УДК 517.983

# ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ*

**А.В. Глушак[1], В.А. Попова[2]**

[1] Белгородский государственный университет, 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14
e-mail: glushak@bsu.edu.ru

[2] Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, 394006
г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84, e-mail: Moon84@yandex.ru

Установлены критерии однозначной разрешимости обратной задачи для сингулярного эволюционного уравнения с ограниченным оператором и оператором, порождающим аналитическую полугруппу.

Ключевые слова: обратная задача, эволюционное уравнение, дробный интеграл, однозначная разрешимость.

Пусть $E$ – банахово пространство, $A$ – линейный замкнутый плотно определенный оператор в $E$ с областью определения $D(A)$. Рассмотрим задачу определения функции $u(t) \in C^1((0,1],E)$, принадлежащей $D(A)$ при $t \in (0,1]$ и параметра $p \in E$ из соотношений

$$u'(t) + \frac{k}{t}u(t) = Au(t) + \frac{p}{t}, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} t^k u(t) = u_0, \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 1} I^{\beta}(t^k u(t)) = u_1, \tag{3}$$

где $I^{\beta}u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^t \frac{u(x)\,dx}{(t-x)^{1-\beta}}$ – дробный интеграл Римана-Лиувилля.

Задача $(1)-(3)$ для $k=0$, $\beta=0$ и различных ограничениях на оператор $A$ рассматривалась ранее в работах [1 – 7].

В настоящей работе задача (1) – (3) при $k>0$, $\beta>0$ рассматривается в случаях, когда оператор $A$ является ограниченным оператором или производящим оператором аналитической полугруппы.

**Теорема 1.** Пусть $k>0$, $\beta>0$ и $A$ – ограниченный оператор. Для того, чтобы задача (1) – (3) при любых $u_0, u_1 \in E$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре оператора $A$ выполнялось условие

$$E_{1,\,k+\beta+1}(z) \neq 0, \quad z \in \sigma(A), \tag{4}$$

где $E_{\alpha,\mu}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\alpha)}$ – функция Миттаг-Леффлера.

**Доказательство.** Задача (1), (2) эквивалентна (см. [8]) задаче о нахождении функции $u(t)$ и параметра $p$ таких, что справедливо соотношение

$$t^k u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t \tau^{k-1} e^{(t-\tau)A} p\,d\tau. \tag{5}$$

* Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06-08-96312

Из равенства (5) и условия (3) следует, что необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1) – (3) является разрешимость при любом $q \in E$ уравнения

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(k+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{k+\beta-1} e^{sA} p ds = q, \tag{6}$$

то есть отсутствие в спектре оператора $B$ точки ноль.

Пусть $U$ такое открытое множество комплексной плоскости, что $\sigma(A) \subset U$ и граница $\gamma$ которого состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда для оператора $e^{sA}$ справедливо представление (см. [9, с. 608, 609])

$$e^{sA} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{sz} (zI - A)^{-1} dz,$$

и оператор $B$ из равенства (6) можно записать в виде

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(k+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{k+\beta-1} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{sz} (zI - A)^{-1} dz p ds. \tag{7}$$

Меняя в (7) порядок интегрирования и учитывая равенство 1.17 [10]

$$E_{1,\mu+1}(\lambda z) = \frac{1}{\Gamma(\mu) z^\mu} \int_0^z e^{\lambda t} (z-t)^{\mu-1} dt, \quad \mu > 0, \tag{8}$$

получим представление

$$Bp = \frac{1}{2\pi i \Gamma(k+\beta)} \int_\gamma \int_0^1 (1-s)^{k+\beta-1} e^{zs} ds (zI - A)^{-1} p dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma E_{1,k+\beta+1}(z)(zI - A)^{-1} p dz.$$

Это означает, что оператор $B$ является аналитической функцией оператора $A$, т.е. $B = E_{1,k+\beta+1}(A)$. По теореме об отображении спектра оператора [9, с. 608, 609] $\sigma(B) = E_{1,k+\beta+1}(\sigma(A))$. Таким образом, ноль не является точкой спектра оператора $B$ только тогда, когда на спектре оператора $A$ не обращается в ноль функция $E_{1,k+\beta+1}(z)$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 1 следует, что расположение нулей функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$ определяет однозначную разрешимость задачи (1) – (3) с ограниченным оператором. Для неограниченного оператора $A$ расположение нулей этой функции также будет играть важную роль. Поэтому мы приведем нужные нам результаты работы [11] о расположении нулей функции Миттаг-Леффлера.

В теореме 1 [11] установлено, что при $k + \beta > 0$ и подходящей нумерации все достаточно большие по модулю нули $z_n$ функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$ просты, и при $n \to \pm\infty$ справедлива асимптотика

$$z_n = 2\pi n i + (k+\beta-1)\left(\ln 2\pi|n| + i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} n\right) - \ln\Gamma(k+\beta) + O\left(\frac{\ln|n|}{|n|}\right), \quad n \to \pm\infty. \tag{9}$$

**Теорема 2.** Пусть $k > 0$, $\beta > 0$, $k+\beta \geq 1$ и оператор $A$ является производящим оператором аналитической полугруппы $T(t)$. Тогда для того, чтобы задача (1) – (3) при любых $u_0 \in E$, $u_1 \in D(A)$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка $z_j$, являющаяся нулем функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$, была регулярной точкой оператора $A$. Кроме того, для решения $(u(t), p)$ справедливы оценки

$$\|u(t)\| \leq C_1 t^{-k}\left(\|u_0\| + \|u_1\|\right), \tag{10}$$

$$\|p\| \leq C_2\left(\|u_0\| + \|u_1\| + \|Au_1\|\right). \tag{11}$$

**Доказательство.** Задача (1), (2) эквивалентна (см. [8]) задаче о нахождении функции $u(t)$ и параметра $p$ таких, что справедливо соотношение

$$t^k u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t \tau^{k-1} T(t-\tau) p d\tau. \tag{12}$$

Из равенства (12) и условия (3) следует, что однозначная разрешимость задачи (1) – (3) эквивалентна задаче о существовании у ограниченного оператора $B$, заданного соотношением

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(k+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{k+\beta-1} T(s) p ds , \tag{13}$$

обратного оператора, определенного на всей области определения $D(A)$.

Доказательство достаточности. Спектр оператора $A$, порождающего аналитическую полугруппу, лежит внутри острого угла, образованного лучами $\gamma_1 = \{z : z = \sigma_0 + \rho e^{-i\alpha},\ \ 0 \leq \rho < \infty\}$ и $\gamma_2 = \{z : z = \sigma_0 + \rho e^{i\alpha},\ \ 0 \leq \rho < \infty\}$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Обозначим внутренность этого угла через $\Omega$.

Учитывая асимптотику нулей функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$, определенную равенством (9), мы можем утверждать, что в $\Omega$ может попасть лишь конечное число точек $z_j$, удовлетворяющих уравнению $E_{1,k+\beta+1}(z) = 0$.

Каждую из точек $z_j$ окружим круговой окрестностью $S_j$ столь малого радиуса, что внутри $S_j$ не содержится точек спектра $A$. Это можно сделать, поскольку точка $z_j$, являющаяся нулем функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$, есть регулярная точка оператора $A$, а резольвентное множество оператора открыто. Спектр оператора $A$, таким образом, расположен в области $\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} S_j$, границу которой обозначим $\gamma$. Граница $\gamma$ состоит из лучей $\gamma_1$, $\gamma_2$ и окружностей $S_j$.

В силу вышесказанного, для оператора $T(t)$ справедливо представление

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{tz} R(z) dz, \qquad t > 0, \tag{14}$$

поэтому определяемый равенством (13) оператор $B$ можно представить в виде

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(k+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{k+\beta+1} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{sz} R(z) p dz ds. \tag{15}$$

По теореме Соломяка-Иосиды, для того, чтобы оператор $A$ был производящим оператором аналитической полугруппы $T(t)$, необходимо и достаточно, чтобы резольвентное множество этого оператора содержало некоторую полуплоскость $\operatorname{Re} z \geq \sigma_0$ и чтобы при $\operatorname{Re} z \geq \sigma_0$ выполнялось неравенство

$$\|R(z)\| \leq \frac{c}{1+|z|}. \tag{16}$$

Если выполнено неравенство (16), то резольвента $R(z)$ оператора $A$ определена не только при $\operatorname{Re} z \geq \sigma_0$, но и при всех значениях $z = \sigma_0 + \rho e^{i\varphi}$, где $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq |\varphi| \leq \alpha$, $\alpha$ – любое фиксированное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{c}\right)$. Норма резольвенты при этих значениях $z$ также удовлетворяет неравенству (16) с некоторой константой $c(\alpha)$.

Таким образом, учитывая (16), в равенстве (15) можно поменять порядок интегрирования. Тогда получим

$$B = \frac{1}{2\pi i\Gamma(k+\beta)} \int_\gamma \int_0^1 (1-s)^{k+\beta-1} e^{sz} ds R(z) dz,$$

а воспользовавшись формулой (8) будем иметь

$$B = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma E_{1,k+\beta+1}(z) R(z) dz. \tag{17}$$

В дальнейшем мы будем использовать асимптотику функции Миттаг-Леффлера (см. [10, с. 134]) при $|z| \to \infty$

$$E_{1,\mu}(z) = z^{1-\mu} e^z - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\mu-k) z^j} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad |\arg z| \leq \nu\pi, \quad \nu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$E_{1,\mu}(z) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\mu-k) z^j} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad \nu\pi \leq |\arg z| \leq \pi.$$

Рассмотрим оператор $M$, заданный на области определения $D(A)$ соотношением

$$Mx = \Gamma(k+\beta)\left(-Ax + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{E_{1,k+\beta}(z) R(z) x dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)}\right). \tag{18}$$

Учитывая асимптотику функции Миттаг-Леффлери и в силу выбора контура $\gamma$ и оценки (16), второе слагаемое в правой части (18) задает определенный на всем $E$ ограниченный оператор. Оператор $M$, таким образом, определен на всем $D(A)$. Покажем, что $M$ как раз и будет обратным по отношению к $B$ оператором.

При $x \in D(A)$ из (13) имеем

$$-ABx=-\frac{1}{\Gamma(k+\beta)}\int_0^1(1-s)^{k+\beta-1}AT(s)xds=-\frac{1}{\Gamma(k+\beta)}\int_0^1(1-s)^{k+\beta-1}T'(s)xds=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(k+\beta)}(1-s)^{k+\beta-1}T(s)x\Big|_0^1-\frac{(k+\beta-1)}{\Gamma(k+\beta)}\int_0^1(1-s)^{k+\beta-2}T(s)x\,ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k+\beta)}x-I^{k+\beta-1}T(1)x. \qquad (19)$$

В силу ограниченности операторов $B$ и $I^{k+\beta-1}T(1)$, плотности $D(A)$ в $E$ и замкнутости оператора $A$, равенство (19) справедливо при всех $x\in E$.

Далее, в силу представления (17) при всех $x\in E$, справедливо соотношение

$$B\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{E_{1,k+\beta}(z)R(z)x\,dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{E_{1,k+\beta}(z)R(z)}{E_{1,k+\beta+1}(z)}Bx\,dz=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\gamma\int_\Xi\frac{E_{1,k+\beta}(z)E_{1,k+\beta+1}(\xi)}{E_{1,k+\beta+1}(z)}R(\xi)R(z)xd\xi dz, \qquad (20)$$

где контур $\Xi$ получен сдвигом вправо ломаной $\gamma_0=\gamma_1\bigcup\gamma_2$.

Применяя в (20) тождество Гильберта и изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$B\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{E_{1,k+\beta}(z)R(z)x\,dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\gamma\frac{E_{1,k+\beta}(z)R(z)x\,dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)}\int_\Xi\frac{E_{1,k+\beta+1}(\xi)}{\xi-z}xd\xi-$$

$$-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Xi E_{1,k+\beta+1}(\xi)R(\xi)d\xi\int_\gamma\frac{E_{1,k+\beta}(z)x}{E_{1,k+\beta+1}(z)(\xi-z)}xdz. \qquad (21)$$

Учитывая асимптотику функции Миттаг-Леффлера, легко устанавливается, что внутренний интеграл во втором слагаемом равенства (21) равен нулю. В первом слагаемом внутренний интеграл вычислим с помощью интегральной теоремы Коши. Таким образом, с помощью (8) получим

$$B\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{E_{1,k+\beta}(z)R(z)x\,dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma E_{1,k+\beta}(z)R(z)\,xdz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\Gamma(k+\beta-1)}\int_0^1 e^{tz}(1-t)^{k+\beta-2}dtR(z)x\,dz=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k+\beta-1)}\int_0^1(1-t)^{k+\beta-2}T(t)xdt=I^{k+\beta-1}T(1)x. \qquad (22)$$

Следовательно, из (19), (22) следует справедливость требуемых равенств

$$MBx=\Gamma(k+\beta)\left(\frac{1}{\Gamma(k+\beta)}I-I^{k+\beta-1}T(1)\right)x+\Gamma(k+\beta)I^{k+\beta-1}T(1)x=x, \qquad x\in E,$$

$$BMx=\Gamma(k+\beta)\left(\frac{1}{\Gamma(k+\beta)}I-I^{k+\beta-1}T(1)\right)x+\Gamma(k+\beta)I^{k+\beta-1}T(1)x=x, \qquad x\in D(A).$$

Что касается решения задачи (1) – (3), то искомое значение $p$ имеет вид

$$p=\frac{1}{\Gamma(k)}M\left(u_1-I^{\beta}T(1)u_0\right), \qquad (23)$$

а функция $u(t)$ может быть определена из равенства (12).

Докажем теперь справедливость оценок (10), (11). Оценка (11) для $p$ вытекает из равенства (23), поскольку, как известно, оператор $AT(t)$ при $t>0$ может быть продолжен до ограниченного на $E$ оператора. Что касается оценки (10) для $u(t)$, то она следует из равенства (12) также благодаря наличию $T(t-\tau)$ перед параметром $p$.

Доказательство необходимости. Пусть $z_j$ произвольная точка, удовлетворяющая уравнению $E_{1,k+\beta+1}(z)=0$. Рассмотрим ограниченный оператор $D_j$, задаваемый соотношением

$$D_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{z_j-z}R(z)dz,$$

где $\gamma_0=\gamma_1\bigcup\gamma_2$. Интегрируя по контуру $\gamma_0$ обе части тождества

$$\frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{z_j-z}\left(z_jI-A\right)R(z)=E_{1,k+\beta+1}(z)R(z)+\frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{z_j-z},$$

в силу замкнутости оператора $A$, аналитичности функции $\frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{z_j-z}$ в области $\Omega$ и формулы (17), приходим к соотношению $\left(z_jI-A\right)D_j=B$.

Предположим, что оператор $B$ имеет определенный на всем $D(A)$ обратный оператор $B^{-1}$. Тогда справедливы соотношения

$$p=B^{-1}Bp=B^{-1}\left(z_jI-A\right)D_jp=\left(z_jI-A\right)B^{-1}D_jp, \quad p\in E,$$

$$p=BB^{-1}p=\left(z_jI-A\right)D_jB^{-1}p=B^{-1}\left(z_jI-A\right)D_jp=B^{-1}D_j\left(z_jI-A\right)p, \quad p\in D(A).$$

Таким образом, оператор $B^{-1}D_j$ определен на всем $E$ и является обратным по отношению к $z_j I - A$ оператором. Следовательно, $z_j$ – регулярная точка оператора $A$. Теорема доказана.

**Замечание.** Поскольку уравнение вида $u'(t)+\frac{k}{t}u(t)=Au(t)+t^m p$ заменой $u(t)=t^{m+1}v(t)$ сводится к уравнению $v'(t)+\frac{k+m+1}{t}v(t)=Av(t)+\frac{p}{t}$, то для него также можно сформулировать обратную задачу и установить критерий однозначной разрешимости.

## Литература

1. Эйдельман Ю.С. Одна обратная задача для эволюционного уравнения // Докл. АН УССР. – 1983. – № 4. – С. 15-18.
2. Эйдельман Ю.С. Единственность решения абстрактной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 9. – С. 1647-1649.
3. Орловский Д.Г. К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 9. – С.1614-1621.
4. Эйдельман Ю.С. Одна обратная задача для эволюционного уравнения // Математические заметки. – 1991. – Т. 99. – № 5. – С.135-141.
5. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Invers Problems in Mathematical Physics:-New York – Basel: Marcel Dekker, 2000. – 709 p.
6. Тихонов И.В, Эйдельман Ю.С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции Миттаг-Леффлера // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 5. – С.637-644.
7. Тихонов И.В, Эйдельман Ю.С. Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Мат. заметки. – 2005. – Т. 77. – № 2. – С. 273-290.
8. Глушак А.В. Об одном линейном неоднородном уравнении первого порядка с сингулярностью // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 9. – С. 1284-1285.
9. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория.– М.: Изд-во иностр. лит. – 1962. – 895 с.
10. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука. – 1966. – 671 с.
11. Седлецкий А.М. О нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Мат. заметки. – 2000. – Т. 68. – № 5. – С. 710-724.

## ON THE INVERSE PROBLEM WITH UNLOCAL BOUNDARY DATA FOR THE SINGULAR EVOLUTIONAL EQUATION

**A.V. Glushak[1], V.A. Popova[2]**

[1] Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia
e-mail: glushak@bsu.edu.ru
[2] Voronezh State Architectural Building University, 20 years old of October St., 84
Voronezh, 394006, Russia, e-mail: Moon84@yandex.ru

We obtain uniqueness solvability criterion of inverse problem for singular evolutional equation with bounded operator and generator of analytical semi-group operator.

Key words: inverse problem, evolutional equation, fractional integral, uniqueness solvability.