



УДК 539.3

**ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОПРОЛЁТНОГО РОТОРА
НА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПОРАХ****С.В. Филишковский**Институт проблем машиностроения НАН Украины,
ул. Дм.Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина, e-mail: svfil@ipmach.kharkov.ua

Аннотация. Построена модель колебаний несимметричного многодискового ротора на трёх подшипниках с кубической нелинейностью жёсткости. Учтены гироскопические моменты, упругость и распределённая масса вала. Эта модель состоит из системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. К исследованию системы применён метод нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера. Получены формы колебаний вала с дисками и фазовые траектории системы. Исследованы амплитудно-частотные характеристики системы. Построены скелетные кривые колебаний однопролётного и многопролётного роторов на опорах с нелинейными свойствами.

Ключевые слова: ротор, нелинейные опоры, метод нелинейных нормальных форм, фазовые траектории, скелетные кривые.

Введение

Многие приборы и агрегаты летательных аппаратов содержат быстровращающиеся роторы, у которых на одном валу закреплено несколько дисков. В середине пролёта таких роторов могут быть дополнительные подшипники. Эти подшипники, как правило, являются нелинейными опорами. Требование снижения веса и вибрации агрегатов приводит к необходимости повышения точности расчёта амплитудно-частотных характеристик таких систем при эксплуатации.

Поперечные колебания валов с дисками в линейной постановке с учётом гироскопических моментов, внешнего и внутреннего трения исследованы Ф.М. Диментбергом [1]. Различные модели вибрации роторов рассмотрены в книге А. Тондла [2]. Е.Г. Голоскоков исследовал квазипериодическое движение ротора [3]. К. Пьерр и С. Шоу разработали метод нелинейных нормальных форм (ННФ) для исследования колебаний системы с нелинейным упругим элементом [4]. ННФ колебаний вращающегося вала в подшипниках скольжения исследованы в статье [5]. К.В. Аврамовым и К. Пьерром с помощью метода ННФ рассмотрены колебания систем с гироскопическими силами [6]. В статье [7] исследованы собственные колебания ротора с учётом нелинейных жесткости и демпфирования опор.

Целью настоящей работы является исследование динамики упругого многодискового ротора на трёх нелинейных опорах.



1. Уравнения движения системы

Расчётная модель рассматриваемой системы показана на рис. 1. Начало координат располагаем в сечении опоры A . Длина вала – l , расстояние от опоры A до промежуточной опоры C обозначим l_c , до k -го диска – l_k . Перемещения сечений вала по направлениям координатных осей обозначим u_x, u_y . Углы поворота сечения вала обозначим $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Угловые скорости сечений вала $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ связаны с углами поворота известными кинематическими соотношениями [6]. Представим зависимости углов поворота от прогибов вала следующим образом:

$$\theta_1 = -\frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \theta_2 = \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Кинетическая энергия вала T_B системы имеет вид

$$T_B = \frac{\rho I}{2} \left[\int_0^l (\dot{u}_x')^2 dz + \int_0^l (\dot{u}_y')^2 dz \right] + \rho I \omega^2 l - \\ - 2\rho I \omega \int_0^l \dot{u}_x' \dot{u}_y' dz + \frac{\rho S}{2} \int_0^l [(\dot{u}_x)^2 + (\dot{u}_y)^2] dz,$$

где ρ – плотность материала вала, I – момент инерции сечения вала, S – площадь сечения вала, $\omega = \omega_z$ – угловая скорость ротора.

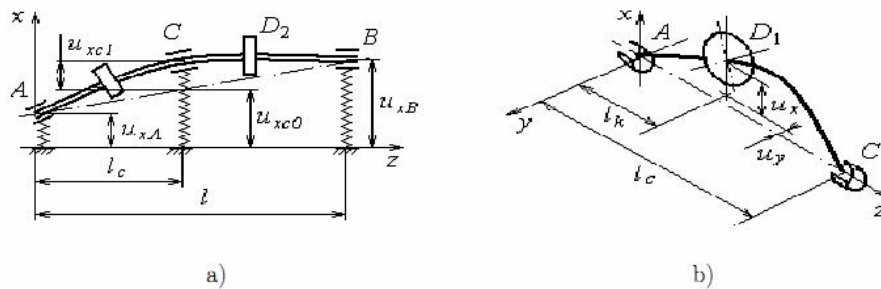


Рис. 1. Расчётная схема ротора

Кинетическая энергия диска T следующим образом:

$$T = \frac{I_1}{2} [(\dot{u}_x')^2_{z=l_1} + (\dot{u}_y')^2_{z=l_1}] + \frac{I_0}{2} \omega^2 - I_0 \omega (\dot{u}_x')_{z=l_1} (u_y')_{z=l_1} + \frac{m_0}{2} [(\dot{u}_x)^2_{z=l_1} + (\dot{u}_y)^2_{z=l_1}],$$

где I_1 – экваториальный момент инерции диска, I_0 – полярный момент инерции диска, m_0 – масса диска.

Запишем формулу потенциальной энергии вала

$$\Pi_B = \frac{EI}{2} \int_0^l [(u_x'')^2 + (u_y'')^2] dz,$$



где E – модуль упругости материала вала. Потенциальная энергия деформации подшипников Π_{Π} запишется в форме

$$\Pi_{\Pi} = \frac{K_1}{2} (u_{xA}^2 + u_{yA}^2 + u_{xB}^2 + u_{yB}^2 + u_{xC}^2 + u_{yC}^2) + \frac{K_3}{4} (u_{xA}^4 + u_{yA}^4 + u_{xB}^4 + u_{yB}^4 + u_{xC}^4 + u_{yC}^4),$$

где K_1, K_3 – коэффициенты жёсткости опор. Примем, что реакции опор имеют кубическую нелинейность. В частности, реакция промежуточной опоры будет

$$R_{xC} = K_1 u_{xC} + K_3 u_{xC}^3,$$

$$R_{yC} = K_1 u_{yC} + K_3 u_{yC}^3,$$

где R_{xC}, R_{yC} – проекции реакции на оси x, y .

Перемещение опорного сечения вала в промежуточной опоре можно выразить как сумму перемещений соответствующей точки недеформируемой оси вала и прогиба вала в этом сечении, как показано на рис.1а.

$$u_{xC} = u_{xc0} + u_{xc1}, \quad u_{yC} = u_{yc0} + u_{yc1}.$$

Перемещения опорного сечения недеформируемой оси вала u_{xc0}, u_{yc0} выражаются через перемещения крайних опор

$$u_{xc0} = u_{xA} (1 - l_c/l) + u_{xB} (l_c/l),$$

$$u_{yc0} = u_{yA} (1 - l_c/l) + u_{yB} (l_c/l).$$

Определим перемещения вала [5]

$$\begin{aligned} u_x(z, t) &= \sum_{n=1}^N U_{x,n}(t) \sin \frac{n\pi z}{l} + U_{x,N+1}(t) \frac{z}{l} + U_{x,N+2}(t) \frac{l-z}{l}, \\ u_y(z, t) &= \sum_{n=1}^N U_{y,n}(t) \sin \frac{n\pi z}{l} + U_{y,N+1}(t) \frac{z}{l} + U_{y,N+2}(t) \frac{l-z}{l}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $U_{x,n}(t), U_{y,n}(t)$ – обобщённые перемещения; N – количество координатных функций вала; $N+1, N+2$ – номера функций, соответствующие перемещениям крайних опор. Для перемещений промежуточной опоры формулы (1) примут вид

$$\begin{aligned} u_{xC} &= \sum_{n=1}^N U_{x,n}(t) \sin \frac{n\pi l_c}{l} + U_{x,N+1}(t) \frac{l_c}{l} + U_{x,N+2}(t) \frac{l-l_c}{l}, \\ u_{yC} &= \sum_{n=1}^N U_{y,n}(t) \sin \frac{n\pi l_c}{l} + U_{y,N+1}(t) \frac{l_c}{l} + U_{y,N+2}(t) \frac{l-l_c}{l}, \end{aligned} \quad (2)$$



Соотношения (1) и (2) вводятся в кинетическую и потенциальную энергии. Тогда кинетическая и потенциальная энергии системы будут выражены через обобщённые скорости и обобщённые перемещения

$$T = T_B + T_D = T(\dot{U}_{x,1}, \dots, \dot{U}_{x,N+2}, \dot{U}_{y,1}, \dots, \dot{U}_{y,N+2}),$$

$$\Pi = \Pi_B + \Pi_\Pi = \Pi(U_{x,1}, \dots, U_{x,N+2}, U_{y,1}, \dots, U_{y,N+2}).$$

Составим матричное уравнение движения в виде уравнений Лагранжа второго рода. В результате получим

$$[M]\{\ddot{U}\} + [G]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} + [\widehat{K}]\{U^3\} + [\check{K}]\{U_\mu^2 U_\nu\} + [\hat{K}]\{U_\lambda U_\mu U_\nu\} = 0, \quad (3)$$

где $[K]$ – матрица жесткости, $[G]$ – гироскопическая матрица, $[M]$ – матрица масс, $\{U\}$ – вектор перемещений, $[\widehat{K}]$, $[\check{K}]$, $[\hat{K}]$ – матрицы коэффициентов при нелинейных произведениях перемещений, $\lambda, \mu, \nu = 1, 2N+4$. В нечётных строках вектора $\{U\}$ запишем обобщённые перемещения по оси x , в чётных – по оси y так, чтобы перемещения опорных сечений были в последних строках:

$$\{U\} = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_{2N+1} \ U_{2N+2} \ U_{2N+3} \ U_{2N+4}]^T.$$

Количество нелинейных произведений перемещений вида $U_\mu^2 U_\nu$ в каждом из уравнений, входящих в систему (3), равно $(N+2) \cdot (N+1) = N^2 + 3N + 2$. В полной системе уравнений (3) такие произведения есть в уравнениях движения по двум координатным направлениям, поэтому размерность матрицы $[\check{K}]$ равна $(2N+4) \times (2N^2 + 6N + 4)$. Размерность остальных матриц – $(2N+4) \times (2N+4)$.

Компоненты матриц линейных членов (3) имеют следующий вид:

$$K_{2n-1,2n-1} = K_{2n,2n} = K_1 \sin^2 \frac{n\pi l_c}{l} + \frac{EI n^2 \pi^4}{2l^3},$$

$$K_{2n-1,2m-1} = K_{2n,2m} = K_1 \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin \frac{m\pi l_c}{l},$$

$$K_{2n-1,2N+1} = K_{2n,2N+2} = K_{2N+1,2n-1} = K_{2N+2,2n} = K_1 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{n\pi l_c}{l},$$

$$K_{2n-1,2N+3} = K_{2n,2N+4} = K_{2N+3,2n-1} = K_{2N+4,2n} = K_1 \left(\frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{n\pi l_c}{l},$$

$$K_{2N+3,2N+3} = K_{2N+4,2N+4} = K_1 + K_1 \left(\frac{l_c}{l}\right)^2,$$

$$K_{2N+1,2N+1} = K_{2N+2,2N+2} = K_1 + K_1 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^2,$$



$$K_{2N+3,2N+3} = K_{2N+4,2N+4} = K_1 + K_1 \left(\frac{l_c}{l}\right)^2,$$

$$K_{2N+1,2N+3} = K_{2N+4,2N+2} = K_1 \left(\frac{l_c}{l}\right) \left(1 - \frac{l_c}{l}\right),$$

$$G_{2n,2m-1} = \frac{I_0 \omega n m \pi^2}{l^2} \cos \frac{n \pi l_k}{l} \cos \frac{m \pi l_k}{l},$$

$$G_{2n,2n-1} = \frac{\rho I \omega n^2 \pi^2}{l} + \frac{I_0 \omega n^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{n \pi l_k}{l},$$

$$G_{2N+1,2m} = G_{2N+4,2m-1} = G_{2n-1,2N+2} = G_{2n,2N+3} = \frac{I_0 \omega m \pi}{l^2} \cos \frac{m \pi l_k}{l},$$

$$G_{2N+1,2N+2} = G_{2N+2,2N+3} = G_{2N+4,2N+1} = G_{2N+3,2N+4} = \frac{2 \rho I \omega}{l} + \frac{I_0 \omega}{l^2},$$

$$M_{2n-1,2m-1} = M_{2n,2m} = m_0 \sin \frac{n \pi l_k}{l} \sin \frac{m \pi l_k}{l} + \frac{I_1 n m \pi^2}{l^2} \cos \frac{n \pi l_k}{l} \cos \frac{m \pi l_k}{l},$$

$$M_{2n-1,2n-1} = M_{2n,2n} = \frac{\rho S l}{2} + \frac{n^2 \pi^2 \rho I}{2l} + \frac{I_1 n^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{n \pi l_k}{l},$$

$$M_{2N+1,2m-1} = M_{2N+2,2m} = \frac{-\rho S l (-1)^m}{m \pi} + \frac{m_0 l_k}{l} \sin \frac{m \pi l_k}{l} + \frac{I_1 m \pi}{l^2} \cos \frac{n \pi l_k}{l},$$

$$M_{2N+1,2N+1} = M_{2N+2,2N+2} = \frac{\rho S l}{3} + \frac{\rho I}{l} + \frac{m_0 l_k^2}{l^2} + \frac{I_1}{l^2},$$

$$M_{2N+1,2N+3} = M_{2N+2,2N+4} = M_{2N+3,2N+1} =$$

$$= \frac{-\rho S l (-1)^m}{m \pi} + \frac{m_0 l_k}{l} \sin \frac{m \pi l_k}{l} + \frac{I_1 m \pi}{l^2} \cos \frac{n \pi l_k}{l},$$

$$M_{2N+3,2N+3} = M_{2N+4,2N+4} = \frac{\rho S l}{3} + \frac{\rho I}{l} + \frac{m_0 (l - l_k)^2}{l^2} + \frac{I_1}{l^2},$$

где $n = \overline{1, N}$, $m = \overline{1, N}$, $n \neq m$. Остальные компоненты матриц равны нулю. Матрицы $[K]$ и $[M]$ - симметричные, матрица $[G]$ - кососимметричная.

Компоненты матрицы $[\widehat{K}]$ имеют следующий вид:

$$\widehat{K}_{2n-1,2n-1} = \widehat{K}_{2n,2n} = K_3 \cdot \sin^4 \frac{n \pi l_c}{l},$$



$$\begin{aligned} \widehat{K}_{2n-1,2m-1} &= \widehat{K}_{2n,2m} = K_3 \sin \frac{n\pi l_c}{l} \cdot \sin^3 \frac{m\pi l_c}{l} \\ \widehat{K}_{2n-1,2N+1} &= \widehat{K}_{2n,2N+2} = K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^3 \sin \frac{n\pi l_c}{l}, \\ \widehat{K}_{2n-1,2N+3} &= \widehat{K}_{2n,2N+4} = K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^3 \sin \frac{n\pi l_c}{l}, \\ \widehat{K}_{2N+1,2n-1} &= \widehat{K}_{2N+2,2n} = K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin^3 \frac{n\pi l_c}{l}, \\ \widehat{K}_{2N+3,2n-1} &= \widehat{K}_{2N+4,2n} = K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \sin^3 \frac{n\pi l_c}{l}. \\ \widehat{K}_{2N+1,2N+1} &= \widehat{K}_{2N+2,2N+2} = K_3 + K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^4, \\ \widehat{K}_{2N+3,2N+3} &= \widehat{K}_{2N+4,2N+4} = K_3 + K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^4, \\ \widehat{K}_{2N+1,2N+3} &= \widehat{K}_{2N+2,2N+4} = K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right), \\ \widehat{K}_{2N+3,2N+1} &= \widehat{K}_{2N+4,2N+2} = K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^3. \end{aligned}$$

Нелинейные произведения координат могут быть расположены в строках векторов $\{U_\mu^2 U_\nu\}$ и $\{U_\lambda U_\mu U_\nu\}$ в том или ином порядке. Этот порядок определяет расположение компонент в матрицах $[\check{K}]$ и $[\hat{K}]$. Компоненты матрицы $[\check{K}]$, которые в уравнении $2n - 1$ системы (3) умножаются на произведения перемещений по оси $x - U_\mu^2 U_\nu$, $U_\mu^2 U_{2N+1}$, $U_\mu^2 U_{2N+3}$, $U_{2N+1}^2 U_\mu$, $U_{2N+3}^2 U_\mu$, $U_{2N+1}^2 U_{2N+3}$, $U_{2N+3}^2 U_{2N+1}$, ($\mu, \nu = \overline{1, 3, 2N-1}$), имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \check{K}_{2n-1,m} &= 3K_3 \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin^2 \frac{[(\mu+1)/2] \pi l_c}{l} \sin \frac{[(\nu+1)/2] \pi l_c}{l}, \\ \check{K}_{2n-1,m} &= 3K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin^2 \frac{[(\mu+1)/2] \pi l_c}{l}, \\ \check{K}_{2n-1,m} &= 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin^2 \frac{[(\mu+1)/2] \pi l_c}{l}, \\ \check{K}_{2n-1,m} &= 3K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^2 \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu+1)/2] \pi l_c}{l}, \end{aligned}$$



$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^2 \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l}.$$

Для строки $2N+1$ аналогичные компоненты матрицы $[\check{K}^*]$ имеют вид

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{[(\nu+1)/2]\pi l_c}{l} \sin^2 \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^2 \sin^2 \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin^2 \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^3 \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^3,$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^2.$$

Для строки $2N+3$ аналогичные компоненты матрицы $[\check{K}^*]$ имеют вид:

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{[(\nu+1)/2]\pi l_c}{l} \sin^2 \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin^2 \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^2 \sin^2 \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^2 \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^3 \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^2,$$



$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right).$$

Компоненты матрицы $[\tilde{K}]$, которые в уравнении $2n - 1$ системы (3) умножаются на произведения перемещений по оси x $U_\mu U_\nu U_A$, $U_\mu U_\nu U_B$, $U_\mu U_A U_B$, соответственно имеют вид

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\nu+1)/2]\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\nu+1)/2]\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l}$$

Для строки $2N + 1$ аналогичные компоненты матрицы $[\tilde{K}]$ имеют вид

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^2 \sin \frac{[(\nu+1)/2]\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{[(\nu+1)/2]\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^2 \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l}.$$

Для строки $2N + 3$ аналогичные компоненты матрицы $[\tilde{K}]$ имеют вид

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{[(\nu+1)/2]\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^2 \sin \frac{[(\nu+1)/2]\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l},$$

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{[(\mu+1)/2]\pi l_c}{l}.$$

Такие же компоненты матриц $[\tilde{K}]$ и $[\tilde{K}']$ расположены в строках, которые умножаются на нелинейные произведения перемещений по оси y . Умножив (3) на $[M]^{-1}$ получим

$$\{\ddot{U}\} + [G'] \{\dot{U}\} + [K'] \{U\} + [\tilde{K}'] \{U^3\} + [\tilde{K}'] \{U_\mu^2 U_\nu\} + [\tilde{K}'] \{U_\lambda U_\mu U_\nu\} = 0.$$



2. Нелинейные нормальные формы колебаний

ННФ дают возможность упростить без потери точности и наглядности решения задач нелинейной динамики. Основа этого метода заключается в том, что система N нелинейных дифференциальных уравнений заменяется одним уравнением.

Принимаем, что при движении по ННФ обобщённые координаты изменяются синхронно. Тогда все фазовые координаты можно выразить через одну, выбранную произвольно, пару фазовых координат, которая имеет номер J [7]: p – перемещение и $q = \dot{p}$ – скорость. Представим ННФ в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [\gamma] \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix},$$

где $V = \dot{U}$ – обобщённые скорости, $[\gamma]$ – матрица коэффициентов разложения перемещений и скоростей в степенной ряд по фазовым координатам. Тогда

$$p_n(p, q) = \gamma_{n,1}p + \gamma_{n,2}q + \gamma_{n,3}p^2 + \gamma_{n,4}pq + \gamma_{n,5}q^2 + \gamma_{n,6}p^3 + \\ + \gamma_{n,7}p^2q + \gamma_{n,8}pq^2 + \gamma_{n,9}q^3 + \gamma_{n,5}q^2 + \gamma_{n,6}p^3 + \gamma_{n,7}p^2q + \gamma_{n,8}pq^2 + \gamma_{n,9}q^3,$$

$$q_n(p, q) = \gamma_{2N+4+n,1}p + \gamma_{2N+4+n,2}q + \gamma_{2N+4+n,3}p^2 + \gamma_{2N+4+n,4}pq + \\ + \gamma_{2N+4+n,5}q^2 + \gamma_{2N+4+n,6}p^3 + \gamma_{2N+4+n,7}p^2q + \gamma_{2N+4+n,8}pq^2 + \gamma_{2N+4+n,9}q^3, \quad (4)$$

где $n = 1, \dots, J - 1, J + 1, \dots, 2N + 4$ – номера степеней свободы.

Определим коэффициенты линейной части (4). Согласно работе [6]

$$\gamma_{n,1} = \frac{\zeta_n \delta_{2N+5} - \zeta_{2N+5} \delta_n}{\zeta_1 \delta_{2N+5} - \zeta_{2N+5} \delta_1}, \\ \gamma_{n,2} = \frac{\zeta_1 \delta_n - \zeta_n \delta_1}{\zeta_1 \delta_{2N+5} - \zeta_{2N+5} \delta_1},$$

где ζ и δ – действительная и мнимая части собственных векторов линейной части системы (3), $n = 1, 2N + 4$.

Дифференцируя (4), получим

$$\dot{p}_n(p, q) = \frac{\partial p_n(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial p_n(p, q)}{\partial q} \dot{q}, \\ \dot{q}_n(p, q) = \frac{\partial q_n(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial q_n(p, q)}{\partial q} \dot{q}. \quad (5)$$

Обозначим

$$\{\dot{q}_j\} = - \left([G'] \{q_j\} + [K'] \{p_j\} + [\widehat{K}'] \{p_j^3\} + [\check{K}'] \{p_j^2 p_m\} + [\tilde{K}'] \{p_j p_m p_n\} \right) =$$



$$= \{W_j(\{p\}, \{q\})\}, \quad (6)$$

где j – номер формы. Подставив (6) в (5) и сохраняя слагаемые не выше третьей степени относительно p и q , получим

$$\dot{p}_{j,n} = q_{j,n} = \frac{\partial p_{j,n}}{\partial p_{j,1}} q_{j,1} + \frac{\partial p_{j,n}}{\partial q_{j,1}} W_{j,1}(p_{j,1}, q_{j,1}),$$

$$\dot{q}_{j,n} = W_{j,n}(p_{j,1}, q_{j,1}) = \frac{\partial q_{j,n}}{\partial p_{j,1}} q_{j,1} + \frac{\partial q_{j,n}}{\partial q_{j,1}} W_{j,1}(p_{j,1}, q_{j,1}).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $p^\mu q^\nu$, мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно компонент матрицы $[\gamma]$. В результате решения этой системы получим ННФ.

Построенную ННФ (4) вводим в первое уравнение системы (6). В результате получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее движение по ННФ

$$\dot{q} + B_1 q + B_2 p + B_3 p^3 + B_4 p^2 q + B_5 p q^2 + B_6 q^3 = 0, \quad (7)$$

где

$$B_1 = \sum_{n=1}^{2N+4} G'_{J,n} \gamma_{2N+4+n,2} + \sum_{n=1}^{2N+4} K'_{J,n} \gamma_{n,2},$$

$$B_2 = \sum_{n=1}^{2N+4} G'_{J,n} \gamma_{2N+4+n,1} + \sum_{n=1}^{2N+4} K'_{J,n} \gamma_{n,1},$$

$$B_3 = \sum_{n=1}^{2N+4} G'_{J,n} \gamma_{2N+4+n,6} + \sum_{n=1}^{2N+4} K'_{J,n} \gamma_{n,6} + \sum_{n=1}^{2N+4} \widehat{K}'_{J,n} \gamma_{n,1}^3 + \\ + \sum_{n=1}^{2N^2+6N+4} \tilde{K}'_{J,n} \gamma_{\mu,1}^2 \gamma_{\nu,1} + \sum_{n=1}^{2N+4} \tilde{K}'_{J,n} \gamma_{\lambda,1} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\nu,1},$$

$$B_4 = \sum_{n=1}^{2N+4} G'_{J,n} \gamma_{2N+4+n,7} + \sum_{n=1}^{2N+4} K'_{J,n} \gamma_{n,7} + \sum_{n=1}^{2N+4} 3 \widehat{K}'_{J,n} \gamma_{n,1}^2 \gamma_{n,2} + \\ + \sum_{n=1}^{2N^2+6N+4} \tilde{K}'_{J,n} (\gamma_{\mu,1}^2 \gamma_{\nu,2} + 2 \gamma_{\nu,1} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\mu,2}) + \\ + \sum_{n=1}^{2N+4} \tilde{K}'_{J,n} (\gamma_{\lambda,1} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\nu,2} + \gamma_{\lambda,1} \gamma_{\mu,2} \gamma_{\nu,1} + \gamma_{\lambda,2} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\nu,1}),$$

$$B_5 = \sum_{n=1}^{2N+4} G'_{J,n} \gamma_{2N+4+n,8} + \sum_{n=1}^{2N+4} K'_{J,n} \gamma_{n,8} + \sum_{n=1}^{2N+4} 3 \widehat{K}'_{J,n} \gamma_{n,2}^2 \gamma_{n,1} +$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{2N^2+6N+4} \tilde{K}'_{J,n} (\gamma_{\mu,2}^2 \gamma_{\nu,1} + 2\gamma_{\nu,2} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\mu,2}) + \\
 & + \sum_{n=1}^{2N+4} \tilde{K}'_{J,n} (\gamma_{\lambda,1} \gamma_{\mu,2} \gamma_{\nu,2} + \gamma_{\lambda,2} \gamma_{\mu,2} \gamma_{\nu,1} + \gamma_{\lambda,2} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\nu,2}) , \\
 B_6 = & \sum_{n=1}^{2N+4} G'_{J,n} \gamma_{2N+4+n,9} + \sum_{n=1}^{2N+4} K'_{J,n} \gamma_{n,9} + \sum_{n=1}^{2N+4} \tilde{K}'_{J,n} \gamma_{n,2}^3 + \\
 & + \sum_{n=1}^{2N^2+6N+4} \tilde{K}'_{J,n} \gamma_{\mu,2}^2 \gamma_{\nu,2} + \sum_{n=1}^{2N+4} \tilde{K}'_{J,n} \gamma_{\lambda,2} \gamma_{\mu,2} \gamma_{\nu,2} .
 \end{aligned}$$

Значения индексов λ, μ, ν зависят от построения векторов $\{U_\mu^2 U_\nu\}$ и $\{U_\lambda U_\mu U_\nu\}$. Поскольку мы приняли кубическую нелинейность, квадратичные члены в (7) отсутствуют.

3. Численный анализ колебаний

На рис. 2 изображена ННФ колебаний ротора на нелинейных опорах со следующими параметрами: $l = 1$ м, $l_1 = 0,25$ м, $l_c = 0,50$ м, $l_2 = 0,75$ м, диаметр вала $d = 0,02$ м, $m_0 = 10$ кг, $I_1 = 0,1$ кг·м², $I_0 = 0,2$ кг·м², $\omega = 628,3$ рад/с. Коэффициенты жесткости опор: $K_1 = 100$ Н/м, $K_3 = 10$ Н/м³.

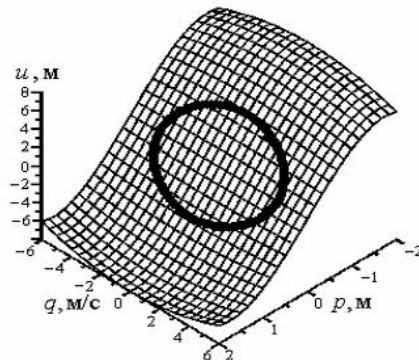


Рис. 2. ННФ трёхопорного ротора

Проверка правильности построения ННФ выполнена численным интегрированием полной системы уравнений движения (3) при задании начальной точки фазой траектории на поверхности нормальной моды. Фазовая траектория лежит на ННФ, как показано на рис. 2 жирной линией.



Для исследования амплитудно-частотных характеристик этих колебаний применён метод гармонического баланса [8]. На рис. 3 показаны скелетные кривые ротора на двух опорах (линия 1) и с дополнительной опорой (линия 2).

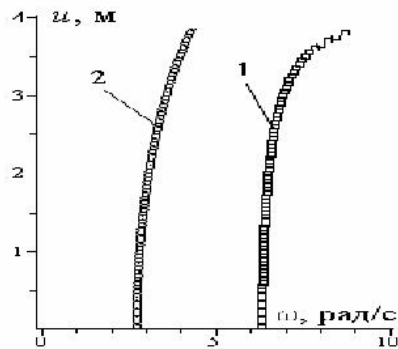


Рис. 3. Скелетные кривые ротора

Заключение

Разработана методика исследования нелинейных колебаний многопролётного упругого ротора с распределённой массой и дисками. Построены нелинейные нормальные формы и фазовые траектории системы на двух нелинейных опорах и с дополнительной нелинейной опорой. Исследованы скелетные кривые системы с учётом распределённой массы вала и масс и моментов инерции дисков. Влияние промежуточной опоры заключается в увеличении жёсткости и резонансных частот системы.

Литература

1. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов / Ф.М. Диментберг. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 248 с.
2. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов / А. Тондл. – Л.: Энергия, 1971. – 388 с.
3. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – Киев: Наук. думка, 1977. – 340 с.
4. Shaw S.W., Pierre C. Normal modes for nonlinear vibratory systems // J. Sound and Vibr. – 1993. – 164. – P.85-124.
5. Legrand M., Jiang D., Pierre C. Shaw S.W. Nonlinear placeNormal Modes of a Rotating Shaft Based on the Invariant Manifold Method // International Journal of Rotating Machinery. – 2004. – 10:4. – P.319-335.



6. Аврамов К.В., Пьерр К., Ширяева И.С. Нелинейные нормальные формы колебаний систем с гироскопическими силами // Доклады Национальной академии наук Украины. – 2006. – 1. – С.7-10.
7. Филипковский С.В., Аврамов К.В. Колебания роторов на нелинейных опорах // Вестник двигателестроения. – 2009. – 3. – С.127-132.
8. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах / Т. Хаяси. – М.: Мир, 1968. – 432 с.

MULTISPAN ROTOR TRANSVERSE OSCILLATIONS ON NONLINEAR BEARINGS

S.V. Filipkovsky

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems National Academy of Science of Ukraine,
Pozarsky St., 2/10, Kharkov, 61046, Ukraine, e-mail: svfil@ipmach.kharkov.ua

Abstract. Oscillations of the asymmetrical rotor which is placed on three bearings is studied. The mathematical model takes into account the cubic nonlinearity of rigidity. Gyroscopic torques, elasticity and the distributed mass of shaft are also taken into account. The model is reduced to the system of ordinary differential second-kind equations. The method of nonlinear normal modes of Shaw and Pierre is applied to study the system. Forms of disk oscillations and phase trajectories are obtained. The system amplitude-frequency response is investigated. The backbone curves of nonlinear oscillations of the single-slope and multispans rotors are constructed.

Key words: rotor, nonlinear bearings, nonlinear normal modes method, phase trajectories, backbone curves.