathfrak{C} \subset \mathbb{C}^\infty$, состоящее из всех последовательностей $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ с компонентами $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_+$, для которых имеет место (40).

Степенной ряд (39), ввиду однозначности определения коэффициентов степенного разложения любой аналитической функции из $\mathfrak{A}$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{A}$. Таким образом, многообразия $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{A}$ изоморфны, и поэтому каждому набору операций, производимых с аналитическими функциями из $\mathfrak{A}$, можно сопоставить набор операций с соответствующими им последовательностями коэффициентов разложения из $\mathfrak{C}$. Как и в случае многообразия $\mathbb{C}^{(0)}$, отображение, осуществляющее это соответствие, будем обозначать посредством $\mathsf{F}[z|\cdot]$. Формула (38) при таком соглашении принимает вид $f(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$.

Линейным операциям над функциями $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ соответствуют линейные операции над последовательностями $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle \in \mathbb{C}^\infty$, $\mathsf{b} = \langle b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle \in \mathbb{C}^\infty$ определяющих их коэффициентов, которые выполняются по формулам (2). Так как в результате применения линейных операций над аналитическими функциями из $\mathfrak{A}$ снова получается аналитическая функция из $\mathfrak{A}$ (при этом сумма двух аналитических функций является аналитической в общем круге сходимости составляющих её слагаемых), то линейные операции над элементами из $\mathfrak{C}$ не выводят за пределы $\mathfrak{C}$. Таким образом, множество $\mathfrak{C}$ является линейным подмногообразием многообразия $\mathbb{C}^\infty$. Это многообразие, согласно (40), характеризуется тем, что на нём функционал

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}] \equiv \max\{|a_0|, \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^{1/k}\} \tag{41}$$

принимает конечные значения.

Заметим, что функционал $\mathsf{D}[\cdot]$ обладает следующим очевидным свойством

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}] = \mathsf{D}[|\mathsf{a}|]\,, \quad \mathsf{a} \in \mathfrak{C}$$

и монотонно возрастает по каждому направлению в пространстве $\mathfrak{C}$, то есть $\mathsf{D}[\lambda \mathsf{a}]$ — возрастающая функция от $\lambda > 0$ при фиксированном элементе a.

Элементы a из $\mathfrak{C}$ допускают другую характеризацию. А именно, для каждого из них существует число $\rho \in (0, \infty)$, для которого конечно значение функционала

$$||\mathsf{a}||_\rho \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}_+} \frac{|a_n|}{\rho^n}. \tag{42}$$

Каждое из множеств $\mathfrak{C}_\rho \subset \mathfrak{C}$, $\rho \in (0, \infty)$, состоящее из элементов $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$, для которых $||\mathsf{a}||_\rho < \infty$, инвариантно относительно линейных операций, то есть является линейным многообразием. Семейство всех многообразий $\mathfrak{C}_\rho$ линейным образом упорядочено так, что $\mathfrak{C}_{\rho'} \subset \mathfrak{C}_\rho$ при $\rho' < \rho$. Очевидным образом функционал (42) при каждом допустимом значении ρ является нормой на $\mathfrak{C}_\rho$, и это многообразие полно относительно этой нормы, то есть является банаховым пространством. Таким образом, принадлежность элементов $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ к многообразию $\mathfrak{C}$ можно характеризовать двояким образом: либо посредством бесконечного множества норм $||\cdot||_\rho$, $\rho \in (0, \infty)$, либо посредством функционала $\mathsf{D}[\cdot]$. Точно также топологию многообразия $\mathfrak{C}$ можно вводить двояким образом. Проанализируем сначала последнюю возможность.

Т е о р е м а 9. *Функционал* $\mathrm{dist}[\cdot,\cdot] : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \mapsto [0, \infty)$, *определяемый формулой* $\mathrm{dist}[\mathsf{a}, \mathsf{b}] = \mathsf{D}[\mathsf{a} - \mathsf{b}]$ *для каждой пары* a *и* b *элементов из* $\mathfrak{C}$, *является расстоянием на* $\mathfrak{C}$.(Далее мы будем часто употреблять термин расстояние по отношению к одному элементу $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$, понимая под этим его расстояние до нуля, $\mathrm{dist}[\mathsf{a}, \mathbf{0}] = \mathsf{D}[\mathsf{a}]$.)

□ Для того чтобы в этом убедиться, достаточно проверить выполнимость неравенства треугольника, то есть что для любых двух последовательностей $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$, $\mathsf{b} = \langle b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ имеет место неравенство

$$\mathsf{D}[\mathsf{a} + \mathsf{b}] \le \mathsf{D}[\mathsf{a}] + \mathsf{D}[\mathsf{b}]. \tag{43}$$

Оно вытекает из элементарного неравенства

$$\left(a^{1/k} + b^{1/k}\right)^k \ge a + b, \quad a \ge 0, b \ge 0,$$

которое показывает, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$|a_k + b_k|^{1/k} \le (|a_k| + |b_k|)^{1/k} \le |a_k|^{1/k} + |b_k|^{1/k}$$

и, следовательно,

$$\sup_k |a_k + b_k|^{1/k} \le \sup_k |a_k|^{1/k} + \sup_k |b_k|^{1/k}.$$

Так как, кроме того, $|a_0 + b_0| \le |a_0| + |b_0|$, то отсюда следует (43). ■

Многообразие $\mathfrak{C}$, снабжённое расстоянием (41), превращается в полное метрическое пространство, за которым мы сохраняем то же самое обозначение. Доказательство полноты $\mathfrak{C}$ проводится по стандартной схеме.

Т е о р е м а 10. *Многообразие* $\mathfrak{C}$ *полно относительно метрики, порождаемой расстоянием* $\mathsf{D}[\cdot]$.

□ Положим $\langle \mathsf{a}_l \in \mathfrak{C}; l \in \mathbb{N}\rangle$ – фундаментальная последовательность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число N такое, что при $l, m > N$ имеет место неравенство $\mathsf{D}[\mathsf{a}_l - \mathsf{a}_m] < \varepsilon$. Следовательно, для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется

$$|(\mathsf{a}_l)_k - (\mathsf{a}_m)_k| < \varepsilon^k \tag{44}$$

и $|(\mathsf{a}_l)_0 - (\mathsf{a}_m)_0| < \varepsilon$. Поэтому для каждого $k \in \mathbb{N}_+$ числовая последовательность $\langle (\mathsf{a}_l)_k; l \in \mathbb{N}\rangle$ фундаментальна, и у неё существует предел

$$a_k = \lim_{l\to\infty} (\mathsf{a}_l)_k\,.$$

Тем самым определён элемент $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle \in \mathbb{C}^\infty$. Переходя в (44) к пределу $l \to \infty$, находим $|(\mathsf{a}_m)_k - a_k| \le \varepsilon^k$, $k \in \mathbb{N}$ и $|(\mathsf{a}_m)_0 - a_0| < \varepsilon$, то есть $\mathsf{D}[\mathsf{a}_m - \mathsf{a}] \le \varepsilon$. Воспользовавшись неравенством треугольника, имеем $\mathsf{D}[\mathsf{a}] \le \mathsf{D}[\mathsf{a}_m] + \varepsilon$. Следовательно, $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$ и, ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, $\mathsf{a}_m \to \mathsf{a}$ при $m \to \infty$. ■

Топология в $\mathfrak{C}$ гораздо более тонкая по сравнению с топологией в $\mathbb{C}^\infty$. Это приводит к тому, что пространство $\mathfrak{C}$, в отличие от $\mathbb{C}^\infty$, несепарабельно. В самом деле, рассмотрим множество последовательностей $\{\langle \alpha_k \in \{0,1\}; k \in \mathbb{N}_+\rangle\} \subset \mathfrak{C}$. Мощность этого множества равна $\aleph_1$. В то же время любые два различных элемента a и a' из этого множества находятся на единичном расстоянии $\mathsf{D}[\mathsf{a} - \mathsf{a}'] = 1$. Наличие такой несчётной системы элементов указывает на отсутствие в $\mathfrak{C}$ счётного всюду плотного множества, то есть на его несепарабельность. Разумеется, как и во всяком метрическом пространстве, первая аксиома счётности в $\mathfrak{C}$ выполняется.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ и $\mathsf{a}^{(n)}$ – проекция этого элемента на $\mathbb{C}^\infty_n$. Тогда, очевидно, что любая функция $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$ является продолжением по непрерывности последовательности полиномов $\langle \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)}]; n \in \mathbb{N}\rangle$ при $n \to \infty$. Это следует из оценки

$$|\mathsf{F}[z|\mathsf{a}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)}]| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^k\,.$$

В общем же случае (при покомпонентной сходимости в $\mathbb{C}^\infty$ произвольной последовательности $\langle \mathsf{a}_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ к элементу a) сходимость последовательности функций $\langle \mathsf{F}[z|\mathsf{a}_n]; n \in \mathbb{N}\rangle$ при $n \to \infty$ к функции $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$, конечно же, не имеет места. Для того чтобы это имело место, дополнительно, как известно, требуется выполнимость условия покомпонентной равномерности сходимости последовательности $\langle \mathsf{a}_n; n \in \mathbb{N}\rangle$.

Вообще говоря, расстояние $\mathsf{D}[\mathsf{a} - \mathsf{a}^{(n)}] = \sup_{k>n} |a_k|^{1/k}$ не стремится к нулю при $n \to \infty$. По этой причине выясним, что представляет из себя пополнение $\mathfrak{C}^{(0)}$ в топологии, порождаемой расстоянием $\mathsf{D}[\cdot]$, многообразия $\mathbb{C}^{(0)}$, которое содержится в $\mathfrak{C}$. Ответ на этот вопрос даёт следующая

Т е о р е м а 11. *Метрическое пространство $\mathfrak{C}^{(0)}$ характеризуется тем, что для каждого его элемента $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ выполняется*

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = 0\,, \tag{45}$$

и множество значений образа $\mathsf{F}[z|\cdot]$ отображения F, получаемого продолжением по непрерывности относительно расстояния $\mathsf{D}[\cdot]$ с многообразия $\mathbb{C}^{(0)}$ на $\mathfrak{C}^{(0)}$, представляет собой линейное многообразие $\mathfrak{A}^{(0)}$ целых функций от $z \in \mathbb{C}$.

□ Пусть a – элемент из $\mathbb{C}^\infty$, не являющийся финитным, для которого имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{D}[\mathsf{a} - \mathsf{a}^{(n)}] = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} |a_k|^{1/k} = 0\,.$$

Тогда для фиксированного $\varepsilon > 0$, имеем $|a_k| < \varepsilon^k$ при $k > n$. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} |a_k|^{1/k} \le \varepsilon\,.$$

Ввиду произвольности ε, этот предел равен нулю. Обратное утверждение доказывается обращением всех утверждений в этом рассуждении.

Радиус сходимости функции, определяемой рядом (39), у которого коэффициенты удовлетворяют (45), бесконечен, то есть соответствующая функция $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$ целая. Наконец, равномерно в любом замкнутом круге, содержащем $z \in \mathbb{C}$, с центром в нуле и радиусом, меньшим радиуса сходимости, имеем

$$|\mathsf{F}[z|\mathsf{a}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)}]| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^k \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathsf{D}^k[\mathsf{a}-\mathsf{a}^{(n)}]\cdot|z|^k \to 0$$

при $n \to \infty$. ■

Выявим теперь связь между пространством $\mathfrak{C}$ и семейством пространств $\mathfrak{C}_\rho$, $\rho \in (0,\infty)$. Прежде всего заметим, что выбор значений неотрицательного параметра ρ может быть ограничен счётным множеством $\rho \in \{2^{-k}; k \in \mathbb{Z}\}$, так как $\mathfrak{C}_\rho \subset \mathfrak{C}_\sigma$ при $\sigma > \rho$. Далее, для любого элемента $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$ имеет место неравенство

$$||\mathsf{a}||_\rho \ge ||\mathsf{a}||_\sigma\,, \text{ если } \sigma > \rho \tag{46}$$

(равенство имеет место только в том случае, если $\mathsf{a} = \lambda\mathsf{e}$, $\lambda \in \mathbb{C}$). Поэтому все нормы $||\cdot||_\rho$, $\rho \in (0,\infty)$ сравнимы друг с другом (см., например, [9]), и при $\sigma > \rho$ норма $||\cdot||_\rho$ не слабее нормы $||\cdot||_\sigma$.

При получении оценок, основанных на нормах $||\cdot||_\rho$, полезно иметь в виду, что

$$||\mathsf{a}||_\rho \le \max\{|a_0|, \rho^{-1}||\bar{\mathsf{a}}||_\rho\}\,, \tag{47}$$

а также

$$||\bar{\mathsf{a}}||_\sigma \le \frac{\rho}{\sigma}||\bar{\mathsf{a}}||_\rho \tag{48}$$

при $\sigma > \rho$ для любого элемента $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$.

Очевидно, что

$$|a_n| \le \rho^n ||\mathsf{a}||_\rho\,, \tag{49}$$

и поэтому для любого $\rho > 0$ имеет место включение $\mathfrak{C}_\rho \subset \mathfrak{C}$, так как

$$\sup_n |a_n|^{1/n} \le \rho \sup_n [||\mathsf{a}||_\rho]^{1/n} < \infty\,.$$

С другой стороны, для любого элемента из $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$ справедливо $|a_n| \le \mathsf{D}^n[\mathsf{a}]$, $n \in \mathbb{N}$, то есть $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_{\mathsf{D}[\mathsf{a}]}$ и поэтому имеет место включение $\mathfrak{C} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{C}_{2^k}$. Принимая во внимание оба полученных включения, можно утверждать, что

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{C}_{2^k}\,. \tag{50}$$

Пространства $\mathfrak{C}_\rho$ несепарабельны, так как в каждом из них с данным значением ρ присутствует несчётное семейство последовательностей $\{\langle a_n = \alpha_n\rho; n \in \mathbb{N}_+\rangle; \alpha_m \in \{0,1\}, m \in \mathbb{N}_+\}$, попарные расстояния между которыми равны ρ.

Рассмотрим семейство множеств $\{V_{\rho,\varepsilon} = \{\mathsf{a} : ||\mathsf{a}||_\rho < \varepsilon\}; \rho, \varepsilon \in (0,\infty)\}$. При фиксированном значении ρ семейство $V_{\rho,\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ является образующим семейством окрестностей нуля топологии в $\mathfrak{C}_\rho$. Так как имеет место формула (50), то введём на многообразии $\mathfrak{C}$ топологию, положив в качестве образующего семейства окрестностей нуля указанное выше семейство множеств $\{V_{\rho,\varepsilon}; \rho > 0, \varepsilon > 0\}$.

Имеет место включение $V_{\rho,\varepsilon'} \subset V_{\rho,\varepsilon}$ при $\varepsilon' < \varepsilon$. Кроме того, при $\rho > \rho'$ имеет место включение $V_{\rho',\varepsilon} \subset V_{\rho,\varepsilon}$. Следовательно, указанное семейство окрестностей может быть заменено на эквивалентное ему, с точки зрения формирования топологии, семейством $V_{\rho,\varepsilon}$ с рациональными значениями $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$.

Т е о р е м а 12. *Топология метрического пространства $\mathfrak{C}$ эквивалентна топологии линейного топологического пространства, определяемой на многообразии $\mathfrak{C}$ на основе семейства $\{V_{\rho,\varepsilon} = \{\mathsf{a} : ||\mathsf{a}||_\rho < \varepsilon\}; \rho, \varepsilon \in (0,\infty)\}$ окрестностей нуля.*

□ Докажем, что каждая окрестность $\{\mathsf{a} : \mathsf{D}[\mathsf{a}] < \varepsilon\}$ нуля в пространстве $\mathfrak{C}$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ содержит множество $V_{\rho,\varepsilon}$ с подходящей величиной $\rho > 0$, а также для любых $\rho > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\{\mathsf{a} : \mathsf{D}[\mathsf{a}] < \varepsilon'\}$, содержащаяся в $V_{\rho,\varepsilon}$. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что $\varepsilon \le 1$.

Так как для каждого элемента $\mathsf{a} \in V_{\rho,\varepsilon}$ выполняется $|a_n| < \varepsilon\rho^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, и поэтому

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{1/n} = \rho \sup_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon^{1/n} = \rho\,,$$

то $V_{\rho,\varepsilon} \subset \{\mathsf{a} : \mathsf{D}[\mathsf{a}] < \varepsilon\}$ при $\rho < \varepsilon$.

С другой стороны, так как для любого элемента из $\{\mathsf{a} : \mathsf{D}[\mathsf{a}] < \varepsilon'\}$ имеет место $|a_n| < \varepsilon'^n$, $n \in \mathbb{N}$, $|a_0| < \varepsilon'$, то, выбирая $\varepsilon' < \varepsilon \min\{1,\rho\}$ при фиксированных $\rho > 0$ и $\varepsilon > 0$, можно утверждать, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_+} (|a_n|/\rho^n) \le \max\{\sup_{n\in\mathbb{N}} (\varepsilon'/\rho)^n, \varepsilon'\} \le \max\{(\varepsilon/\rho)\min\{1,\rho\}, \varepsilon\} = \varepsilon\,,$$

то есть $\mathsf{a} \in V_{\rho,\varepsilon}$. Ввиду произвольности элемента a, $\{\mathsf{a} : \mathsf{D}[\mathsf{a}] < \varepsilon'\} \subset V_{\rho,\varepsilon}$. ■

Из доказанной теоремы следует, в частности, что операция умножения на число λ непрерывна в топологии пространства $\mathfrak{C}$. Поэтому функция $\mathsf{D}[\lambda\mathsf{a}]$ от $\lambda \in \mathbb{R}_+$ стремится к нулю при $\lambda \to 0$. Однако, её скорость сходимости к нулю существенно зависит от элемента a, то есть от направления в пространстве $\mathfrak{C}$. Она не пропорциональна λ, как это имеет место в нормированном пространстве. В частности, если элемент a такой, что $\mathsf{D}[\mathsf{a}] = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$, то функция $\mathsf{D}[\lambda\mathsf{a}]$ стремится к нулю медленнее любой степени $|\lambda|^\alpha$, $\alpha > 0$ при $\lambda \to 0$. В общем случае можно лишь утверждать, что

$$\mathsf{D}[\lambda\mathsf{a}] = \max\{|\lambda a_0|, \sup_{n\in\mathbb{N}} (|\lambda|\cdot|a_n|)^{1/n} \le \begin{cases} |\lambda|\mathsf{D}[\mathsf{a}], & |\lambda| \ge 1\,; \\ \mathsf{D}[\mathsf{a}], & |\lambda| \le 1\,. \end{cases}$$

Заметим, что утверждение теоремы 12, несмотря на счётность семейства окрестностей $V_{\rho,\varepsilon}$, которым можно ограничиться при построении топологии, не противоречит несепарабельности пространства $\mathfrak{C}$, ввиду несепарабельности каждого из пространств $\mathfrak{C}_\rho$.

Таким образом, пространство $\mathfrak{C}$ может быть представлено в виде расширяющегося семейства $\{\mathfrak{C}_\rho; \rho \in (0,\infty)\}$ банаховых пространств с нормами $\|\cdot\|_\rho$ так, что $\mathfrak{C}_\rho \subset \mathfrak{C}_{\rho'}$ при $\rho' > \rho$. Параметр ρ, маркирующий банаховы пространства и соответствующие им нормы, мы будем называть *показателем*. При наличии свойства подчинённости норм $\|\cdot\|_\rho > \|\cdot\|_{\rho'}$ с показателями, связанными отношением $\rho' > \rho$, топология $\mathfrak{T}_\rho$ пространства $\mathfrak{C}_\rho$ сильнее топологии $\mathfrak{T}_{\rho'}$, $\mathfrak{T}_\rho \supset \mathfrak{T}_{\rho'}$. При этом топология $\mathfrak{T}$ метрического пространства $\mathfrak{C}$ представляется в виде теоретико-множественного предела

$$\mathfrak{T} = \lim_{\rho\to 0} \mathfrak{T}_\rho\,.$$

Теорема 12 указывает также на то, что линейное топологическое пространство $\mathfrak{C}$ является пространством Фреше. Действительно, во-первых, оно полно, и его топология метризуема и, во-вторых, так как она эквивалентна топологии, порождаемой счётным множеством норм, то она локально выпукла [10].

Наконец, отметим, что при исследовании алгебры последовательностей коэффициентов аналитических функций расстояние $\mathsf{D}[\cdot]$ важно ввиду следующего утверждения.

Т е о р е м а 13. *Функционал $\mathsf{F}[z|\cdot]$ непрерывен на всех элементах пространства $\mathfrak{C}$ в метрике $\mathsf{D}[\cdot]$ и при всех значениях z, при которых сходится ряд, определяющий $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$.*

Он непрерывен также на пространстве $\mathfrak{C}_\rho$ относительно $\|\cdot\|_\rho$ для любого значения $\rho > 0$, при всех $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_\rho$ и и при любом z, для которого $|z|\rho < 1$.

□ При указанных в условии теоремы значениях z для всех элементов $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$, при которых $\mathsf{D}[\mathsf{a}-\mathsf{b}] < \varepsilon$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$, можно утверждать, что сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \varepsilon^n$. Тогда

$$|\mathsf{F}[z|\mathsf{b}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]| = |\mathsf{F}[z|\mathsf{a}-\mathsf{b}]| \le$$

$$\le |b_0 - a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n |(\mathsf{a}-\mathsf{b})_n| \le \mathsf{D}[\mathsf{b}-\mathsf{a}]\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \mathsf{D}[\mathsf{a}-\mathsf{b}]^{n-1}\right) \le$$

$$\le \varepsilon\left[1 + |z|(1-\varepsilon|z|)^{-1}\right]\,.$$

Для доказательства непрерывности относительно нормы $\|\cdot\|_\rho$ заметим, что для всех элементов a и b из $\mathfrak{C}_\rho$ при указанных в условии теоремы значениях z имеет место оценка

$$|\mathsf{F}[z|\mathsf{b}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]| = |\mathsf{F}[z|\mathsf{a}-\mathsf{b}]| \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n |(\mathsf{a}-\mathsf{b})_n| \le \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \rho^n \|\mathsf{a}-\mathsf{b}\|_\rho \le (1-\rho|z|)^{-1}\|\mathsf{a}-\mathsf{b}\|_\rho\,,$$

которая показывает, что при достаточно малой разности $\|\mathsf{a}-\mathsf{b}\|_\rho < \varepsilon$ разность $|\mathsf{F}[z|\mathsf{b}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]| < \varepsilon(1-\rho|z|)^{-1}$ также мала. ■

11. Алгебра $\mathfrak{C}$. Рассмотрим свойства операции свёртки в применении к элементам из $\mathfrak{C}$. Очевидно, что операция свёртки оставляет инвариантным многообразие $\mathfrak{C}$, то есть для любых двух элементов $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$, $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$ выполняется $\mathsf{a} * \mathsf{b} \in \mathfrak{C}$. Конечность нормы произведения $\mathsf{a} * \mathsf{b}$ легко усматривается, приняв во внимание, что для достаточно большого значения $\rho > 0$, при котором конечны нормы $||\mathsf{a}||_\rho$, $||\mathsf{b}||_\rho$, выполняется неравенство (49), и, следовательно,

$$|(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}| \le (n+1)\rho^n ||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\rho\,.$$

Тогда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n|^{1/n} \le \rho \sup_n \left((n+1)||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\rho\right)^{1/(n+1)} < \infty\,,$$

и поэтому

$$\mathsf{D}[\mathsf{a} * \mathsf{b}] < \infty\,.$$

Таким образом, снабдив пространство $\mathfrak{C}$ операцией умножения, роль которого выполняет свёртка двух последовательностей, мы получим коммутативную алгебру с единицей $\mathsf{e} \in \mathfrak{C}$ над полем $\mathbb{C}$. Эту алгебру будем обозначать тем же символом $\mathfrak{C}$.

Заметим, что подмногообразие $\bar{\mathfrak{C}} = \{\mathsf{a} \in \mathfrak{C} : (\mathsf{a})_0 = 0\}$ также инвариантно относительно $*$-умножения, потому что: во-первых, произведение $\mathsf{a} * \mathsf{b}$ двух элементов a и b из $\mathfrak{C}^{(0)}$ обязано принадлежать $\mathfrak{C}$, так как $\bar{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{C}$; во-вторых, $a_0 = b_0 = 0$, $(\mathsf{a} * \mathsf{b})_0 = a_0 b_0 = 0$. Тогда многообразие $\bar{\mathfrak{C}}$, при наличии операции $*$-умножения, является подалгеброй (без единицы) алгебры $\mathfrak{C}$, для которой мы сохраним обозначение $\bar{\mathfrak{C}}$.

Соотношение между подалгеброй $\bar{\mathfrak{C}}$ и основной алгеброй $\mathfrak{C}$ такое же, как и между подалгеброй $\bar{\mathbb{C}}$ и алгеброй $\mathbb{C}^\infty$, а именно, $\bar{\mathfrak{C}}$ является идеалом алгебры $\mathfrak{C}$, так как для любого $\mathsf{a} \in \bar{\mathfrak{C}}$ и любого $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$ имеет место $\mathsf{a} * \mathsf{b} \in \bar{\mathfrak{C}}$.

Покажем, что отображение $\mathsf{F}[z|\cdot]$ является мультипликативным на алгебре $\mathfrak{C}$, как это имело место на алгебре $\mathbb{C}^{(0)}$.

Т е о р е м а 14. *Для любых двух наборов $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$, $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$ при значениях $z \in \mathbb{C}$, принадлежащих общему кругу сходимости рядов $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$ и $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$, имеет место тождество*

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\,\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\,. \qquad (51)$$

□ Докажем, что ряд, определяющий $\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}]$, сходится. Обозначим посредством r_a радиус сходимости первого ряда и r_b – второго ряда. Для определённости положим $r_b > r_a$. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = r_a^{-1}, \quad \limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n} = r_b^{-1}\,.$$

Следовательно, при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_+$, за исключением, может быть, конечного числа начальных компонент элементов a и b, согласно признаку Коши, выполняются неравенства $|a_k| < (r_a-\varepsilon)^{-k}$, $|b_k| < (r_b-\varepsilon)^{-k}$. Это означает, что конечны нормы $C_a = ||\mathsf{a}||_{(r_a-\varepsilon)^{-1}}$, $C_b = ||\mathsf{b}||_{(r_b-\varepsilon)^{-1}}$, и при всех $k \in \mathbb{N}_+$ имеют место неравенства (49): $|a_k| < C_a(r_a - \varepsilon)^{-k}$, $|b_k| < C_b(r_b - \varepsilon)^{-k}$. Они позволяют оценить сверху компоненты свёртки элементов a и b:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \le \sum_{k=0}^{n} C_a(r_a-\varepsilon)^{-k} C_b(r_b-\varepsilon)^{k-n} =$$

$$= C_a C_b (r_a-\varepsilon)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{r_a-\varepsilon}{r_b-\varepsilon}\right)^k < C_a C_b (r_a-\varepsilon)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r_a-\varepsilon}{r_b-\varepsilon}\right)^k =$$

$$= C_a C_b (r_a - \varepsilon)^{-n} \left(1 - \frac{r_a - \varepsilon}{r_b - \varepsilon}\right)^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} |(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n|^{1/n} \le (r_a - \varepsilon)^{-1}. \tag{52}$$

Если же $r_a = r_b$, то

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \le C_a C_b (n+1)(r_a - \varepsilon)^{-n}.$$

Поэтому формула (52) остаётся верной и в этом случае.

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то из (52) следует, что ряд $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}*\mathsf{b}]$ имеет конечный радиус сходимости, и он не меньше, чем r_a.

Для произвольно выбранного числа $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим проекции $\mathsf{a}^{(n)}$ и $\mathsf{b}^{(n)}$. Согласно теореме 2, имеет место равенство для полиномов

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)} * \mathsf{b}^{(n)}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)}]\mathsf{F}[z|\mathsf{b}^{(n)}].$$

Так как n в этом равенстве произвольно, перейдём к пределу $n \to \infty$ при z, принадлежащем общему кругу сходимости всех трёх рядов, которые определяют функции $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$, $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$ и $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}*\mathsf{b}]$. Согласно замечанию 2, этот предельный переход можно пронести в правой части равенства под знак отображения F. Это приводит к равенству

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)} * \mathsf{b}^{(n)}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\mathsf{F}[z|\mathsf{b}].$$

Покажем, что предел можно пронести под знак отображения F в левой части. Для этого заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{F}[z|(\mathsf{a}*\mathsf{b})^{(n)}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}*\mathsf{b}].$$

Тогда

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a}*\mathsf{b}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\mathsf{F}[z|\mathsf{b}] = \lim_{n\to\infty}\left(\mathsf{F}[z|(\mathsf{a}*\mathsf{b})^{(n)}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)} * \mathsf{b}^{(n)}]\right),$$

где в левой части стоит аналитическая в круге с радиусом r_a функция, являющаяся пределом последовательности полиномов. Для фиксированного значения $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты разложения в степенной ряд функций, стоящих под знаком предельного перехода, равны нулю, когда $k = 0 \div n$. Следовательно, для каждого фиксированного значения номера k коэффициент разложения предельной функции равен нулю, что приводит к равенству (51). Отсюда следует, что радиус сходимости ряда, определяющего функцию $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}*\mathsf{b}]$, равен r_a, так как таким свойством обладает функция в правой части (51). ■

Теперь мы в состоянии доказать, что подалгебра $\bar{\mathfrak{C}}$ является максимальным идеалом в алгебре $\mathfrak{C}$, т.е. верна

Т е о р е м а 15. *Для любого* $\mathsf{a} \notin \bar{\mathfrak{C}}$ *существует единственный обратный элемент* $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$, *удовлетворяющий равенствам*

$$\mathsf{a}*\mathsf{b} = \mathsf{b}*\mathsf{a} = \mathsf{e}. \tag{53}$$

□ Если $\mathsf{a} \in \mathfrak{C} \setminus \bar{\mathfrak{C}}$, то он, наверняка содержится в $\mathbb{C}^\infty \setminus \bar{\mathbb{C}}$. Поэтому в $\mathbb{C}^\infty \setminus \bar{\mathbb{C}}$ существует обратный элемент b, удовлетворяющий (53). Покажем, что он содержится в $\mathfrak{C}$.

Так как $\mathsf{a} \notin \bar{\mathfrak{C}}$, то аналитическая в окрестности точки $z = 0$ функция $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$ не обращается в ноль в этой точке, $\mathsf{F}[0|\mathsf{a}] \neq 0$. Тогда в достаточно малой окрестности точки $z = 0$ функция $(\mathsf{F}[z|\mathsf{a}])^{-1}$ также является аналитической, то есть $(\mathsf{F}[z|\mathsf{a}])^{-1} \in \mathfrak{L}$. Поэтому, ввиду изоморфизма между многообразиями $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{C}$, найдётся элемент $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$ такой, что $(\mathsf{F}[z|\mathsf{a}])^{-1} = \mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$. Отсюда следует, что

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{e}] = 1 = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\mathsf{F}[z|\mathsf{b}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}]\,.$$

Сравнивая левую и правую части выписанной цепочки равенств, снова воспользовавшись изоморфизмом между многообразиями $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{C}$, заключаем, что элемент b удовлетворяет равенствам (53). ■

Для обратного элемента к элементу $\mathsf{a} \in \mathfrak{C} \setminus \bar{\mathfrak{C}}$ мы сохраним прежнее обозначение a^{-1}.

12. Аналитические функции в $\mathfrak{C}$. В п.7 мы ввели понятие об *аналитических функциях* $g(\mathsf{a})$ на $\mathbb{C}^\infty$. Выясним теперь, при каких условиях эти функции принимают значения в алгебре $\mathfrak{C}$ и их областью определения является $\mathfrak{C}$. Ответ на этот вопрос даёт следующая

Т е о р е м а 16. *Для любой аналитической функции $f(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}] \in \mathfrak{L}$, где $\mathsf{a} = \langle a_n; n \in \mathbb{N}_+\rangle \in \mathfrak{C}$, и любого элемента $\mathsf{b} = \langle b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle \in \mathfrak{C}$ такого, что его компонента b_0 находится в круге сходимости ряда $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, значения аналитической функции*

$$f(\mathsf{b}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathsf{b}^k$$

принадлежат $\mathfrak{C}$. При этом для любых $z \in \mathbb{C}$ таких, что число $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$ находится в круге сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, имеет место формула

$$f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]) = \mathsf{F}[z|f(\mathsf{b})]\,. \tag{54}$$

□ Так как b_0 находится внутри круга сходимости ряда $f(z)$, то при достаточно малых по модулю $z \in \mathbb{C}$ число $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$ также находится в круге сходимости этого ряда. Следовательно, для этих z сходится ряд

$$f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\right)^k\,. \tag{55}$$

В условиях теоремы, используя линейность и мультипликативность отображения $\mathsf{F}[z|\cdot]$, этот ряд преобразуется следующим образом

$$f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathsf{F}[z|\mathsf{b}^k] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{F}[z|a_k \mathsf{b}^k] =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \mathsf{F}[z|\sum_{k=0}^{m} a_k \mathsf{b}^k] = \lim_{m\to\infty} \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}]\,, \tag{56}$$

где мы воспользовались для краткости обозначений определением (33) операции суперпозиции элементов из $\mathbb{C}^\infty$.

Остаётся доказать, что предел можно пронести под знак отображения F. Для этого заметим, что в замыкании достаточно малой окрестности точки b_0 ряд (55) сходится равномерно к аналитической функции $f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}])$, которая ограничена в этой окрестности некоторой постоянной C, то есть $|\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]| < C$. Следовательно, последовательность функций

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}])^k \equiv \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}]\,, \quad m \in \mathbb{N}$$

равномерно ограничена по m в этой окрестности.

Для каждой пары $m, n \in \mathbb{N}$ введём в рассмотрение полиномы $\mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}]$ степени $n \in \mathbb{N}$. Так как для каждого фиксированного $l = 0 \div n$ имеет место $([\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}]^{(n)})_l = (\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})_l$, то каждая такая компонента стремится к $(\mathsf{a} \circ \mathsf{b})_l$ при $m \to \infty$ согласно теореме 8. Тогда полиномы $\mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}]$ стремятся при $n \to \infty$ к $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}]$ поточечно, и поэтому последовательность полиномов $\langle \mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}]; m \in \mathbb{N}\rangle$ также является равномерно ограниченной по m при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ в той же окрестности точки $z = 0$.

Таким образом, на основании приведенного рассуждения последовательность функций $\langle\, \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}] - \mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}]; m \in \mathbb{N}\,\rangle$ является равномерно ограниченной в замыкании достаточно малой окрестности точки $z = 0$. Кроме того, эта последовательность разностей является сходящейся, так как первое слагаемое сходится согласно (55), (56), а второе – ввиду того, что каждый из коэффициентов полиномов

$$\mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}] = \sum_{l=1}^{n} z^l \left(\sum_{k=0}^{m} a_k \mathsf{b}^k \right)_l$$

имеет предел

$$\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathsf{b}^k \right)_l = (f(\mathsf{b}))_l = (\mathsf{a} \circ \mathsf{b})_l\,.$$

Таким образом, к последовательности $\langle\, \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}] - \mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}]; m \in \mathbb{N}\,\rangle$ применима теорема Витали [11], согласно которой предел всякой сходящейся и равномерно ограниченной в замкнутой области последовательности аналитических функций является аналитической функцией. Следовательно, каждая функция

$$u_n(z) = \lim_{m \to \infty} \left(\mathsf{F}[z|\sum_{k=0}^{m} \mathsf{b}^k a_k] - \mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}] \right)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

– аналитическая в малой окрестности точки $z = 0$. Кроме того, $u_n^{(l)}(0) = 0$ при $l = 0, 1, ..., n$, так как этим свойством обладает каждая из функций под знаком предельного перехода.

Используя (55), (56), представим функцию $f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}])$ в виде

$$f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]) = u_n(z) + \lim_{m \to \infty} \sum_{l=0}^{n} z^l \left(\sum_{k=0}^{m} a_k \mathsf{b}^k \right)_l = \mathsf{F}[z|(\mathsf{a} \circ \mathsf{b})^{(n)}] + u_n(z)\,.$$

Вычислим на основании этого представления производную n-го порядка функции $f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}])$ в точке $z = 0$:

$$\left(\frac{d^n}{dz^n} f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]) \right)_{z=0} = \left(\frac{d^n}{dz^n} \sum_{l=0}^{n} z^l (f(\mathsf{b}))_l \right)_{z=0} = n!(\mathsf{a} \circ \mathsf{b})_n\,.$$

Таким образом, последовательность $\langle (\mathsf{a} \circ \mathsf{b})_n; n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ является последовательностью коэффициентов разложения аналитической функции $\lim_{m\to\infty} \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}]$ в степенной ряд. Тогда при достаточно малых по модулю $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a} \circ \mathsf{b}] = \mathsf{F}[z|f(\mathsf{b})]\,,$$

что завершает доказательство формулы (54) в круге достаточно малого радиуса. Распространение этой формулы на весь круг сходимости ряда, определяющего функцию $\mathsf{F}[z|f(\mathsf{b})]$, достигается аналитическим продолжением. ■

П р и м е р 1. Рассмотрим аналитическую функцию $g(\mathsf{a})$, определяемую, согласно (31), формулой

$$g(\mathsf{a}) = (\mathsf{e} - \mathsf{a})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{a}^n\,, \tag{57}$$

на основе аналитической функции $g(z) = (1-z)^{-1}$. Эта функция, наверняка, имеет смысл для $\mathsf{a} \in \bar{\mathfrak{C}}$. Однако, её значения также определены для тех $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$, у которых $|a_0| < 1$. Для этой функции формула (54) даёт

$$\mathsf{F}[z|(\mathsf{e} - \mathsf{a})^{-1}] = (1 - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}])^{-1}\,. \tag{58}$$

Тогда при $a_0 = 0$ m-й коэффициент ряда по степеням z для функции $f(z) = (1 - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}])^{-1}$ равен

$$\left((\mathsf{e} - \mathsf{a})^{-1}\right)_m = \sum_{n=0}^{m} (\mathsf{a}^n)_m\,. \tag{59}$$

Коэффициенты разложения функции $(\mathsf{e} - \mathsf{a})^{-1}$ в ряд положительны. Используя определение неравенств на алгебре $\mathfrak{C}$ и применяя первое из неравенств (37) и неравенство (38), находим

$$|\,(\mathsf{e} - \mathsf{a})^{-1}\,| = |\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{a}^n| \le \sum_{n=0}^{\infty} |\mathsf{a}^n| \le \sum_{n=0}^{\infty} |\mathsf{a}|^n \le (\mathsf{e} - |\mathsf{a}|)^{-1}\,,$$

так как $|\mathsf{e}| = \mathsf{e}$.

Таким образом, для любого $\mathsf{a} \in \bar{\mathfrak{C}}$ имеет место

$$|(\mathsf{e} - \mathsf{a})^{-1}| \le (\mathsf{e} - |\mathsf{a}|)^{-1}\,. \tag{60}$$

13. Топологические свойства алгебры $\mathfrak{C}$. Для получения оценок на основе введённых выше метрических характеристик пространства $\mathfrak{C}$ изучим их связь с операцией $*$-умножения. Прежде всего рассмотрим свойства умножения по отношению к расстоянию $\mathsf{D}[\cdot]$.

Т е о р е м а 17. *Для любых двух элементов* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$, $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$ *имеет место неравенство*

$$\mathsf{D}[\mathsf{a} * \mathsf{b}] \le \begin{cases} 2\max\{\mathsf{D}[\mathsf{a}], \mathsf{D}[\mathsf{b}]\} & , \min\{\mathsf{D}[\mathsf{a}], \mathsf{D}[\mathsf{b}]\} \le 2\,; \\ \mathsf{D}[\mathsf{a}]\mathsf{D}[\mathsf{b}] & , \min\{\mathsf{D}[\mathsf{a}], \mathsf{D}[\mathsf{b}]\} \ge 2\,. \end{cases} \tag{61}$$

□ Положим, для определённости, что $\mathsf{D}[\mathsf{a}] \le \mathsf{D}[\mathsf{b}]$. Справедливы следующие неравенства

$$|(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \le \sum_{k=0}^{n} \mathsf{D}^k[\mathsf{a}]\mathsf{D}^{n-k}[\mathsf{b}]\,. \tag{62}$$

Найдём максимум по x функции $\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$ вещественной переменной x в области при $y \ge x \ge 0$. Так как производная по x неотрицательна, то максимум достигается на краю области, а именно – при $x = y$, и он равен

$$\max\left\{\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}; x \le y\right\} = (n+1)y^n\,.$$

Тогда максимум выражения в правой части (62) достигается при $\mathsf{D}[\mathsf{a}] = \mathsf{D}[\mathsf{b}]$:

$$|(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n| \le (n+1)\mathsf{D}^n[\mathsf{b}]\,.$$

Следовательно,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n|^{1/n} \le \mathsf{D}[\mathsf{b}] \sup_{n\in\mathbb{N}}\{(n+1)^{1/n}\} = 2\mathsf{D}[\mathsf{b}]\,.$$

Так как $|a_0 b_0| = |a_0| \cdot |b_0| \le \mathsf{D}[\mathsf{a}]\mathsf{D}[\mathsf{b}]$, то

$$\mathsf{D}[\mathsf{a} * \mathsf{b}] \le \max\{\mathsf{D}[\mathsf{a}]\mathsf{D}[\mathsf{b}], 2\mathsf{D}[\mathsf{b}]\} = \left\{\begin{array}{ll} 2\mathsf{D}[\mathsf{b}] & , \mathsf{D}[\mathsf{a}] \le 2 \\ \mathsf{D}[\mathsf{a}]\mathsf{D}[\mathsf{b}] & , \mathsf{D}[\mathsf{a}] \ge 2 \end{array}\right. . \quad \blacksquare$$

С л е д с т в и е. *Для степеней произвольного элемента* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$ *имеет место неравенство*

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}^n] \le \left\{\begin{array}{ll} \mathsf{D}^n[\mathsf{a}] & , \text{если } \mathsf{D}[\mathsf{a}] \ge 2\,; \\ 2^{n-1}\mathsf{D}[\mathsf{a}] & , \text{если } \mathsf{D}[\mathsf{a}] \le 2\,. \end{array}\right. \tag{63}$$

□ При $n = 2$ неравенство (63) имеет вид (61) при $\mathsf{b} = \mathsf{a}$. Индукционный шаг по порядку степени n при $\mathsf{D}[\mathsf{a}] \le 2$ даёт

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}^{n+1}] = \mathsf{D}[\mathsf{a} * \mathsf{a}^n] \le 2\max\{\mathsf{D}[\mathsf{a}], \mathsf{D}[\mathsf{a}^n]\} \le 2^n\mathsf{D}[\mathsf{a}]\,,$$

так как по предположению индукции $\mathsf{D}[\mathsf{a}^n] \le 2^{n-1}\mathsf{D}[\mathsf{a}]$ и, следовательно, в любом случае $\max\{\mathsf{D}[\mathsf{a}], \mathsf{D}[\mathsf{a}^n]\} \le 2^{n-1}\mathsf{D}[\mathsf{a}]$.

При $\mathsf{D}[\mathsf{a}] \ge 2$, рассуждая аналогичным образом, получаем

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}^{n+1}] \le \mathsf{D}[\mathsf{a}] \cdot \mathsf{D}[\mathsf{a}^n] \le \mathsf{D}^n[\mathsf{a}]\,. \quad \blacksquare$$

Алгебра $\mathfrak{C}$ обладает неприятным свойством. Оказывается, что топология метрического пространства $\mathfrak{C}$ настолько сильна, что $\mathfrak{C}$ не является топологической алгеброй относительно этой топологии. На это указывает следующий пример.

П р и м е р 2. Рассмотрим элемент $\mathsf{b} = \langle b_l > 0; l \in \mathbb{N}_+\rangle$ алгебры $\mathfrak{C}$ с положительными компонентами, для которого существует число $\lambda > 0$ такое, что $b_l \ge \lambda^l$, $l \in \mathbb{N}_+$. Пусть $\langle \mathsf{a}_n = \langle 0, \lambda_n^l; l \in \mathbb{N}\rangle \in \mathfrak{C}; n \in \mathbb{N}\rangle$ – последовательность элементов алгебры, стремящаяся к нулю относительно расстояния $\mathsf{D}[\cdot]$. Так как $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$, то при достаточно больших номерах n имеем $\lambda_n < \lambda$, и поэтому справедливы следующие оценки снизу

$$(\mathsf{a}_n * \mathsf{b})_l = \sum_{k=0}^{l} (\mathsf{a}_n)_k \, b_{l-k} \geq \lambda^l \sum_{k=1}^{l} (\lambda_n/\lambda)^k = \lambda_n \lambda^{l-1} \frac{1-(\lambda_n/\lambda)^l}{1-\lambda_n/\lambda} .$$

Тогда

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}_n * \mathsf{b}] \geq \lambda \sup_l \left[x \frac{1-x^l}{1-x} \right]^{1/l} \equiv C(\mathsf{b}) > 0 \,, \quad x = \lambda_n/\lambda < 1 \,,$$

так как

$$\lim_{l \to \infty} \left[x \frac{1-x^l}{1-x} \right]^{1/l} = 1 \,.$$

Таким образом, существует число $C(\mathsf{b}) > 0$, для которого имеет место

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}_n * \mathsf{b}] \geq C(\mathsf{b}) > 0 \,,$$

в то время как $\mathsf{D}[\mathsf{a}_n] \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим также, что норма $||\cdot||_\rho$ элементов $\mathsf{a}_n * \mathsf{b}$ с показателем $\rho < \lambda$ в приведенном примере равна бесконечности. Наоборот, при $\rho \geq \lambda$, $||\mathsf{a}_n * \mathsf{b}||_\rho \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, в общем случае, операция $*$-умножения не является непрерывной на $\mathfrak{C}$. Однако, она становится непрерывной в некотором более узком смысле относительно более слабой топологии $\mathfrak{T}_\rho$ с подходящим показателем ρ, порождающее семейство окрестностей нуля которой получается таким ограничением семейства $\{V'_{\rho',\varepsilon}; \rho' > 0, \varepsilon' > 0\}$, которое состоит из окрестностей $V_{\rho',\varepsilon'}$ с $\rho' > \rho$. Для точной формулировки утверждения введём следующее понятие.

Величину $\tau(\mathsf{a}) = \sup\{\rho : ||\mathsf{a}||_\rho < \infty\}$ назовём *показателем* элемента $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$. Элемент a содержится в $\mathfrak{C}_\rho$, если $\rho > \tau(\mathsf{a})$. При этом норма $||\mathsf{a}||_{\tau(\mathsf{a})}$ может быть как конечной, так и бесконечной. Обратная величина $\tau^{-1}(\mathsf{a})$ является радиусом сходимости ряда $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$. Справедлива

Т е о р е м а 18. *Для каждой пары элементов* a *и* b *из* $\mathfrak{C}$ *имеет место равенство* $\tau(\mathsf{a} * \mathsf{b}) = \max\{\tau(\mathsf{a}), \tau(\mathsf{b})\}$.

□ Доказательство основано на формуле (51). Она применима при любом z внутри общего круга сходимости рядов $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$ и $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$, то есть при $|z| < \min\{\tau^{-1}(\mathsf{a}), \tau^{-1}(\mathsf{b})\}$. Тогда ряд $\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}]$ также сходится. Обратное рассуждение тоже верно. Поэтому радиусом сходимости ряда $\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}]$ является $\min\{\tau^{-1}(\mathsf{a}), \tau^{-1}(\mathsf{b})\}$. ■

Из неё также следует, что непрерывность операции умножения имеет смысл изучать только относительно нормы $||\cdot||_\rho$, у которой показатель ρ не меньше, чем максимальный показатель сомножителей. В то же время, если взять квадрат элемента $\mathsf{a} = \langle \sigma^n; n \in \mathbb{N}_+ \rangle \in \mathfrak{C}_\sigma$ с $||\mathsf{a}||_\sigma = 1$, то он уже не содержится в $\mathfrak{C}_\sigma$, так как $(\mathsf{a}^2)_n = \sigma^n(n+1)$, а содержится в $\mathfrak{C}_{\sigma+\varepsilon}$ при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$. Этот пример указывает на то, что показатель нормы должен быть строго больше показателей сомножителей. Такое свойство непрерывности является следствием следующего утверждения.

Т е о р е м а 19. *Для любых двух элементов* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_\rho$ *и* $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}_\sigma$ *с* $\rho < \sigma$, *их произведение* $\mathsf{a} * \mathsf{b}$ *содержится в* $\mathfrak{C}_\sigma$ *и имеет место неравенство*

$$||\mathsf{a} * \mathsf{b}||_\sigma \leq \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)^{-1} ||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\sigma \,. \tag{64}$$

□ Утверждение теоремы следует из следующей цепочки неравенств:

$$|(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |b_{n-k}| \leq ||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\sigma \sum_{k=0}^{n} \rho^k \sigma^{n-k} <$$

$$< \sigma^n ||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\sigma (1 - \rho/\sigma)^{-1} \ .$$

Откуда

$$||\mathsf{a} * \mathsf{b}||_\sigma \leq ||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\sigma (1 - \rho/\sigma)^{-1} \ . \quad \blacksquare$$

С л е д с т в и е. *Пусть* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_\rho$ *и число* $\sigma > \rho$. *Тогда имеет место неравенство*

$$||\mathsf{a}^l||_\sigma \leq ||\mathsf{a}||_\sigma \left(\frac{||\mathsf{a}||_\rho}{1 - \rho/\sigma} \right)^{l-1} , \quad l \in \mathbb{N} . \tag{65}$$

□ Доказательство проводится индукцией по $l \in \mathbb{N}$. Индукционный шаг от значения l к $(l+1)$ строится на основе формулы (64), где полагается $\mathsf{b} = \mathsf{a}^l$, и для этого элемента предполагается, что он содержится в $\mathfrak{C}_\sigma$ и для его нормы справедливо неравенство (65). Используя это неравенство, имеем

$$||\mathsf{a}^{l+1}||_\sigma = ||\mathsf{a} * \mathsf{b}||_\sigma \leq \frac{||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\sigma}{1 - \rho/\sigma} \leq ||\mathsf{a}||_\sigma \left(\frac{||\mathsf{a}||_\rho}{1 - \rho/\sigma} \right)^{l} , \quad l \in \mathbb{N} . \quad \blacksquare$$

Несмотря на то, что произведения всех пар элементов из пространства $\mathfrak{C}_\sigma$ таких, что, по крайней мере, один элемент пары имеет конечную норму $||\cdot||_\rho$, $\rho < \sigma$, принадлежат $\mathfrak{C}_\sigma$, как показывает пример, приведенный выше, пространство $\mathfrak{C}_\sigma$ не замкнуто относительно $*$-умножения. Иными словами, никакое из пространств $\mathfrak{C}_\rho$, $\rho > 0$ не является алгеброй, и это приводит к некоторому неудобству при получении априорных оценок в терминах нормы $||\cdot||_\rho$ с фиксированным значением показателя. Вместе с тем, на основании теоремы 18, линейное многообразие $\mathfrak{P}_\tau$, состоящее из элементов, показатели которых превосходят $\tau > 0$, является подалгеброй алгебры $\mathfrak{C}$ и, более того, её идеалом.

Из теоремы 19 немедленно вытекает

Т е о р е м а 20. *Пусть* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_\rho$ *и* $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}_\sigma$. *Тогда двухместная функция* $f(\mathsf{x},\mathsf{y}) = (\mathsf{a}+\mathsf{x})*(\mathsf{b}+\mathsf{y})$, $\rho < \sigma$ *непрерывна в точке* $\langle \mathsf{x},\mathsf{y} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle$ *относительно нормы* $||\cdot||_\sigma$ *при ограничении этой функции на такие* x *и* y, *которые подчинены условиям* $\rho > \tau(\mathsf{x}) \geq \tau(\mathsf{a})$ *и* $\sigma > \tau(\mathsf{y}) \geq \tau(\mathsf{b})\}$ *соответственно.*

□ Пусть a и b – элементы из $\mathfrak{C}$ и числа ρ, σ такие, что $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_\rho$, $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}_\sigma$, $\rho < \sigma$. Тогда $\mathsf{a} * \mathsf{b} \in \mathfrak{C}_\sigma$. В условиях теоремы $\mathsf{x} \in \mathfrak{C}_\rho$, $\mathsf{y} \in \mathfrak{C}_\sigma$ и $\mathsf{a} * \mathsf{y} \in \mathfrak{C}_\sigma$, $\mathsf{b} * \mathsf{x} \in \mathfrak{C}_\sigma$.

Пусть, далее, число $\varepsilon > 0$ произвольно. Используя (64), оценим сверху норму изменения функции при $||\mathsf{x}||_\rho < \varepsilon$, $||\mathsf{y}||_\sigma < \varepsilon$:

$$||(\mathsf{a}+\mathsf{x}) * (\mathsf{b}+\mathsf{y}) - \mathsf{a} * \mathsf{b}||_\sigma = ||\mathsf{a} * \mathsf{y} + \mathsf{b} * \mathsf{x} + \mathsf{x} * \mathsf{y}||_\sigma \leq$$

$$\leq ||\mathsf{a} * \mathsf{y}||_\sigma + ||\mathsf{b} * \mathsf{x}||_\sigma + ||\mathsf{x} * \mathsf{y}||_\sigma \leq$$

$$\leq \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)^{-1} [||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{y}||_\sigma + ||\mathsf{b}||_\sigma ||\mathsf{x}||_\rho + ||\mathsf{x}||_\rho ||\mathsf{y}||_\sigma] \leq$$

$$\leq \varepsilon \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)^{-1} [||\mathsf{a}||_\rho + ||\mathsf{b}||_\sigma + \varepsilon] \ . \quad \blacksquare$$

Вместе с тем, можно ввести другое понятие "непрерывности". Определим линейный оператор $\mathsf{S}(\lambda) : \mathfrak{C} \mapsto \mathfrak{C}$, зависящий от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. Положим для любого элемента $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$

$$(\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{a})_n = \lambda^n a_n \,.$$

Этот оператор переводит каждое произведение элементов a и b алгебры $\mathfrak{C}$ в произведение образов, то есть

$$\mathsf{S}(\lambda)(\mathsf{a} * \mathsf{b}) = (\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{a}) * (\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{b})$$

и $\mathsf{S}(\lambda) \to \mathbf{1}$ при $\lambda \to 0$, где предел понимается в смысле метрики в $\mathfrak{C}$ так, что для любого элемента $\mathsf{a} = \langle a_n; n \in \mathbb{N} \rangle \in \mathfrak{C}$ имеет место

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathsf{D}[\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{a}] = \mathsf{D}[\mathsf{a}] \,.$$

В частности, если $\mathsf{a} \in \bar{\mathfrak{C}}$, то

$$\mathsf{D}[\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{a}] = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\, (\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{a})_n \,|^{1/n} = |\lambda| \mathsf{D}[\mathsf{a}] \,.$$

Эти свойства можно рассматривать как обобщение понятия непрерывности.

Учитывая, что норма $\mathsf{D}[\bar{\mathsf{b}}]$ может быть меньше показателя элемента $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$, неравенству (64) можно придать более крайнюю форму.

Т е о р е м а 21. *Для любых двух элементов* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_\rho$ *и* $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}_\sigma$, *где число* σ *выбрано настолько большим, что* $\mathsf{D}[\bar{\mathsf{b}}] < \sigma$, *произведение* $\mathsf{a} * \mathsf{b}$ *содержится в* $\mathfrak{C}_\sigma$, *и имеет место неравенство*

$$||\mathsf{a} * \mathsf{b}||_\sigma \leq ||\mathsf{a}||_\sigma \left[|b_0| + \frac{\mathsf{D}[\bar{\mathsf{b}}]}{\sigma} \left(1 - \frac{\mathsf{D}[\bar{\mathsf{b}}]}{\sigma}\right)^{-1} \right] . \tag{66}$$

□ Так как норма $||\mathsf{a}||_\sigma$ при $||\mathsf{a}||_\rho < \infty$ наследственно конечна, то справедлива оценка

$$|(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}| \cdot |b_k| \leq \sigma^n ||\mathsf{a}||_\sigma \left(|b_0| + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \sigma^{-k} \right) \leq$$

$$\leq \sigma^n ||\mathsf{a}||_\sigma \left[|b_0| + \frac{\mathsf{D}[\bar{\mathsf{b}}]}{\sigma} \left(1 - \frac{\mathsf{D}[\bar{\mathsf{b}}]}{\sigma}\right)^{-1} \right] .$$

Откуда следует (66). ■

С л е д с т в и е. *Пусть* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_\rho$ *с* $\rho > \mathsf{D}[\mathsf{a}]$. *Тогда имеет место неравенство*

$$||\bar{\mathsf{a}}^l||_\rho \leq ||\bar{\mathsf{a}}||_\rho \left[|a_0| + \frac{\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]}{\rho} \left(1 - \frac{\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]}{\rho}\right)^{-1} \right]^{l-1} , \quad l \in \mathbb{N} \,. \tag{67}$$

□ Доказательство аналогично доказательству следствия из теоремы 19. ■

14. Суперпозиции аналитических функций. Бинарная операция суперпозиции (см. (33)) пары элементов из $\mathbb{C}^\infty$, введённая в п.7, применима не для всех пар $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b} \rangle$. Для её выполнимости необходимо, чтобы $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$ и значение нулевой компоненты b_0 элемента b находилось внутри круга сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Таким образом, она не определена для всех пар из $\mathfrak{C}$ и, следовательно, не порождает полугруппу на $\mathfrak{C}$, как это имело место на многообразии $\mathbb{C}^{(0)}$ финитных последовательностей и реализуется на многообразии $\mathfrak{C}^{(0)}$, состоящем из последовательностей коэффициентов целых функций. Тем не менее, в этом пункте мы исследуем возможность повторного применения операции суперпозиции для произвольной конечной последовательности $\langle \mathsf{a}_i \in \mathfrak{C}; i = 1 \div n \rangle$ и связь этих операций с суперпозициями последовательности аналитических функций $\langle f_i(z) : i = 1 \div n \rangle$, каждая из которых определяется соответствующим элементом a_j, $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}_j]$, $j = 1 \div n$. Прежде всего мы обобщим формулу суперпозиции (30), полученную в п.6 для полиномов.

Формула (54) следующим образом записывается в терминах операции суперпозиции (33) пары $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b} \rangle$ элементов из $\mathfrak{C}$.

$$(f \circ g)(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a} \circ \mathsf{b}]\,, \qquad (68)$$

где $f(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$, $g(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$. Докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 22. *Пусть* $\langle f_1(z), ..., f_n(z) \rangle$ *– последовательность функций из* $\mathfrak{L}$ *при* $z \in \mathbb{C}$ *и* $\langle \mathsf{a}_1, ..., \mathsf{a}_n \rangle$ *– последовательность элементов из* $\mathfrak{C}$ *таких, что* $f_i(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}_i]$, $i = 1 \div n$. *Причём, каждое из чисел* $\alpha_i = f_i(\alpha_{i-1})$ *содержится в круге сходимости соответствующей функции* $f_{i+1}(z)$, $i = 1 \div n-1$, $\alpha_0 = 0$. *Тогда в точках* z, *принадлежащих общему для всех функций* $f_i(z)$ *кругу сходимости определяющих их рядов*

$$f_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathsf{a}_i)_k \, z^k\,, \quad i = 1 \div n$$

справедлива формула суперпозиции

$$f_n\left(f_{n-1}(...f_2(f_1(z)))...)\right) = (f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_2 \circ f_1)(z) = F[z|\mathsf{a}_n \circ \mathsf{a}_{n-1} \circ ... \circ \mathsf{a}_2 \circ \mathsf{a}_1]\,. \qquad (69)$$

□ Доказательство проводится индукцией по длине последовательности n. При $n = 2$ формула верна в силу формулы (54), представленной в виде (68), положив в ней $f = f_2$, $g = f_1$. Индукционный шаг от $(n-1)$ к длине последовательности n получается из этой же формулы (57), положив в ней $f = f_n$, $g = f_{n-1} \circ ... \circ f_1$, что возможно в силу условия теоремы, так как $\alpha_{n-1} = (f_{n-1} \circ ... \circ f_1)(0)$ принадлежит кругу сходимости ряда, определяющего функцию f_n. ■

Формула (69) является основой алгоритма вычисления коэффициентов разложения в степенной ряд суперпозиции $f_n(f_{n-1}(...f_1(z)...))$ аналитических функций, представленных степенными рядами. В этой формуле операции суперпозиции элементов из $\mathfrak{C}$ могут быть реализованы, в основном, двумя эквивалентными методами. В обоих случаях, вычисление компонент суперпозиции состоит из выполнения набора элементарных алгебраических операций.

Первый метод связан представлением каждой из суперпозиций на основе их определения в виде формулы (33). При этом каждая компонента суперпозиции $\mathsf{a}_n \circ \mathsf{a}_{n-1} \circ ... \circ \mathsf{a}_1$ определяется, вообще говоря, бесконечным рядом. Исключительным в этом смысле является случай, когда $(\mathsf{a})_i = 0$ при $i = 1 \div (n-1)$.

Второй метод основан на представлении операции суперпозиции посредством формулы (35). Для этого необходимо отделить у каждого из элементов a_i, определяющих функции f_i, нулевую компоненту $(\mathsf{a}_i)_0$, $\mathsf{a}_i = (\mathsf{a}_i)_0\mathsf{e} + \bar{\mathsf{a}}_i$, $i = 1 \div n$ и, воспользовавшись теоремой 8, вычислить суперпозицию $\mathsf{a}_n \circ ... \circ \mathsf{a}_1$. В рамках этого метода все числовые ряды, определяющие компоненты суперпозиции, конечны. Однако, нетривиальным моментом этой схемы алгоритма является вычисление значений функций f_i и их производных в точках α_i, $i = 1 \div n$, которые входят, согласно (35), в выражение операции суперпозиции, так как эти значения определяются бесконечными числовыми рядами.

В рамках обоих методов вычисления имеется возможность построения рекуррентной процедуры для последовательного определения каждой последующей l-й компоненты на основе компонент суперпозиции $\mathsf{a}_n \circ ... \circ \mathsf{a}_1$ с номерами, не превосходящими l.

15. Неравенства для компонент суперпозиций. Теперь мы переходим к задаче – получению оценок коэффициентов разложения на основе описанной выше схемы вычисления. Кроме того, что они сами по себе представляют самостоятельный интерес, на их основе возможно оценивать точность приближений при вычислении суперпозиции последовательности аналитических функций $\langle f_i(z); i = 1 \div n\rangle$, даваемых заменой каждой из функций конечным отрезком соответствующего степенного ряда.

Нам потребуется комбинаторное утверждение, при доказательстве которого как раз используется производящая функция. Обозначим посредством $N_{n,l}$ – число последовательностей $\langle k_1, ..., k_l\rangle$ таких, что $n = k_1 + k_2 + ... + k_l$, где $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1 \div l$ при $l \le n$, где $l, n \in \mathbb{N}$.

Т е о р е м а 23. *Функция $N_{n,l}$ имеет следующий вид:*

$$N_{n,l} = \frac{(n-1)!}{(n-l)!} \tag{70}$$

□ Рассмотрим в алгебре $\mathbb{C}^\infty$ элемент $\mathsf{x} = \langle a_k = 1; k \in \mathbb{N}_+\rangle$. Тогда, принимая во внимание (24), число $N_{n,l}$ представляется следующей формулой в терминах этого элемента:

$$N_{n,l} = \sum_{\substack{k_1,...,k_l \ge 1:\\ k_1+...+k_k=n}} \left(\bar{\mathsf{x}}^l\right)_n .$$

Введём в рассмотрение производящую функцию, связанную с $N_{n,l}$:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n N_{n,l} .$$

Число $N_{n,l}$ следующим образом выражается посредством производящей функции $F(z)$:

$$N_{n,l} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}F(z)\right]_{z=0} . \tag{71}$$

Так как $\mathsf{F}[z|\bar{\mathsf{x}}] = z/(1-z)$, то производящая функция равна

$$F(z) = \mathsf{F}[z|\bar{\mathsf{x}}^l] = (\mathsf{F}[z|\bar{\mathsf{x}}])^l = \left(\frac{z}{1-z}\right)^l .$$

Тогда на основании (71) получаем

$$N_{n,l} = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^l\right]_{z=0} = \frac{1}{n!}\binom{n}{l}\left(\frac{d^l}{dz^l}z^l\right)_{z=0}\left(\frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}(1-z)^{-l}\right)_{z=0} =$$

$$= \frac{1}{(n-l)!}\left(\frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}(1-z)^{-l}\right)_{z=0} = \frac{(n-1)!}{(n-l)!}. \quad \blacksquare$$

Формула (70) позволяет найти в терминах расстояния $\mathsf{D}[\cdot]$ довольно общие априорные оценки производных произвольной аналитической функции $f(z)$, представленной рядом (1).

Т е о р е м а 24. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = 0$. Тогда для точек z из круга сходимости ряда (1) таких, что $|z| < (2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}])^{-1}$, $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$, при $l \in \mathbb{N}$ имеют место оценки*

$$|f^{(l)}(z)| \le \frac{2^l l! \mathsf{D}^l[\bar{\mathsf{a}}]}{1 - 2|z|\,\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]}. \tag{72}$$

□ Так как для биномиальных коэффициентов справедлива оценка $\binom{n}{l} < 2^l$ и $f^{(l)}(z) = \sum_{k=l}^{\infty}\frac{k!}{(k-l)!}a_k z^{k-l}$, то утверждение теоремы вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$|f^{(l)}(z)| \le \sum_{k=l}^{\infty}|a_k|\frac{k!}{(k-l)!}|z|^{k-l} \le 2^l l! \sum_{k=0}^{\infty} 2^k |a_{k+l}|\,|z|^k \le$$

$$\le 2^l l! \mathsf{D}^l[\bar{\mathsf{a}}]\sum_{k=0}^{\infty}(2|z|\cdot \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}])^k = \frac{2^l l! \mathsf{D}^l[\bar{\mathsf{a}}]}{1-2|z|\cdot\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $l \ge 1$, $k \in \mathbb{N}_+$ имеет место оценка $|a_{k+l}| \le \mathsf{D}^{k+l}[\bar{\mathsf{a}}]$. ■

Используя полученные ограничения для производных, мы теперь в состоянии получить оценку коэффициентов разложения в степенной ряд суперпозиции двух функций f и g в терминах соответствующих им последовательностей коэффициентов разложения $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$, $\mathsf{b} = \langle b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$.

Эти оценки разумно получать в терминах норм $||\cdot||_\rho$, $\rho > 0$, так как скорость сходимости к нулю метрической характеристики $\mathsf{D}[\cdot]$, как уже отмечалось, существенно зависит от направления в $\mathfrak{C}$.

В соответствии с тем, что имеется два различных представления (33) и (36) для операции суперпозиции двух последовательностей, нами будет получено два типа оценок. Следующая теорема даёт те ограничения на коэффициенты разложения функции $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}\circ\mathsf{b}]$ в степенной ряд, которые устанавливаются на основе формулы (33). Её формулировка содержит два варианта оценки, каждая из которых может быть выбрана в качестве лучшей, в зависимости от соотношения между величинами $\rho||\bar{\mathsf{a}}||_\rho$ и $\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]$.

Т е о р е м а 25. *Пусть положительные числа ρ и σ таковы, что $\sigma > \rho$ и нормы $||\bar{\mathsf{a}}||_\rho$, $||\mathsf{b}||_\rho$ конечны. Пусть, далее, пара $\langle\alpha, \xi\rangle$ положительных чисел α и ξ равна: либо $\langle||\bar{\mathsf{a}}||_\rho, \rho\rangle$,* *либо* $\langle 1, \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\rangle$. *Тогда для нормы* $||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma$ *элемента* $\mathsf{a}\circ\mathsf{b}$ *алгебры* $\mathfrak{C}$, *в первом случае, при* $||\mathsf{b}||_\rho < \rho^{-1} - \sigma^{-1}$, *и во втором случае, при* $||\mathsf{b}||_\rho \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] < (1-\rho/\sigma)$, *справедлива следующая оценка сверху:*

$$||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma \le |a_0| + \frac{\alpha\xi||\mathsf{b}||_\sigma}{(1-\xi||\mathsf{b}||_\rho(1-\rho/\sigma)^{-1})} \tag{73}$$

□ Заметим, что $|a_l| \le \alpha\xi^l$, $l \in \mathbb{N}$, где α и ξ – указаны в условии теоремы. Используя неравенство (65), находим

$$||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma = \left|\left|\sum_{l=0}^{\infty} a_l \mathsf{b}^l\right|\right|_\sigma \le |a_0| + \sum_{l=1}^{\infty} |a_l|\cdot||\mathsf{b}^l||_\sigma \le$$

$$\le |a_0| + \alpha\xi||\mathsf{b}||_\sigma \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\xi||\mathsf{b}||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^l .$$

Суммирование последнего ряда приводит к неравенству (73), а выполнимость такого суммирования возможна при $\xi||\mathsf{b}||_\rho(1-\rho/\sigma)^{-1} < 1$, что эквивалентно условиям в формулировке теоремы. ■

Заметим, что в том случае, когда последовательность $\mathsf{a}\circ\mathsf{b}$ является распределением вероятностей дискретной случайной величины, необходима выполнимость неравенства $\mathsf{D}[\mathsf{a}\circ\mathsf{b}] \le 1$. Для этого случая оценка (73) представляет интерес, когда $\sigma < 1$. Тогда само распределение вероятностей убывает не медленнее, чем экспоненциально.

Оценка (73) кажется довольно грубой, так как она не содержит явной зависимости от расположения точки b_0, в то время как оно весьма существенно, согласно теореме 16, влияет на сходимость ряда $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}\circ\mathsf{b}]$. Перейдём теперь к получению оценок второго типа для нормы $||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma$, в которых появляется зависимость от величины $|b_0|$. Они получаются на основе представления операции суперпозиции формулой (35). Справедлива

Т е о р е м а 26. *Пусть положительные числа* ρ *и* σ *таковы, что* $\sigma > \rho$ *и норма* $||\mathsf{b}||_\rho$ *конечна. Тогда для нормы* $||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma$ *элемента* $\mathsf{a}\circ\mathsf{b}$ *алгебры* $\mathfrak{C}$ *при* $\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\rho < (1-\rho/\sigma)/2$ *справедлива следующая оценка сверху:*

$$||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma \le |f(a_0)| + \frac{2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma}{(1-2|b_0|\cdot\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}])\left(1-2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\rho(1-\rho/\sigma)^{-1}\right)}, \tag{74}$$

где $f(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$.

□ Оценка нормы суперпозиции $\mathsf{a}\circ\mathsf{b}$ получается на основе её представления формулой (35) и применения (65) и (72):

$$||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma \le |f(b_0)| + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}|f^{(l)}(b_0)|\cdot||\bar{\mathsf{b}}^l||_\sigma \le$$

$$\le |f(b_0)| + \frac{2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma}{1-2|b_0|\cdot\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^l =$$

$$= |f(b_0)| + \frac{2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma}{(1-2|b_0|\cdot\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}])(1-2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\rho(1-\rho/\sigma)^{-1})}. \quad ■$$

Заметим, что оба типа оценок являются очень грубыми, когда ряд $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$ представляет целую функцию. В этом случае радиус сходимости ряда $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}\circ\mathsf{b}]$, согласно теореме 16, равен радиусу сходимости ряда $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$, однако, оценки (73), (74) не отражают этого факта.

Оценку (77) можно улучшать (но при этом условие $\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\rho < (1-\rho/\sigma)/2$ в формулировке теоремы останется неизменным), применив оператор $\mathsf{S}(\lambda)$, так как он обладает следующими очевидными свойствами:

$$\mathsf{F}[\lambda z|\mathsf{a}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{a}]\,,$$

$$\mathsf{S}(\lambda)(\mathsf{a}\circ\mathsf{b}) = \mathsf{a}\circ\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{b}\,,$$

то величина отношения

$$\frac{||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma}{1-2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\rho(1-\rho/\sigma)^{-1}}$$

может быть сделана меньше за счёт уменьшения $||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma$.

В разных условиях при различных значениях параметров, входящих в выражения для оценок (73), (74), предпочтительней оказывается та или другая из них. Мы не будем давать общий критерий их применимости, а рассмотрим простые частные случаи, которые носят иллюстративный характер.

Пусть $b_0 = 0$. Тогда $f(b_0) = a_0$. В этом случае, очевидным образом, оценка первого типа является более точной, если использовать $\alpha = 1$, $\xi = \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]$, так как правая часть неравенства (74) превосходит правую часть (73). Если же $\alpha = ||\bar{\mathsf{a}}||_\rho$, $\xi = \rho$, то то же самое будет иметь место при $2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] > \rho||\bar{\mathsf{a}}||_\rho$.

Рассмотрим случай, когда оценка (74) является более точной, чем (73). Положим, что норма $||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma$ достаточно мала по сравнению с $|b_0|$. Покажем, что в этом случае выполняется необходимое нам неравенство. Ввиду непрерывности относительно $||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma$, исследуем случай, когда $\bar{\mathsf{b}} = 0$, то есть $||\mathsf{b}|| = |b_0|$. Тогда должно иметь место

$$|f(b_0)| < |a_0| + \frac{\alpha\xi|b_0|}{1-\xi|b_0|(1-\rho/\sigma)^{-1}}\,.$$

В частном случае $\xi|b_0|(1-\rho/\sigma)^{-1} \le 1$, $f(z) = a_0 + a_1 z$, $\xi = |a_1|$ это неравенство принимает вид

$$|a_0 + a_1 b_0| < |a_0| + \frac{|b_0||a_1|}{1-\xi|b_0|(1-\rho/\sigma)^{-1}}\,.$$

Последнее, очевидным образом, выполняется.

Оценки (73), (74) зависят от свободных параметров ρ и σ, и поэтому имеется возможность их оптимизации, то есть посредством выбора подходящих значений для этих параметров возможно найти более жёсткие априорные ограничения на норму для $||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma$. При исследовании последовательности суперпозиций функций радиус сходимости соответствующего ряда, вообще говоря, уменьшается. Чтобы проследить это изменение, важно иметь такой инструмент оценивания, который зависит от параметра, связанного с величиной радиуса сходимости. Таким инструментом является норма $||\cdot||_\rho$, рассматриваемая как функция от $\rho > 0$.

16. Условие на сжимаемость. Значения суперпозиции $\mathsf{a}\circ\mathsf{b}$ можно трактовать как значения нелинейного отображения $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\cdot]$, параметризуемого элементом $\mathsf{a}\in\mathfrak{C}$, которое применяется к элементам $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$. Областью определения этого отображения является множество $\{\mathsf{c} \in \mathfrak{C} : |c_0| < r_a = (\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n})^{-1}\}$. Получим оценки на норму элемента $\bar{\mathsf{a}}$, обеспечивающие сжимаемость отображения $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\cdot]$. Условие на сжимаемость легко формулируется в терминах более слабой топологии, определяемой совокупностью норм $||\cdot||_\rho$ с $\rho \geq 1$.

Т е о р е м а 27. *Для того чтобы оператор* $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\cdot]$ *был сжимающим относительно нормы* $||\cdot||_\sigma$ *в шаре* $\{\mathsf{b} : ||\mathsf{b}||_\rho < B\}$, $\rho < \sigma$ *достаточно, чтобы* расстояние $\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]$ удовлетворяло условию

$$\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] < \left(\frac{\sqrt{1+4\zeta}-1}{2\zeta}\right)^2, \quad \zeta = \frac{B}{1-\rho/\sigma}. \tag{75}$$

□ Оценим нормы $||\cdot||_\sigma$ разностей $(\mathsf{b}^l - \mathsf{b}'^l)$, $l \in \mathbb{N}$:

$$||\mathsf{b}^l - \mathsf{b}'^l||_\sigma = \left|\left|(\mathsf{b}-\mathsf{b}') * \sum_{k=0}^{l-1} \mathsf{b}^k * \mathsf{b}'^{l-1-k}\right|\right|_\sigma \leq \sum_{k=0}^{l-1} \left|\left|(\mathsf{b}-\mathsf{b}') * \mathsf{b}^k * \mathsf{b}'^{l-1-k}\right|\right|_\sigma . \tag{76}$$

Выбрав число $\rho > 0$, меньшее σ, и применив неравенство (64), получаем

$$||(\mathsf{b}-\mathsf{b}') * \mathsf{b}^k * \mathsf{b}'^{l-1-k}||_\sigma \leq \frac{||\mathsf{b}||_\rho}{1-\rho/\sigma} ||(\mathsf{b}-\mathsf{b}') * \mathsf{b}^{k-1} * \mathsf{b}'^{l-1-k}||_\sigma \leq$$

$$\leq \ldots \leq ||(\mathsf{b}-\mathsf{b}') * \mathsf{b}'^{k-l-1}||_\sigma \left(\frac{||\mathsf{b}||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^k \leq$$

$$\leq \ldots \leq ||\mathsf{b}-\mathsf{b}'||_\sigma \left(\frac{||\mathsf{b}'||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^{l-1-k} \left(\frac{||\mathsf{b}||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^k .$$

Оценивая сверху правую часть (76) на основе полученного неравенства, находим

$$||\mathsf{b}^l - \mathsf{b}'^l||_\sigma \leq ||\mathsf{b}-\mathsf{b}'||_\sigma \sum_{k=0}^{l-1} \left(\frac{||\mathsf{b}'||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^{l-1-k} \left(\frac{||\mathsf{b}||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^k = ||\mathsf{b}-\mathsf{b}'||_\sigma \frac{x^l - y^l}{x-y},$$

где $x = (1-\rho/\sigma)^{-1}||\mathsf{b}||_\rho$, $y = (1-\rho/\sigma)^{-1}||\mathsf{b}'||_\rho$. Функция $(x^l - y^l)(x-y)^{-1}$ двух переменных $x, y \in \mathbb{R}_+$ достигает максимума в точке $x = y$, равного lx^{l-1}. Следовательно,

$$||\mathsf{b}^l - \mathsf{b}'^l||_\sigma \leq l\zeta^{l-1}||\mathsf{b}-\mathsf{b}'||_\sigma, \quad \zeta = \frac{\max\{||\mathsf{b}||_\rho, ||\mathsf{b}'||_\rho\}}{1-\rho/\sigma}.$$

Найдём теперь оценку нормы разности двух образов $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\mathsf{b}]$ и $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\mathsf{b}']$:

$$||\mathsf{M}[\mathsf{a}|\mathsf{b}] - \mathsf{M}[\mathsf{a}|\mathsf{b}']||_\sigma \leq \left|\left|\sum_{l=1}^{\infty} a_l(\mathsf{b}^l - \mathsf{b}'^l)\right|\right|_\sigma \leq \sum_{l=1}^{\infty} |a_l| \cdot ||\mathsf{b}^l - \mathsf{b}'^l||_\sigma \leq$$

$$\leq ||\mathsf{b}-\mathsf{b}'||_\sigma \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)(\zeta\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}])^l = ||\mathsf{b}-\mathsf{b}'||_\sigma \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\,(1-\zeta\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}])^{-2} .$$

Отсюда следует условие на сжимаемость отображения $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\cdot]$ в виде неравенства

$$\mathsf{D}^{1/2}[\bar{\mathsf{a}}]\,(1-\zeta\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}])^{-1} < 1$$

или, эквивалентно, $\zeta \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] + \mathsf{D}^{1/2}[\bar{\mathsf{a}}] - 1 < 0$. На основе стандартного анализа квадратного неравенства находим, что достаточным условием сжимаемости является

$$\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] < \left(\frac{\sqrt{1+4\zeta}-1}{2\zeta}\right)^2 . \tag{77}$$

Так как функция от ζ в правой части этого неравенства является убывающей при $\zeta > 0$, то, заменив функционал $\max\{\|\mathsf{b}\|_\rho, \|\mathsf{b}'\|_\rho\}$ в определении величины ζ на его максимально допустимое значение B, заключаем, что выполнимость условия (75) теоремы влечёт за собой выполнимость неравенства (77) и, следовательно, сжимаемость оператора $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\cdot]$. ■

17. Заключение. Можно надеяться, что разработанная в настоящей работе алгебраическая техника оперирования с последовательностями коэффициентов аналитических функций может найти многочисленные применения при исследовании различных математических проблем. Исследование суперпозиций аналитических функций естественным образом приводит к постановке и решению связанных с ними функциональных уравнений. В частности, важной является проблема отыскания аналитических функций $f(z)$, являющихся устойчивыми решениями функциональных уравнений вида

$$(g \circ f)(z) = f(\lambda z)$$

с заданной аналитической функцией $g(z)$ и подходящей постоянной λ. Более того, на основе предложенной алгебраической техники возможно подойти к систематическому изучению аналитических решений функциональных уравнений более общего вида. Эта техника, наверняка, может оказаться полезной при построении решений дифференциальных и интегральных уравнений в виде степенных рядов, в задаче обращения аналитических функций при исследовании особенностей аналитических функций, заданных посредством степенных рядов, то есть в задаче конструктивного построения аналитического продолжения (см. по этому поводу, например, [12]). Она допускает обобщение на задачи, связанные с аналитическими функциями многих комплексных переменных и даже бесконечного их числа, что может представлять интерес, например, в теории случайных процессов.

Литература

1. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел / К. Чандрасекхаран. – М.: Мир, 1974.

2. Холл М. Комбинаторика / М. Холл. – М.: Мир, 1970.

3. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1965.

4. Ширяев А.Н. Вероятность / А.Н. Ширяев. – М. : Наука, 1984.

5. Lax M. Fluctuation and Coherence Phenomena in Classical and Quantum Physics / M. Lax. – New York: Gordon & Breach, 1968. (Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления / М. Лэкс. – М.: Мир, 1974. – 300с.)

6. Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н. Метод рекуррентного вычисления распределения вероятностей фотоотсчетов квантового одномодового шумового излучения // Доклады НАНУ, Киев. – 2005. – №12. – С.14-18.

7. Ruelle D. Statistical Mechanics, Rigorous Results / D.Ruelle. – Ney York-Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc., 1969. (Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / Д. Рюэль. – М.: Мир, 1971.)

8. Simon B. The $P(\varphi)_2$ euclidian (quantum) field theory / B. Simon. – Princeton: Princeton University Press, 1974. (Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля / Б. Саймон. – М.: Мир, 1976.)

9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

10. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства / А. Пич. – М.: Мир, 1967. – 256 с.

11. Курант Р. Гурвитц А. Теория функций / Р. Курант. – М.: Наука, 1968. – 646 с.

12. Бибербах Л. Аналитическое продолжение / Л.Бибербах. – М.: Наука, 1967.

ALGEBRA OF POWER SERIES COEFFICIENTS OF ANALYTIC FUNCTIONS

Yu.P. Virchenko, N.N. Vitokhina

Belgorod State University
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

The algebra of operations with sequences from $\mathbb{C}^\infty$ is built. The developped algebraic formalism is applied for the calculation of expansion coefficients connected with compositions of analytic functions defined by power series.

Key words: analytic functions, power series, convolution, function compositions.