УДК 517.91

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В.А. Остапенко

Днепропетровский национальный университет,
Днепропетровск, 49010, Украина, e-mail: victor.ostapencko@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена вторая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области. Получено решение этой задачи в квадратурах. Построение точного решения задачи основано на применении метода отражений и на разработанном в [1] методе интегрального представления достаточно широкого класса решений телеграфного уравнения.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, краевая задача, ограниченная область.

Введение

Основным математическим аппаратом, описывающим распространение волн различной физической природы в средах, обладающих сопротивлением, является телеграфное уравнение. Использование телеграфного уравнения позволяет учесть реально существующее сопротивление среды и выяснить характер затухания волн, вызванного этим сопротивлением. С целью решения такого рода задач в [1] разработан метод интегрального представления решений телеграфного уравнения с помощью функции Римана. Сочетание такого интегрального представления с методом продолжений позволило получить точное решение второй краевой задачи [2] в полуограниченной области. В ограниченных областях с необходимостью возникают дополнительные волны, являющиеся результатом отражения первичных волн от граничной поверхности. В настоящей статье с помощью комбинации интегрального представления решений, метода продолжений и метода отражений строится решение первой краевой задачи в ограниченной области. Учтено, что если краевые условия на обеих границах области неоднородны, краевую задачу можно разбить на две вспомогательные задачи, в каждой из которых неоднородным является только одно краевое условие. Поэтому, не нарушая общности, достаточно рассмотреть вторую краевую задачу с одним неоднородным краевым условием.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача: в области $0 < x - x_n < l, \quad t > t_n$ требуется найти решение телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Cu(x,t) = 0 \tag{1}$$

с постоянными a^2, B, C, D, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,t_n) = 0; \quad u_t(x,t_n) = 0, \quad 0 < x - x_n < l \tag{2}$$

и краевым условиям второго типа

$$u_x(x_n,t) = \nu(t-t_n); \quad u_x(x_n+l,t) = 0, \quad t > t_n. \tag{3}$$

2. Решение задачи

Для решения этой задачи применяется метод, разработанный в [3,4]. Решение поставленной задачи основано на установленном в [1] факте, что в случае краевых условий второго типа решением дифференциального уравнения (1) является функция

$$u(x,t) = e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_{t-t_n+\frac{x-x_n}{a}}^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \omega(\eta) d\eta$$

с произвольной функцией $\omega(\eta)$. Здесь $J_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка,

$$z = \sqrt{c_1[(x-x_n)^2 - a^2((t-t_n)-\eta)^2]}; \tag{4}$$

$$c_1 = C + \frac{D^2a^2}{4} - \frac{B^2}{4}. \tag{5}$$

Функция $\omega(\eta)$ должна быть определена на всей числовой оси. Так как в краевом условии (3) функция $\nu(t)$ определена лишь на полуоси, необходимо построить ее продолжение на всю ось t. Учитывая нулевые начальные условия (2) для $\nu(t)$, продолжение функции $\nu(t)$ на всю ось t, с необходимостью, выглядит следующим образом:

$$N(t-t_n) = \begin{cases} \nu(t-t_n), & t > t_n; \\ 0, & t < t_n. \end{cases} \tag{6}$$

Первое краевое условие (3) также продолжается на всю ось t:

$$u_x(x_n,t) = N(t-t_n). \tag{7}$$

Учитывая, что, по постановке задачи, волны в среде возбуждаются на левом конце и распространяются в среду в направлении положительных x, на начальном этапе решение задачи отыскивается в виде функции

$$u(x,t) = 2e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_{0}^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_0(\eta) d\eta \tag{8}$$

с неизвестной функцией $N_0(\eta)$. Здесь z и c_1 определяются формулами (4) и (5) соответственно. Функция (8) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при произвольной функции $N_0(t)$.

С целью дальнейшего построения решения и для анализа краевого условия (7) вычислим производную по x от функции более общего вида

$$u(x,t) = 2e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_n(\eta) d\eta \,. \tag{9}$$

В результате, получим

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{a} \cdot e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \cdot e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}} J_0(z_n) N_n\left(t - t_n - \frac{x-x_n+2nl}{a}\right) -$$

$$- e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{x-x_n}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_n(\eta) d\eta \,. \tag{10}$$

При вычислении этой производной учтено, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c_1(x-x_n)}{z} \,;$$

$$\frac{\partial J_0(z)}{\partial x} = \frac{dJ_0(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c_1(x-x_n)}{z} \cdot \frac{dJ_0(z)}{dz} = -\frac{c_1(x-x_n)}{z} J_1(z) \,;$$

так как

$$\frac{dJ_0(z)}{dz} = -J_1(z) \,.$$

В формуле (10) z_n – значение функции z при $\eta = t - t_n - \frac{x-x_n+2nl}{a}$, то есть

$$z_n = \sqrt{c_1 \left[(x-x_n)^2 - a^2 \left((t-t_n) - \left(t - t_n - \frac{x-x_n+2nl}{a}\right)\right)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{c_1[(x-x_n)^2 - (x-x_n+2nl)^2]} \,. \tag{11}$$

Поэтому с помощью формулы (10), учтя, что при $\eta = t - t_n - \frac{x-x_n}{a}$ $z = 0$, а $J_0(0) = 1$, получаем

$$\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} = -\frac{2}{a} e^{\frac{-(B-Da)(x-x_n)}{2}} N_0\left(t - t_n - \frac{x-x_n}{a}\right) -$$

$$- 2e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{x-x_n}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_0(\eta) d\eta \,. \tag{12}$$

Подставим теперь форму решения (8)в краевое условие (7) с учетом (12). В результате, получим

$$-\frac{2}{a} N_0(t-t_n) - B \int_0^{t-t_n} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_0(\eta) d\eta = N(t-t_n) \,. \tag{13}$$

В равенстве (13) следует принимать

$$z|_{x=x_n} = a(t - t_n - \eta)\sqrt{-c_1}\,. \tag{14}$$

Равенство (13) представляет собой интегральное уравнение для определения функции N_0. Выполним в уравнении (13) преобразование

$$\tau = t - t_n\,. \tag{15}$$

Тогда уравнение (13) примет вид

$$-\frac{1}{a}\,N_0(\tau) - \frac{B}{2}\int_0^{\tau} J_0(a(\tau-\eta)\sqrt{-c_1}\,)\,e^{\frac{Da^2(\tau-\eta)}{2}}\,N_0(\eta)d\eta = \frac{1}{2}N(\tau)\,. \tag{16}$$

Из уравнения (16) и определения (6) функции $N(\tau)$ следует, что $N_0(\tau)$ обладает следующим свойством:

$$N_0(\tau) \equiv 0\,, \qquad \tau < 0. \tag{17}$$

В силу свойства (17) функция (6) удовлетворяет начальным условиям (2). Действительно, при $t = t_n$ из формулы (8) получаем

$$u_0(x, t_n) = 2e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}}\int_0^{-\frac{x-x_n}{a}} J_0(z)e^{\frac{-Da^2\eta}{2}}N_0(\eta)d\eta\,.$$

При $x - x_n > 0$ верхний предел интегрирования в этой формуле отрицателен и, следовательно, на основании свойства (17) функции $N_0(\tau)$, $u_0(x, t_n) = 0$. Иными словами, функция (8) удовлетворяет первому начальному условию (2). Продифференцируем функцию (9) по t. В результате, получим

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}}\left[e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}}\,J_0(z_n)N_n\left(t - t_n - \frac{x-x_n+2nl}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}}\left[\frac{Da^2}{2}\,J_0(z) + c_1a^2\frac{t-t_n-\eta}{z}\,J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}}\,N_n(\eta)d\eta\right]\,. \tag{18}$$

При вычислении этой производной учтено, что

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{c_1a^2(t-t_n-\eta)}{z}\ ;$$

$$\frac{\partial J_0(z)}{\partial t} = \frac{dJ_0(z)}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c_1a^2(t-t_n-\eta)}{z}\cdot\frac{dJ_0(z)}{dz} = \frac{c_1a^2(t-t_n-\eta)}{z}\,J_1(z)\ .$$

С помощью формулы (18) получаем из (8)

$$\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}}\left[e^{\frac{Da(x-x_n)}{2}}N_0\left(t - t_n - \frac{x-x_n}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}}\left[\frac{Da^2}{2}J_0(z) + c_1a^2\frac{t-t_n-\eta}{z}J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}}N_0(\eta)d\eta\right]\,. \tag{19}$$

Из формулы (19) при $t = t_n$ получаем

$$u_{0,t}(x,t_n) = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \left[e^{\frac{Da(x-x_n)}{2}} N_0\left(-\frac{x-x_n}{a}\right) + \right.$$

$$\left. +2\int_0^{-\frac{x-x_n}{a}} \left[\frac{Da^2}{2}\, J_0(z) - c_1 a^2 \frac{\eta}{z}\, J_1(z)\right] e^{=\frac{Da^2\eta}{2}} N_0(\eta)d\eta \right] .$$

В правой части этой формулы при $x - x_n > 0$ верхний предел интегрирования и аргумент функции $N_0(\tau)$ отрицательны. Поэтому на основании свойства (17) функции $N_0(\tau)$ $u_{0,t}(x,t_n) = 0$. А это значит, что функция (8) удовлетворяет второму начальному условию (2).

Таким образом, функция (8) в области $0 < x - x_n < l;\ t > t_n$ удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме второго краевого условия (3). С целью проверки выполнения этого условия с помощью (8) и (12) вычислим

$$u_{0,x}(x_n+l,t) = -\frac{2}{a}\, e^{-\frac{B-Da}{2}l} N_0\left(t - t_n - \frac{l}{a}\right) -$$

$$- 2e^{-\frac{B}{2}l} \int_0^{t-t_n-\frac{l}{a}} \left[\frac{B}{2}\, J_0(z) + c_1 \frac{l}{z}\, J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_0(\eta)d\eta\,. \quad (20)$$

Из формулы (20) и свойства (17) функции $N_0(\tau)$ следует, что функция (8) удовлетворяет второму краевому условию (3) при $t-t_n < \frac{l}{a}$. Для выполнимости этого краевого условия при $t - t_n > \frac{l}{a}$ решение задачи строится в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)\,, \quad (21)$$

где

$$u_1(x,t) = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2l}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}} [N_1(\eta) - N_0(\eta)]d\eta \quad (22)$$

с неизвестной функцией $N_1(\tau)$. Функция $u_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) при произвольных функциях $N_0(\tau)$ и $N_1(\tau)$.

С целью дальнейшего построения решения и анализа краевых условий (3) вычислим производную по x от функции более общего вида

$$u(x,t) = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n-2nl}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_n(\eta)d\eta\,. \quad (23)$$

В результате, получим

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{a}e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}}\,e^{-\frac{Da(x-x_n-2nl)}{2}}J_0(z_{pn})N_n\left(t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}\right)-$$

$$-e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}}\int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}}\left[\frac{B}{2}J_0(z)+c_1\frac{x-x_n}{z}J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}}N_n(\eta)d\eta\,. \quad (24)$$

В формуле (24) z_{pn} – значение функции z при $\eta = t - t_n - \frac{x-x_n-2nl}{a}$, то есть

$$z_{pn} = \sqrt{c_1\left[(x-x_n)^2 - a^2\left((t-t_n)-\left(t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}\right)\right)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{c_1[(x-x_n)^2-(2nl-(x-x_n))^2]}\,. \quad (25)$$

Поэтому с помощью формулы (25) получаем из (22)

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} = \frac{2}{a}e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}}\,e^{\frac{Da(x-x_n-2l)}{2}}J_0(z_{p1})\left[N_1\left(t-t_n+\frac{x-x_n-2l}{a}\right)-\right.$$

$$\left.-N_0\left(t-t_n+\frac{x-x_n-2l}{a}\right)\right]-2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}}\int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2l}{a}}\left[\frac{B}{2}J_0(z)+\right.$$

$$\left.+c_1\frac{x-x_n}{z}J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}}[N_1(\eta)-N_0(\eta)]d\eta\,. \quad (26)$$

Заметив, что при $n = 1$ и $x = x_n + l$ из (25) следует $z_{p1} = 0$, получаем из (8), (12), (22) и (26), что подстановка функции (21) во второе краевое условие (3) приводит к равенству

$$u_x(x_n+l,t) = -\frac{2}{a}e^{-\frac{B-Da}{2}l}\left[N_0\left(t-t_n-\frac{l}{a}\right)-N_1\left(t-t_n-\frac{l}{a}\right)+N_0\left(t-t_n-\frac{l}{a}\right)\right]-$$

$$-2e^{-\frac{B}{2}l}\int_0^{t-t_n-\frac{l}{a}}\left[\frac{B}{2}J_0(z)+c_1\frac{l}{z}J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}}\times$$

$$\times[N_0(\eta)+(N_1(\eta)-N_0(\eta))]d\eta = 0\,. \quad (27)$$

Из (27) следует, что функция (21) будет удовлетворять второму краевому условию

(3) при всех $t > t_n$, если функция N_1 будет решением интегрального уравнения

$$N_1\left(t - t_n - \frac{l}{a}\right) - ae^{-\frac{Da}{2}l}\int_0^{t-t_n-\frac{l}{a}}\left[\frac{B}{2}J_0(z)+\right.$$

$$\left.+\,c_1\frac{l}{z}J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}}N_1(\eta)d\eta = 2N_0\left(t - t_n - \frac{l}{a}\right). \quad (28)$$

В формуле (28) величину z следует полагать равной её значению при $x - x_n = l$, то есть

$$z|_{x-x_n=l} = \sqrt{c_1[t^2 - a^2(t - t_n - \eta)^2]}. \quad (29)$$

После выполнения преобразования

$$\tau = t - t_n - \frac{l}{a} \quad (30)$$

интегральное уравнение (28) примет вид

$$N_1(\tau) + ae^{-\frac{Da}{2}l}\int_0^{\tau}\left[\frac{B}{2}J_0(z) + c_1\frac{l}{z}J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2(\tau+l/a-\eta)}{2}}N_1(\eta)d\eta = 2N_0(\tau), \quad (31)$$

где

$$z = \sqrt{c_1\left[l^2 - a^2(\tau + l/a - \eta)^2\right]}. \quad (32)$$

Из свойства (17) функции $N_0(\tau)$ и уравнения (31) следует, что функция $N_1(\tau)$ обладает свойством

$$N_1(\tau) \equiv 0, \quad \tau < 0. \quad (33)$$

Используя свойства (17) и (33) функций $N_0(\tau)$ и $N_1(\tau)$, так же как и для функции $u_0(x,t)$, можно показать, что функция (21) удовлетворяет нулевым начальным условиям (2).

Таким образом, в области $0 < x - x_n < l, t > t_n$ функция (21) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме первого краевого условия (3). Учитывая, что функция $u_0(x,t)$ удовлетворяет первому краевому условию (3), нужно, чтобы функция $u_1(x,t)$ удовлетворяла краевому условию

$$u_{1,x}(x_n, t) = 0, \quad t > t_n. \quad (34)$$

С помощью равенств (22) и (26) получаем

$$u_{1,x}(x_n,t) = \frac{2}{a}e^{Dal}J_0(z_{p1b})\left[N_1\left(t - t_n - \frac{2l}{a}\right) - N_0\left(t - t_n - \frac{2l}{a}\right)\right] -$$

$$-\,B\int_0^{t-t_n-\frac{2l}{a}}J_0(z)e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}}[N_1(\eta) - N_0(\eta)]d\eta. \quad (35)$$

Здесь из формулы (25) получено

$$z_{pnb} = z_{pn}\big|_{x=x_n} = 2nl\sqrt{-c_1}\,. \tag{36}$$

Из формулы (35) и свойств (17) и (33) функций $N_0(\tau)$ и $N_1(\tau)$ следует, что условие (34) будет выполнено только при $t-t_n < \frac{2l}{a}$. Для того чтобы удовлетворить этому условию при $t-t_n > \frac{2l}{a}$, решение задачи будем строить в виде суммы трех функций:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{37}$$

где

$$u_2(x,t) = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2l}{a}} J_0(z)e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}}\,[N_2(\eta)-(N_1(\eta)-N_0(\eta))]d\eta \tag{38}$$

с неизвестной функцией $N_2(\tau)$. Функция $u_2(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) при произвольных функциях $N_0(\tau)$, $N_1(\tau)$ и $N_2(\tau)$. Сумма функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ должна удовлетворять краевому условию

$$u_{1,x}(x_n,t) + u_{2,x}(x_n,t) = 0, \quad t > t_n\,. \tag{39}$$

Подставляя в (39) значения функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ из (22) и (38), с учётом равенств (12) и (26) получим

$$\frac{2}{a}J_0(z_{1b})e^{Dal}\left[N_1\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right) - N_0\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right) - \left[N_2\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(N_1\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right) - N_0\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right)\right)\right]\right] -$$

$$- B\int_0^{t-t_n-\frac{2l}{a}} J_0(z)e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}}[N_1(\eta)-N_0(\eta)+[N_2(\eta)-(N_1(\eta)-N_0(\eta))]]d\eta = 0\,. \tag{40}$$

Здесь из формулы (25) получено

$$z_{nb} = z_n\big|_{x=x_n} = 2nl\sqrt{-c_1} \tag{41}$$

и учтено, что $z_{pnb} = z_{nb}$. Таким образом, оказывается, что если функция $N_2(\tau)$ будет удовлетворять получаемому из (40) интегральному уравнению

$$-N_2\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right) - \frac{aB}{2J_0(z_{1b})}e^{-Dal}\int_0^{t-t_n-\frac{2l}{a}} J_0(z)e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}}N_2(\eta)d\eta =$$

$$= 2\left[N_1\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right) - N_0\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right)\right]\,, \tag{42}$$

то функция (37) будет удовлетворять первому краевому условию (3) при всех $t > t_n$. После выполнения преобразования

$$\tau = t - t_n - \frac{2l}{a} \tag{43}$$

интегральное уравнение (42) примет вид

$$- N_2(\tau) - \frac{aB}{2J_0(z_{1b})}\, e^{-Dal} \int_0^\tau J_0\left(a\left(\tau + \frac{2l}{a} - \eta\right)\sqrt{-c_1}\right) e^{\frac{Da^2\left(\tau+\frac{2l}{a}-\eta\right)}{2}} N_2(\eta)d\eta = = -2[N_1(\tau) - N_0(\tau)]\,. \tag{44}$$

Из уравнения (44) и свойств (17) и (33) функций $N_0(\tau)$ и $N_1(\tau)$ следует, что функция $N_2(\tau)$ обладает свойством

$$N_2(\tau) \equiv 0\,, \quad \tau < 0\,. \tag{45}$$

Используя свойства (17), (33) и (45) функций $N_0(\tau)$, $N_1(\tau)$ и $N_2(\tau)$, так же как и для функции $u_0(x,t)$, можно показать, что функция (37) удовлетворяет нулевым начальным условиям (2).

Таким образом, в области $0 < x - x_n < l$, $t > t_n$ функция (37) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме второго краевого условия (3). Учитывая, что функция $u_0(x,t) + u_1(x,t)$ удовлетворяет второму краевому условию (3), нужно, чтобы функция $u_2(x,t)$ удовлетворяла краевому условию

$$u_{2,x}(x_n + l, t) = 0, \quad t > t_n. \tag{46}$$

Подстановка функции $u_2(x,t)$ в левую часть краевого условия (46) с учетом (12) приводит к равенству

$$u_{2,x}(x_n + l, t) = -\frac{2}{a}\, e^{-\frac{B}{2}l}\, e^{\frac{3Da}{2}l} J_0(z_{1k}) \sum_{i=0}^{2} (-1)^i N_i\left(t - t_n - \frac{3l}{a}\right) -$$

$$- e^{-\frac{B}{2}l} \int_0^{t-t_n-\frac{3l}{a}} \left[\frac{B}{2}\, J_0(z) + c_1 \frac{l}{z}\, J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2} (-1)^i N_i(\eta)d\eta\,. \tag{47}$$

При $t - t_n < \frac{3l}{a}$, ввиду отрицательности аргументов функций N_i и верхних пределов интегрирования,на основании свойств (17), (33) и (45) функций N_i, заключаем, что выражение (47) будет равно нулю, то есть функция (37) будет удовлетворять второму краевому условию (3). При $t - t_n > \frac{3l}{a}$ выражение (47) будет отлично от нуля и с целью удовлетворения второму краевому условию (3) строим решение в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t), \tag{48}$$

где

$$u_3(x,t) = 2e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-4l}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{3} (-1)^{i+1} N_i(\eta)d\eta \tag{49}$$

с неизвестной функцией $N_3(\tau)$. Функция $u_3(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) при произвольных функциях $N_0(\tau)$, $N_1(\tau)$, $N_2(\tau)$ и $N_3(\tau)$. Сумма функций $u_3(x,t)$ и $u_2(x,t)$ должна удовлетворять краевому условию

$$u_{3,x}(x_n+l,t)+u_{2,x}(x_n+l,t)=0\,, \qquad t>t_n. \tag{50}$$

Подставляя в (50) значения функций $u_3(x,t)$ и $u_2(x,t)$ из (49) и (37), с учетом равенств (12) и (24), получим

$$\frac{2}{a}\,e^{-\frac{B}{2}l}\,e^{\frac{3Da}{2}l}J_0(z_{1k})\left[\sum_{i=0}^{3}(-1)^{i+1}N_i\left(t-t_n-\frac{3l}{a}\right)-\sum_{i=0}^{2}(-1)^{i}N_i\left(t-t_n-\frac{3l}{a}\right)\right]-$$

$$-\,2e^{-\frac{B}{2}l}\int_0^{t-t_n-\frac{3l}{a}}\left[\frac{B}{2}\,J_0(z)+c_1\frac{l}{z}\,J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2\,(t-t_n-\eta)}{2}}\times$$

$$\times\left[\sum_{i=0}^{3}(-1)^{i+1}N_i(\eta)+\sum_{i=0}^{2}(-1)^{i}N_i(\eta)\right]d\eta=0\,. \tag{51}$$

При построении равенств (47) и (51) использованы получаемые из равенств (11) и (25) величины

$$z_{nk}=z_n\big|_{x-x_n=l}=\sqrt{c_1[l^2-(2n+1)^2l^2]}=l\sqrt{-c_1[(2n+1)^2-1]}\,; \tag{52}$$

$$z_{pnk}=z_{pn}\big|_{x-x_n=l}=\sqrt{c_1[l^2-(1-2n)^2l^2]}=l\sqrt{-c_1[(2n-1)^2-1]} \tag{53}$$

и учтено также, что как следует из (52) и (53)

$$z_{p,n+1,k}=z_{nk}\,. \tag{54}$$

Из (51) получаем интегральное уравнение для определения функции N_3:

$$N_3\left(t-t_n-\frac{3l}{a}\right)-\frac{a}{J_0(z_{1k})}\,e^{-\frac{3Da}{2}l}\int_0^{t-t_n-\frac{3l}{a}}\left[\frac{B}{2}\,J_0(z)+\right.$$

$$\left.+c_1\frac{l}{a}\,J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2\,(t-t_n-\eta)}{2}}N_3(\eta)d\eta=2\sum_{i=0}^{2}(-1)^{i}N_i\left(t-t_n-\frac{3l}{a}\right)\,. \tag{55}$$

В уравнении (55)

$$z=\sqrt{c_1[l^2-a^2((t-t_n)-\eta)^2]}\,. \tag{56}$$

Таким образом, если функция N_3 является решением интегрального уравнения(55), функция (48) будет удовлетворять второму краевому условию (3) при всех t.

Выполнив в уравнении (55) преобразование

$$\tau = t - t_n - \frac{3l}{a}\,, \tag{57}$$

приведем его к виду

$$N_3(\tau) - \frac{a}{J_0(z_{1k})} e^{-\frac{Da}{2}3l} \int_0^\tau \left[\frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{a} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_3(\eta)d\eta = 2\sum_{i=0}^{2} (-1)^i N_i(\tau)\,, \tag{58}$$

где

$$z = \sqrt{c_1 \left[l^2 - a^2\left(\tau + \frac{3l}{a} - \eta\right)^2\right]}\,. \tag{59}$$

Из свойств (17), (33) и (45) функций $N_0(\tau)$, $N_1(\tau)$, и $N_2(\tau)$, а также уравнения (58) следует, что функция $N_3(\tau)$ обладает свойством

$$N_3(\tau) \equiv 0\,, \quad \tau < 0. \tag{60}$$

В свою очередь, из этих свойств, так же как и для функции $u_0(x,t)$, следует, что функция (48) удовлетворяет начальным условиям (2).

Продолжив построение отраженных волн аналогичным способом, мы вправе ожидать, что решением рассматриваемой краевой задачи будет функция

$$\begin{aligned} u(x,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \times \\ \times \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i N_i(\eta)d\eta + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \times \\ \times \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} N_i(\eta)d\eta\,, \end{aligned} \tag{61}$$

в которой $N_0(\tau)$ является решением интегрального уравнения (16), а остальные функции $N_i(\tau)$ являются решениями следующих интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} -N_{2n}(\tau) - \frac{aB}{2J_0(z_{nb})} e^{-Danl} \int_0^\tau J_0\left(a\left(\tau + \frac{2nl}{a} - \eta\right)\sqrt{-c_1}\right) \times \\ \times N_{2n}(\eta) \exp\left[\frac{Da^2\left(\tau + \frac{2nl}{a} - \eta\right)}{2}\right] d\eta = 2\sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i N_i(\tau); \end{aligned} \tag{62}$$

$$N_{2n-1}(\tau) - \frac{a}{J_0(z_{nk})} e^{-\frac{Da}{2}(2n-1)l} \int_0^{\tau} \left[\frac{B}{2} J_0(z)) + \right.$$

$$\left. + c_1 \frac{l}{a} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_{2n-1}(\eta) d\eta = 2 \sum_{i=0}^{2(n-1)} (-1)^i N_i(\tau) . \quad (63)$$

В уравнениях (63) следует z брать при $x = x_n + l$, то есть

$$z\big|_{x=x_n+l} = \sqrt{c_1[l^2 - a^2(t - t_n - \eta)^2]} = \sqrt{c_1 \left[l^2 - a^2 \left(\tau + \frac{2n-1}{a} l - \eta\right)^2\right]} . \quad (64)$$

Параметр τ в уравнениях (62) и (63) имеет соответственно следующие представления:

$$\tau = t - t_n - \frac{2nl}{a}; \quad \tau = t - t_n - \frac{2n-1}{a} l .$$

При этом все функции $N_n(\tau)$ обладают свойствами

$$N_n(\tau) \equiv 0 , \quad \tau < 0 , \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \quad (65)$$

В силу этих свойств, при каждом фиксированном $t - t_n = T$ в формуле (61) отличным от нуля будет конечное число слагаемых. В самом деле, в суммах в формуле (61) каждое из слагаемых при выполнении условий (4), (65) становится равным нулю, если верхний предел интегрирования будет отрицательным. Для первой суммы в формуле (61) условие отрицательности верхнего предела интегрирования при $t - t_n = T$ имеет вид

$$T - \frac{x - x_n + 2nl}{a} < 0 , \quad (66)$$

откуда следует

$$n > \frac{aT}{2l} - \frac{x - x_n}{2l} \quad (67)$$

и, поскольку в области отыскания решения $x - x_n < l$, получаем, что при всех n, удовлетворяющих условию

$$n > \frac{aT}{2l} - \frac{1}{2}, \quad (68)$$

все слагаемые в первой сумме формулы (61) будут равны нулю. Иными словами, суммирование в первой сумме формулы (61) нужно производить в этом случае не до бесконечности, а до $N-1$, где N - наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (68).

Аналогично, условие отрицательности верхнего предела интегрирования для второй суммы в формуле (61) при $t - t_n = T$ имеет вид

$$T + \frac{x - x_n - 2nl}{a} < 0 , \quad (69)$$

откуда следует

$$n > \frac{aT}{2l} + \frac{x - x_n}{2l}. \tag{70}$$

Поэтому из формулы (70) следует, что при

$$n > \frac{aT}{2l} + \frac{1}{2} \tag{71}$$

все слагаемые во второй сумме формулы (61) будут равны нулю. То есть, суммирование во второй сумме формулы (61) нужно производить в этом случае до $N_1 - 1$, где N_1 – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (71). Все слагаемые в формуле (61) являются решениями уравнения (1). А так как для каждого фиксированного t число слагаемых в формуле (61) конечно, дифференцирование в формуле (61) можно выполнять почленно. Поэтому функция (61) является решением уравнения (1).

Из формулы (61) непосредственно следует, что при $t - t_n = 0$ и $0 < x - x_n < l$ верхние пределы интегрирования всех интегралов становятся отрицательными. Значит, на основании свойств (6) и (65) функций $N(\tau)$ и $N_i(\tau)$ получаем из (61) $u(x, t_n) = 0$.

Таким образом, функция (61) удовлетворяет первому начальному условию (2). Продифференцируем функцию (61) по t. Получим

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \left[e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}} J_0(z_n) \times \right.$$

$$\times \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i N_i\left(t - t_n - \frac{x - x_n + 2nl}{a}\right) + 2\int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} \left[\frac{Da^2}{2} J_0(z) + \right.$$

$$\left. \left. + c_1 a^2 \frac{t - t_n - \eta}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i N_i(\eta) d\eta \right] +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \left[e^{\frac{Da(x-x_n-2nl)}{2}} J_0(z_{pn}) \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} N_i\left(t - t_n + \frac{x - x_n - 2nl}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}} \left[\frac{Da^2}{2} J_0(z) + c_1 a^2 \frac{t - t_n - \eta}{z} J_1(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} N_i(\eta) d\eta \right] \right]. \tag{72}$$

Из равенства (72) непосредственно следует, что при $t - t_n = 0$ и $0 < x - x_n < l$ верхние пределы интегрирования всех интегралов и аргументы всех функций $N_i(\tau)$ в нем становятся отрицательными. Значит, на основании свойств (6) и (65) функций $N(\tau)$ и $N_i(\tau)$ получаем из (61) $u_t(x, t_n) = 0$.

Таким образом, функция (61) удовлетворяет и второму начальному условию (2).

С целью проверки удовлетворения функцией (61) краевым условиям (3) вычислим производную по x этой функции. Используя равенства (10) и (24), получаем

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \left[\frac{2}{a} e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}} J_0(z_n) \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i N_i \left(t - t_n - \frac{x-x_n+2nl}{a}\right) + \right.$$

$$\left. +2\int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{x-x_n}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i N_i(\eta) d\eta\right] -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \left[\frac{2}{a} e^{-\frac{Da(x-x_n-2nl)}{2}} J_0(z_{pn}) \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i N_i \left(t - t_n + \frac{x-x_n-2nl}{a}\right) - \right.$$

$$\left. -2\int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{x-x_n}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i N_i(\eta)\right] d\eta\right] . \quad (73)$$

С помощью равенств (61) и (73) найдём выражение $u_x(x,t)$ при $x - x_n = 0$ и при $x - x_n = l$. Вычисляя значение при $x - x_n = 0$, запишем отдельно первое слагаемое в первой сумме, а оставшиеся слагаемые объединим под знаком общей суммы. В результате, получим

$$u_x(x_n,t) = -\frac{2}{a} N_0(t-t_n) - B\int_0^{t-t_n} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_0(\eta) d\eta +$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a} e^{Danl} J_0(z_{nb}) \left[N_{2n}\left(t-t_n-\frac{2nl}{a}\right) + 2\sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i N_i \left(t-t_n-\frac{2nl}{a}\right)\right] + \right.$$

$$\left. +B\int_0^{t-t_n-\frac{2nl}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_{2n}(\eta) d\eta\right] . \quad (74)$$

При выводе равенства (74) учтено, что согласно (31) и (41) $z_{nb} = z_{pnb}$. Первые два слагаемых в формуле (74) в соответствии с интегральным уравнением (13) равны $N(t - t_n)$. Общий же член под знаком суммы, согласно интегральным уравнениям (62), он равен нулю. Следовательно, равенство (74) приобретает вид

$$u_x(x_n,t) = N(t-t_n) = \nu(t-t_n), \quad t > t_n .$$

А это значит, что функция (61) удовлетворяет первому краевому условию (3).

При вычислении выражения (73) при $x - x_n = l$ выполним во второй сумме замену индекса суммирования

$$n_1 = n - 1$$

и объединим слагаемые под общим знаком суммы. В результате, получим

$$u_x(x_n + l, t) = -\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{B}{2}l}\left[\frac{2}{a}e^{\frac{Da}{2}(2n+1)l}J_0(z_{nk})\times\right.$$

$$\times\left[2\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i N_i\left(t - t_n - \frac{(2n+1)l}{a}\right) - N_{2n+1}\left(t - t_n - \frac{(2n+1)l}{a}\right)\right] +$$

$$\left. + 2\int_0^{t-t_n-\frac{(2n+1)l}{a}}\left[\frac{B}{2}J_0(z) + c_1\frac{l}{z}J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}}N_{2n+1}(\eta)d\eta\right]. \quad (75)$$

При вычислении (75) учтено равенство (54). Общий член суммы в (75), в соответствии с интегральными уравнениями (63), равен нулю. Следовательно, равенство (75) принимает вид

$$u_x(x_n + l, t) = 0\,.$$

А это значит, что функция (61) удовлетворяет и второму краевому условию (3).

Таким образом, показано, что функция (61) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, то есть является её решением.

3. Выводы

Благодаря показанной в [1] возможности интегрального представления, решения телеграфного уравнения удается получать решения целого класса краевых задач. В ограниченной области, кроме того, требуется строить продолжение краевых условий в зависимости от заданных начальных условий. А также применять обобщенный метод отражений применительно к телеграфному уравнению. Совместное применение этих методов позволило получить точное решение второй краевой задачи для телеграфного уравнения в ограниченной области.

Литература

1. Остапенко В. А. Краевая задача без начальных условий для телеграфного уравнения // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Днепропетровск : ДНУ, 2008. – С. 3-17.

2. Остапенко В. А.Вторая краевая задача для телеграфного уравнения в полубесконечной области // Вестник Днепропетровского университета, серия Моделирование. – 2009. – 17(8):1. – С. 89-92.

3. Остапенко В. А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в полуограниченной области // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Днепропетровск: ДНУ, 2008. – С. 18-20.

4. Остапенко В. А.Первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области. // Вестник Днепропетровского университета, серия Моделирование. – 2009. – 17(8);1. – С. 149-161.

SECOND BOUNDARY PROBLEM FOR TELEGRAPH EQUATION IN BOUNDED DOMAIN

V.A. Ostapenko

Dnepropetrovsk National University,
Dnepropetrovsk, 49010, Ukraine, e-mail: victor.ostapencko@yandex.ru

Abstract. The second boundary problem for the telegraph equation in boundary domain is studied. The prolem solution is obtained. The solution construction is based on the application of the reflection method and on the integral representation method developed in [1] which may be used for sufficiently wide class of telegraph equation solutions.

Key words: telegraph equation, boundary problem, bounded domain.