

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MAPLE 8 К ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОГО КЛАССА НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

М.А. Амаатов, Г.М. Аматова, И.С. Кузнецова, Н.А. Чеканов

Белгородский государственный университет
308015, Белгород, ул. Победы, 85
amatovm@bsu.edu.ru

В работе приведены программы для аналитического, графического и численного интегрирования методом шагов дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Предложенные программы, позволяют интегрировать как линейные, так и нелинейные уравнения, содержащие одно или несколько постоянных запаздываний. На приведённых примерах проиллюстрировано, как с помощью полученных программ можно исследовать изменение поведения решений уравнений запаздывающего и нейтрального типов в зависимости от изменения параметров.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, метод шагов, символьная алгебра.

Введение

Как известно, марковские процессы – это процессы без последействия, поэтому всякий процесс, в котором прошлые состояния системы влияют на её будущее развитие, будет немарковским. В статье мы рассматриваем класс немарковских процессов, описываемых дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, то есть уравнениями вида

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t), x(t-\tau), x'(t-\tau), \dots, x^{(m)}(t-\tau)) = 0. \quad (1)$$

Основная начальная задача для уравнения (1) ставится следующим образом: требуется найти решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(t) = f_0(t), \quad x'(t) = f_1(t), \dots, \quad x^{(m)}(t) = f_m(t) \quad \text{при} \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad (2)$$

а при $m < n-1$ – также дополнительным условиям

$$x^{(m+1)}(t_0) = C_1, \quad x^{(m+2)}(t_0) = C_2, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = C_{n-m-1}. \quad (3)$$

Здесь $f_0(t), f_1(t), \dots, f_m(t)$ – наперёд заданные непрерывные на отрезке $[t_0 - \tau, t_0]$ функции; $C_1, C_2, \dots, C_{n-m-1}$ – произвольные наперёд заданные числа; τ – постоянная.

Уже из самой формулировки основной начальной задачи ясно, что развитие при $t > t_0$ процесса, описываемого решением уравнения (1), существенным образом зависит от свойств начальных функций $f_0(t), f_1(t), \dots, f_m(t)$, заданных при $t \leq t_0$, поэтому такой процесс явно немарковский.



Постановка проблемы и анализ основных исследований

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом имеют большое значение в решении многих прикладных задач. Такие уравнения в физических задачах используются для описания явления гистерезиса в сопротивлении материалов и теории магнетизма [1]; в биологии при наличии возрастных различий в популяции [2, 3]; в теории автоматического управления и регулирования, если учитывается время, необходимое для передачи сигнала по каналу обратной связи [4-6]; и, как показано в [16], – в образовании при учёте времени запаздывания в восприятии информации. Много дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом прикладного характера, из различных областей знания, приведено в книге [7].

Теория уравнений (1) и их систем хорошо разработана, и ей посвящена обширная литература [7-13]. Но во всех этих работах практически отсутствуют вычисления численных значений решений или их графики. Возможно, это связано с плохой сходимостью или даже расходимостью (см. по этому поводу подстрочные примечания на стр. 38 и 223 в русском переводе книги [7]) рядов, которыми, как правило, представляются решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Вместе с тем известно, что самый простой, надёжный, дающий точное выражение решения метод интегрирования – метод шагов (метод последовательного интегрирования) приводит к очень громоздким вычислениям. Сложность интегрирования этим методом заключается в том, что решение, полученное на некотором шаге, подставляется в уравнение, которое после этого интегрируется и полученное решение вновь подставляется в уравнение и т.д. В результате с увеличением числа шагов усложняется как уравнение, так и его решение. Вручную решать обыкновенные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом методом шагов – крайне трудоемкая работа. Поэтому естественно попытаться применить к решению краевой задачи (1) – (3) компьютеры (ЭВМ). Но в математическом пакете MAPLE 8, прекрасно зарекомендовавшем себя при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений, программ для интегрирования уравнений вида (1) нет. Нет их и в более поздних версиях этого пакета MAPLE 9,10 [14]. Авторы настоящей работы задались целью, используя язык символьной алгебры математического пакета MAPLE 8, разработать алгоритмы и составить программы для нахождения решений обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего, нейтрального и опережающего типов методом шагов.

Комплекс программ DEDA

Для решения поставленной задачи в среде MAPLE был составлен комплекс программ DEDA (от Differential Equation with Deviation Argument). В комплекс входят программы: `ddesolve`, `oddeplot`, `ddesolve` и др.¹, которые позволяют находить решение дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в аналитическом виде, строить их графики и т.д. (название программ от английского differential-difference equation). Описание одного из алгоритмов программ из комплекса DEDA в псевдокодах вместе с примерами представлено ниже. Приводятся также примеры работы программ.

Мы ограничиваемся описанием лишь алгоритма в псевдокодах построения графика решения дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом (1). Описания остальных алгоритмов выглядят аналогично.

¹К сожалению, подпрограмма `dsolve` из пакета Maple работает некорректно.

**Алгоритм.****Input:**

dde – дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом запаздывающего, нейтрального или опережающего типа;

f – начальная функция (или список функций); t_0 – начальное значение аргумента;

X – искомая функция; *m* – число шагов.

Output:

P – график решения уравнения *dde*.

Local: *Eq, Sol, A, a, B, b, C, DSol, M, p, ic*, – вспомогательные массивы, *n4, n5, k* – натуральные числа, *T* – число типа *float*.

Procedure:

1: *str:=convert(dde,string): T:=parse(substring(str,n4..n4+n5-2)):*

for *k=1 to m do*

2: *xt[k]:=op(0,X0)(t0+(k-1)*τ)=C[k]:*

3: *Eq[k]:=subs(op(0,X0)(op(1,X0)-τ)=a[k],D(op(0,X0))(op(1,X0)-τ)=b[k]:*

4: *Sol[k]:=dsolve({Eq[k], xt[k]}, op(0,X0)(op(1,X0))):*

F[k]:= dsolve({Eq[k], xt[k]}, op(0,X0)(op(1,X0)), type=numeric,

range=t0+(k-1)τ..t0+kτ):

5: *A[k]:=op(2,Sol[k]): B[k]:=op(2,diff(Sol[k],op(1,X0))):*

a[k+1]:=subs(op(1,X0)=op(1,X0)-τ, A[k]): b[k+1]:=subs(op(1,X0)=op(1,X0)-τ,B[k]):

6: *p[k]:=odeplot(F[k],[op(1,X0), op(0,X0)(op(1,X0))], t0+(k-1)τ..t0+kτ)*

end do:

7: *plots[display](p[k]\$k=1..m);*

end of procedure.

Данная процедура реализуется в виде следующей последовательности шагов: на шаге 1 над уравнением *dde* проделывают некоторые вспомогательные действия, в результате чего, в частности, находят величину запаздывания *T*, порядок уравнения *n* и некоторые другие параметры.

Во вторых, выполняется *m*-кратный цикл из пяти шагов:

шаг 2 – нахождение начальных условий;

шаг 3 – подстановка решения и его производной с аргументом *t-τ* в уравнение *dde*;

шаг 4 – интегрирование полученного уравнения с начальными условиями, найденными на втором шаге;

шаг 5 – вычисление всех величин, необходимых для новых начальных условий;

шаг 6 – формирование графика решения на каждом из шагов.

После завершения *m*-кратного цикла выполняется следующий, последний.

Шаг 7 – вывод графика решения на заданном числе шагов.

Следует отметить, что функция *F* – левая часть уравнения (1) и функции $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ – входящие в начальные условия (2), предполагаются аналитическими, τ – число типа *float* или *fraction*.

Примеры применения программ комплекса DEDA

В качестве примеров применения программ комплекса рассмотрим некоторые из уравнений, содержащихся в книгах [7], [15] и в статье [16].

1) В книге [7] на стр. 117 приведено уравнение

$$y'(t) + ty(t) - \xi y(t - \xi) = 0, \quad (4)$$

которое имеет приложения в теории чисел.



Для уравнения (4) в книге [7] приведено громоздкое «представление решения в замкнутой форме». Для прикладника (нематематика) исследовать это решение в замкнутой форме не проще чем исследовать само исходное уравнение. Между тем, с помощью программы oddeplot комплекса DEDA легко строится график решения уравнения (4), положив в нём, для определённости $\xi = 2.34$ и взяв начальную функцию $f_0(t) = t + 1$. Получаем график, изображённый на рис. 1.

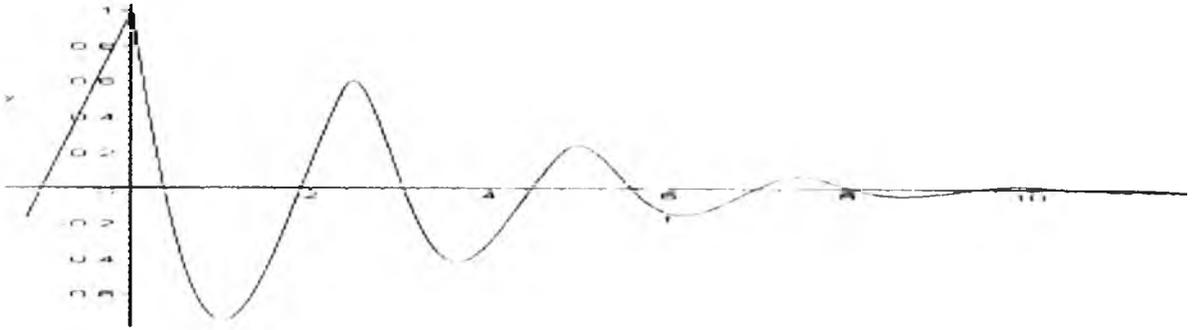


Рис. 1. Графическое решение уравнения (4) с $\xi = 2.34$ и начальной функцией $f_0(t) = t + 1$

Из графика видно, что решение выполняет затухающие колебания и через четыре шага практически обращается в нуль. Вычислив с помощью программы ddefsolve значение решения при $t = 10,5$, получаем: $[t = 10,5; y(t) = -0,000999712943761056542]$.

Выбирая другие начальные функции и другие значения $\xi > 0$, легко убеждаемся, что решения уравнения (4) по-прежнему представляют собой затухающие колебания. Положим, например, $\xi = 6$ в уравнении (4), получим график, изображённый на рис. 2.

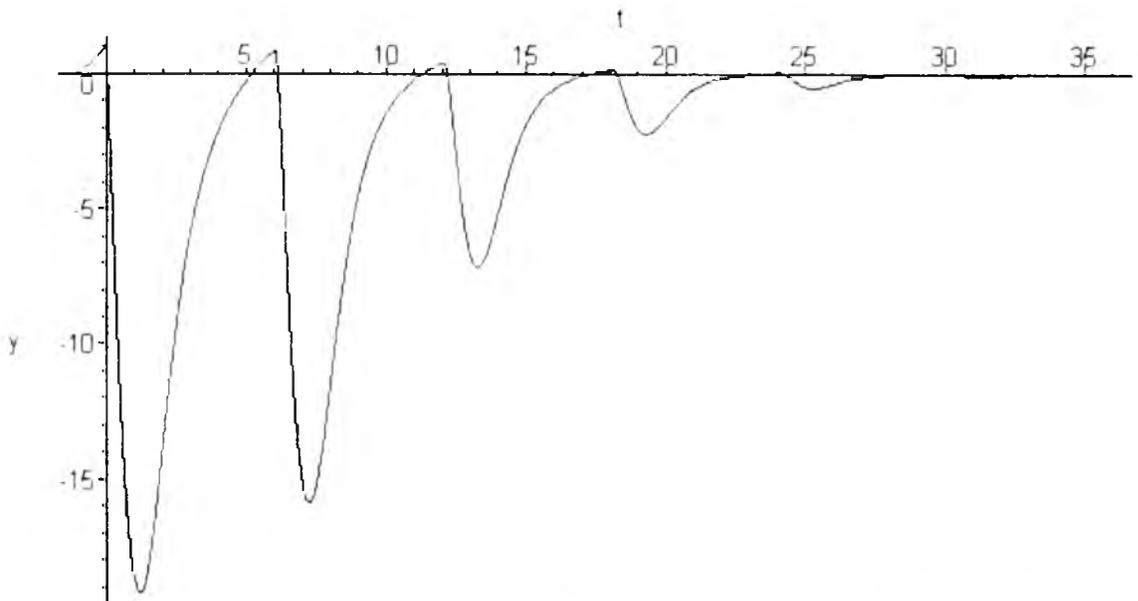


Рис. 2. Графическое решение уравнения (4) с $\xi = 6$ и начальной функцией $f_0(t) = t + 1$

Из графика (рис. 2) видно, что решение по-прежнему выполняет затухающие колебания, но характер колебаний изменился. Участки плавного изменения решения чередуются с участками быстрого, почти скачкообразного изменения. Можно предположить, что при больших значениях ξ решения имеют релаксационный характер [17].



2) Для уравнения

$$y'(t) + ay'(t-1) + by(t-1) = 0 \quad (5)$$

при $a = -\cos\eta$, $b = \eta \cdot \sin\eta$ (η – некоторый параметр) корни характеристического квазиполинома чисто мнимые ([7], стр.93). Следовательно, решения уравнения (5) при этих значениях коэффициентов периодические. Для значения параметра $\eta = 1$ график решения с начальной функцией $f_0(t) = t^2$, построенный с помощью программы oddeplot, изображён на рис. 3.

Если взять значение параметра η в десять раз меньше, положив $\eta = 0,1$, то при той же начальной функции получается график, изображённый на рис. 4. Очевидно, что в обоих случаях в системе устанавливаются периодические колебания, но с уменьшением параметра η как период, так и амплитуда колебаний увеличились. Таким образом, программа oddeplot не только позволяет строить графики уравнений вида (1), но и анализировать изменение свойств решений в зависимости от изменения входящих в него параметров.

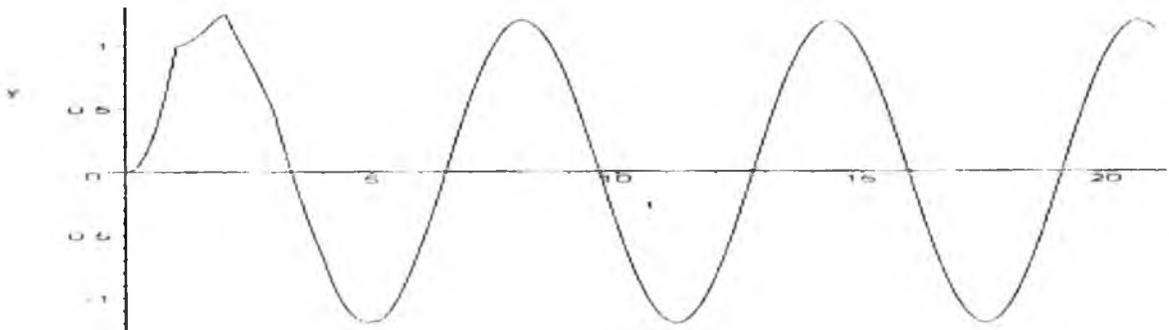


Рис. 3. Графическое решение уравнения (5) с $\eta = 1$ и начальной функцией $f_0(t) = t^2$

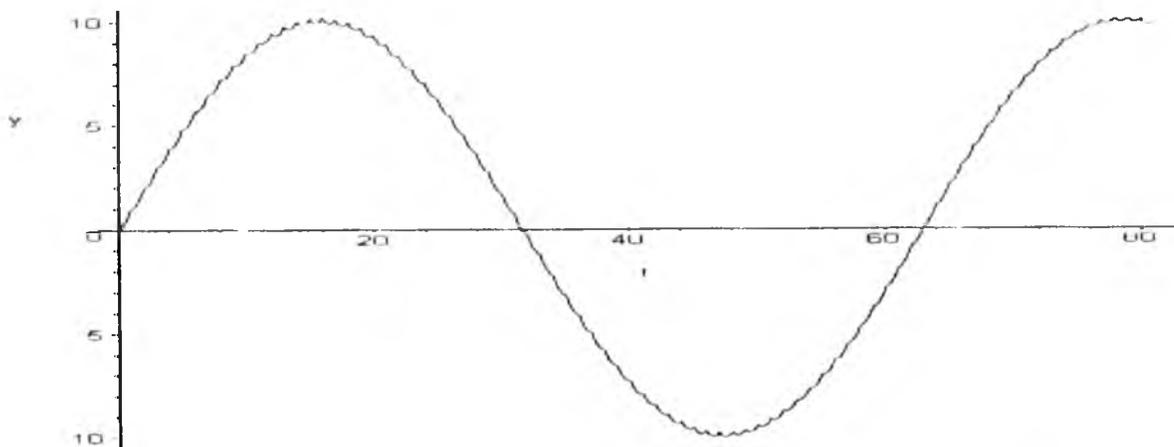


Рис. 4. Графическое решение уравнения (5) с $\eta = 0,1$ и начальной функцией $f_0(t) = t^2$.

3) В качестве следующего примера рассмотрим уравнение Минорского из книги [7] (стр. 191):



$$y''(t) + 2r \cdot y'(t) + \omega^2 \cdot y(t) + 2q \cdot y'(t-1) = \varepsilon y^3(t-1), \quad (6)$$

описывающее процесс самовозбуждения колебаний в системах стабилизации судов.

Если положить в уравнении (6) $r = 0,01$; $\omega = 3,958535083$; $q = -0,7$; $\varepsilon = 0,01$ и нелинейную правую часть заменить на линейное выражение $\varepsilon \cdot y'(t-1)$, то решение полученного линейного уравнения с начальной функцией $f_0(t) \equiv 1$ будет периодическим. Интегральная кривая его с помощью программы oddeplot изображена на рис. 5.

Если в самом нелинейном уравнении Минорского (6) положим $\varepsilon = 0,001$, а в качестве начальной функции возьмём $f_0(t) \equiv 0,1$, то решение также оказывается периодическим. Его интегральная кривая, построенная программой oddeplot, изображена на рис. 6.

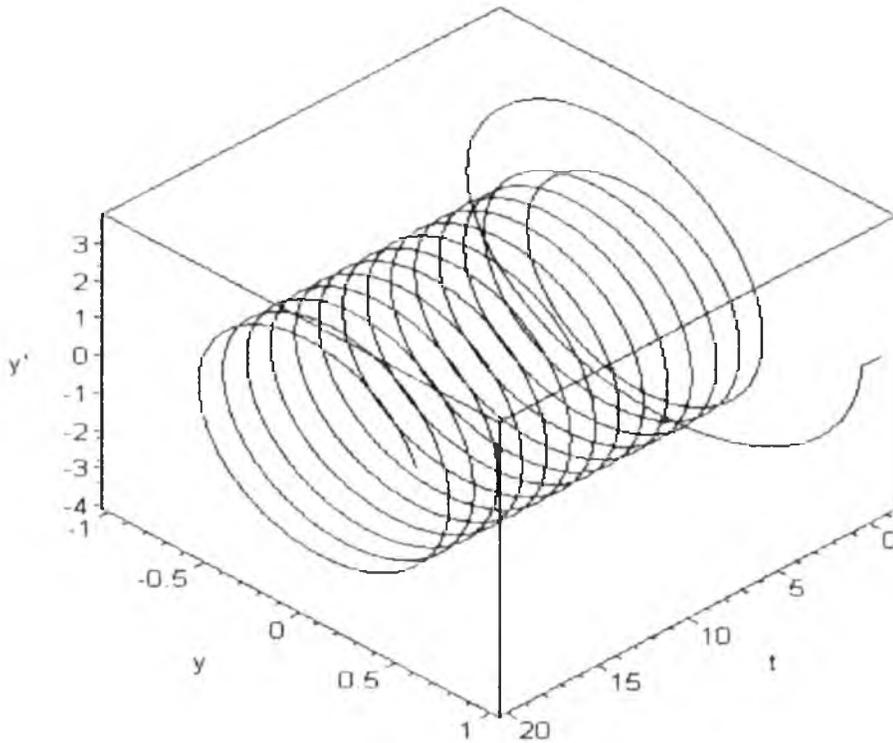


Рис. 5. Фазовая траектория уравнения (6) с линейной правой частью и начальной функцией $f_0(t) \equiv 1$

4) Рассмотрим теперь уравнение

$$x'(t) + K \cdot x(t - T_3) = b(t), \quad (7)$$

о котором в статье [16] сказано, что оно является «наиболее адекватной для описания процесса обучения моделью». В уравнении (7) приняты следующие обозначения: $x(t)$ – количественная характеристика усвоенной в процессе обучения информации; $b(t)$ – количественная характеристика входной информации; K – индивидуальный коэффициент восприятия информации; T_3 – индивидуальное время запаздывания в восприятии информации.

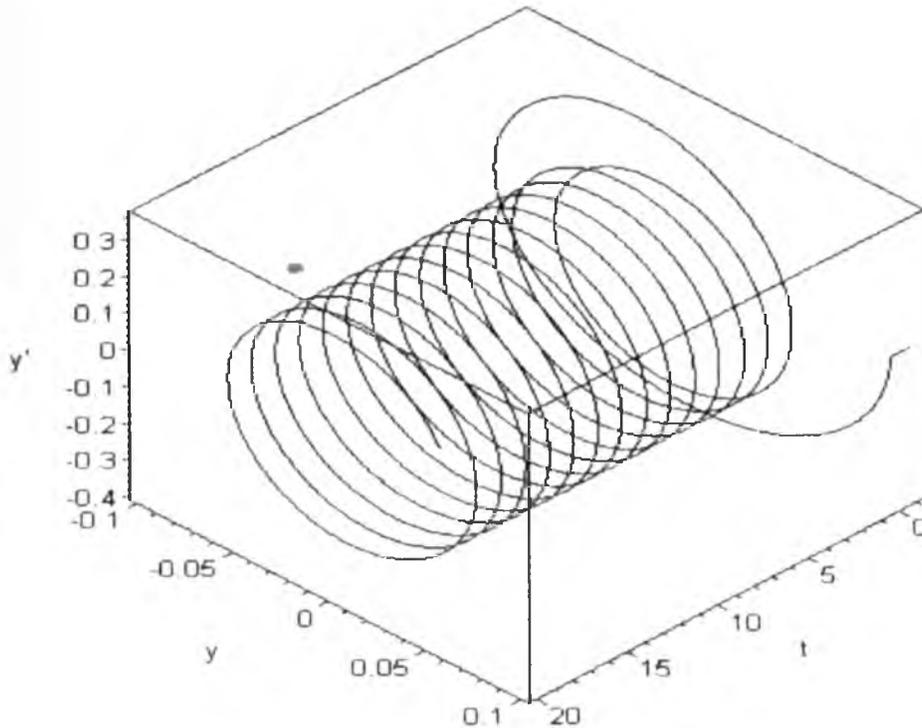


Рис. 6. Периодическое решение уравнения (6) с нелинейной правой частью при $\varepsilon = 0,001$ и начальной функцией $f_0(t) \equiv 0,1$

При $b(t) \equiv b_0 = const$ и $K = const$ уравнение (7) имеет стационарное решение $x(t) \equiv b_0/K$, которое параллельным переносом всегда может быть преобразовано в тривиальное решение $x(t) \equiv 0$. Поэтому существенным параметром является только запаздывание T_3 . Исследуем зависимость решения уравнения (7) от T_3 . Используя программу oddeplot легко обнаруживаем, что при $T_3 < \pi/2K$ стационарное движение $x(t) \equiv b_0/K$ устойчиво; при $T_3 > \pi/2K$ – неустойчиво (рис. 7,8).

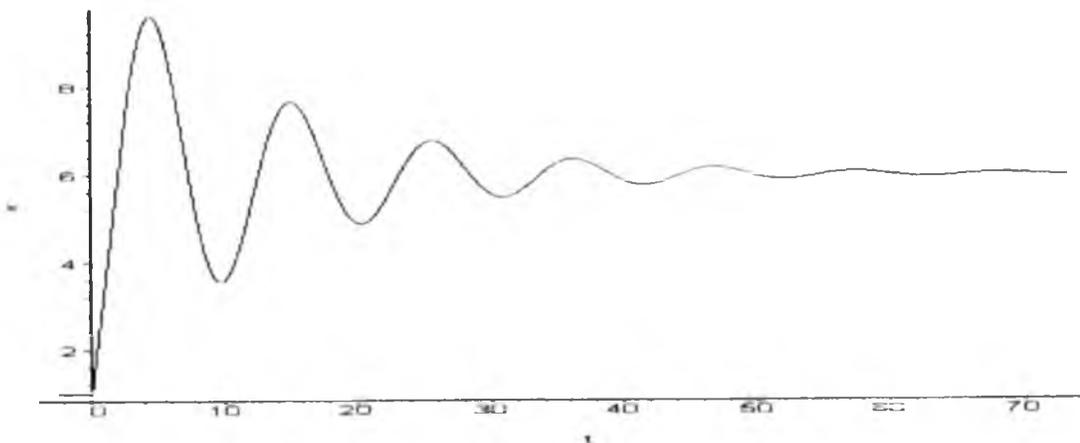


Рис. 7. Решение уравнения (7) с параметрами $b = 3$, $K = 0,5$, $T_3 = \frac{\pi}{2K} - 0,7$ и начальной функцией $f_0(t) \equiv 1$.

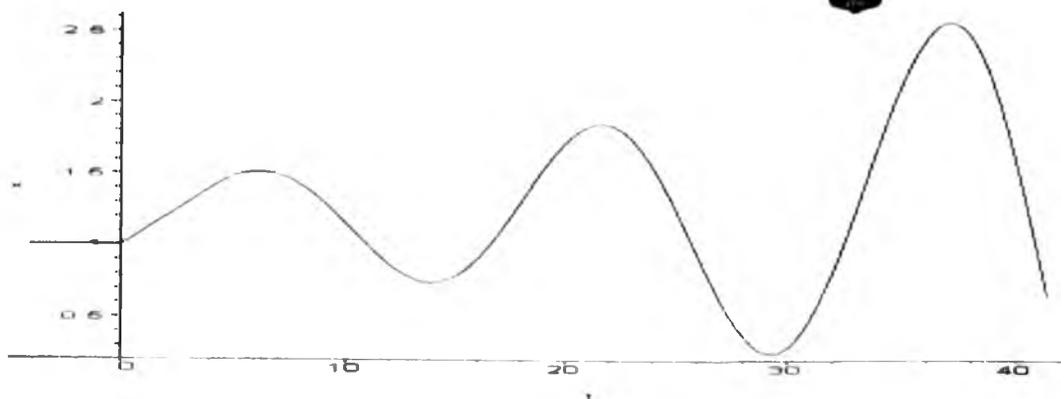


Рис. 8. Решение уравнения (7) с параметрами $b = 0.6$, $K = 0.5$, $T_3 = \pi/2K + 1$ и начальной функцией $f_0(t) \equiv 1$

Мы не будем проводить анализ полученных решений с позиции педагогики или психологии, отметим только, что при $T_3 < \pi/2K - 2.33$ они стремятся к стационарному решению монотонно, а при $T_3 > \pi/2K - 2.33$ имеют колебательный характер.

Если найти, с помощью программы ddesolve, аналитические выражения решений уравнения (7) при значениях параметров $b = 3$, $K = 0.5$ и $T_3 = \pi$, то получим:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{5}{2}t + 1, & 0 \leq t \leq \pi \\ -\frac{5}{8}t^2 + \frac{3213495409}{500000000}t - \frac{10337005507725047299}{20000000000000000000}, & \pi \leq t \leq 2\pi, \\ \dots \end{cases}$$

то есть на k -том шаге решение задаётся многочленом степени k .

Отсюда, а также из того, что решение определено только для $t \geq 0$, следует, что при этих значениях параметров, решение уравнения (7), строго говоря, периодическим не будет. Хотя график его очень напоминает график периодической функции (рис. 9).

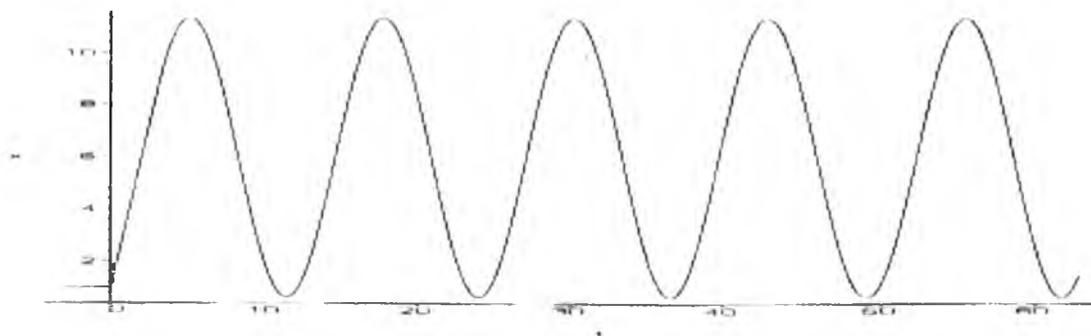


Рис. 9. Решение уравнения (7) с параметрами $b = 3$, $K = 0.5$, $T_3 = \pi/2K$ и начальной функцией $f_0(t) \equiv 1$.

Более того, легко можно доказать, что характеристический квазиполином уравнения (7) не имеет чисто мнимых корней и, следовательно, периодических решений, кроме $x(t) \equiv b_0/K$, оно не имеет.

Аналогично, с помощью программ комплекса DEDA, могут быть проанализированы и другие уравнения статьи [16]. Мы не будем останавливаться на этом ввиду ограниченности объёма статьи, заметив лишь, что возможность обнаружения хаотиче-



ских движений, с помощью программ комплекса DEDA в уравнениях с запаздыванием, была отмечена нами в статье [18].

5) В качестве последнего примера применения программ пакета DEDA рассмотрим уравнение ([15], стр. 227) с двумя запаздываниями:

$$x''(t) + 2 \cdot x'(t-2) + x(t-4) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) с указанными начальными условиями в аналитическом виде (в виде формулы) найдено на 5 шагах с использованием программы ddesolve:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{6}, & 0 \leq t \leq 2; \\ -\frac{1}{12}t^4 + \frac{5}{6}t^3 - 2t^2 + \frac{8}{3}t - \frac{4}{3}, & 2 \leq t \leq 4; \\ \frac{1}{40}t^5 - \frac{7}{12}t^4 + \frac{29}{6}t^3 - 18t^2 + \frac{104}{3}t - \frac{404}{15}, & 4 \leq t \leq 6; \\ -\frac{1}{180}t^6 + \frac{9}{40}t^5 - \frac{43}{12}t^4 + \frac{173}{6}t^3 + 126t^2 - \frac{4408}{15}t - \frac{4292}{15}, & 6 \leq t \leq 8; \\ \frac{1}{1008}t^7 - \frac{11}{180}t^6 + \frac{187}{120}t^5 + \frac{769}{36}t^4 + \frac{3079}{18}t^3 - \frac{2426}{3}t^2 - \frac{95144}{45}t - \frac{745492}{315}, & 8 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

Легко проверить, что оно полностью совпадает на отрезке $[0; 10]$ с решением

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)(t-2k)^{k+3}}{(k+3)!} \cdot \eta(t-2k),$$

полученным в книге [15] операционным методом ($\eta(t)$ – функция Хевисайда).

Мы ограничились выводом только пяти шагов решения основной начальной задачи (8) только потому, чтобы не увеличивать объём статьи.

Следует отметить, что для линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего и нейтрального типов составленные программы обеспечивают вывод числа шагов ограниченного только объёмом памяти компьютера. Для нелинейных же уравнений вывод решения прекращается на том шаге, когда в силу чрезмерного усложнения уравнения его решение уже не может быть выражено через элементарные и известные специальные функции или, если на следующем шаге решение обращается в бесконечность.

Заключение

Приведённые примеры (и множество других примеров, рассмотренных авторами) показывают, что:

- 1) полученные программы позволяют анализировать изменения поведения решения в зависимости от изменений значений параметров, входящих в уравнения и начальные данные;
- 2) для определения асимптотического поведения решения, как правило, достаточно конечного числа шагов.



Литература

1. Volterra V. Sur la theorie mathematique des phenomenes hereditaires// J. Math. Pures and Appl. – 1928. – V.7. – P.249-298.
2. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
3. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. – М.: Мир, 1983. – 397 с.
4. В. Резван. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1983. – 359 с.
5. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1971. – 595 с.
6. Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
7. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. – М.: ИЛ, 1961. – 248 с.
8. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.
9. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
10. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
11. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1965. – 354 с.
12. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
13. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
14. Дьяконов В.П. MAPLE 9 в математике, физике и образовании. – М.: Солон, 2004. – 688 с.
15. Мартыненко В.С. Операционное исчисление. – К.: Вища школа, 1990. – 359 с.
16. Солодова Е.А., Антонов Ю.П. Нелинейные модели в образовании // Нелинейный мир. – 2005. – Т.3. – №3. – С.193-201.
17. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975. – 247 с.
18. Амагов М.А., Клименко И.А., Кузнецова И.С., Чеканов Н.А. Интегрирование дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом с помощью математического пакета MAPLE 8 // Вест. Херсон. нац. техн. ун-та. – 2006. – № 2(25). – С.14-18.

THE USE OF MAPLE 8 COMPUTER ALGEBRA SYSTEM IN INVESTIGATION INTO A CERTAIN CLASS OF NON-MARKOV PROCESS

M.A. Amatov, G.M. Amatova, I.S. Kuznetsova, N.A. Chekanov

Belgorod State University,
308015, Belgorod, Pobedy Str., 85

The paper deals with software programs for analytical, graphic, and numerical step integration of differential-difference equations. The examples given illustrate a way to investigate changes in behavior of solutions for delayed and neutral types of equations depending on changes in parameters.

Key words: differential-difference equation, step integration method, symbol algebra.