УДК 530.145:536.2

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ ВИД НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ СТЕФАНОВСКОГО ТИПА

**С.Е. Савотченко**

Белгородский государственный университет
308015 г. Белгород, ул. Победы, 85
e-mail: Savotchenko@bsu.edu.ru

Рассмотрены постановки однофазных и двухфазных краевых задач с подвижной границей для однородных и неоднородных параболических уравнений, когда закон движения границы подлежит определению (задачи стефановского типа). В случаях специального вида начальных и граничных функций получены точные решения поставленных задач в явном аналитическом виде и найдены законы движения границы.

Ключевые слова: задача Стефана, уравнение диффузии.

## Введение

Задачам Стефана посвящено большое количество литературы [1-5]. Особое значение при их рассмотрении имеют помимо вопросов существования, единственности и устойчивости решений задач, проблемы получения решений в явном аналитическом виде [6-8]. К настоящему времени разработано несколько различных аналитических методов решения задач стефановского типа, одним из наиболее эффективных среди которых является метод дифференциальных рядов [9].

Для областей вида $[0, \xi(t)]$, $t \geq 0$, $\xi(t) \geq 0$ в основе метода дифференциальных рядов для параболического уравнения

$$u_t = au_{xx} + f(x, t),\ 0 < x < \xi(t),\ t > 0,\ (a > 0 - \text{const}) \tag{1}$$

лежит представление решения в виде обобщенного дифференциального ряда [7, 8]:

$$u(x,t) = u(\xi(t),t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n (2n)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left\{ [\xi(t) - x]^{2n} \frac{d}{dt} u(\xi(t),t) \right\} - \tag{2}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n (2n+1)!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ [\xi(t) - x]^{2n+1} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\xi(t)} \right\} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n (2n+1)!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_x^{\xi(t)} (s-x)^{2n+1} f(s,t) ds .$$

Используя краевое условие на неподвижной границе при $x$=0 соответствующей краевой задачи для уравнения (1), из (2) можно получить с помощью преобразования Лапласа операторное уравнение для нахождения закона движения границы $\xi(t)$. Полученное выражение для закона движения границы подставляется в (2) и получается решение поставленной начально-краевой задачи Стефана. Однако получить решение интегрального уравнения для выделения явного вида закона движения границы и просуммировать соответствующий ряд (2) удается только для узкого класса граничных функций, то есть функций, заданных на границе $x$=0 [10-12]. В данной работе будут получены аналитические выражения достаточно простого вида для частных решений задач Стефана с определенного вида граничными функциями.

## Однородные однофазные задачи Стефана

Рассмотрим сначала постановку хорошо известной задачи Стефана в области вида $[0, \xi(t)]$, $t \geq 0$, $\xi(t) \geq 0$, где правая граница движется по закону $\xi(t)$, подлежащему определению [7, 8, 13, 14]. Пусть требуется найти в этой области решение $u(x, t)$ однородного параболического уравнения

$$u_t = au_{xx}, \quad 0 < x < \xi(t), t > 0, (a > 0 - \text{const}), \tag{3}$$

удовлетворяющее условиям на подвижной границе:

$$u(\xi(t), t) = u_p, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\xi(t)} = \lambda\rho\frac{d\xi}{dt}, \quad t > 0, \tag{5}$$

где $k$, $\lambda$, $\rho$ – постоянные коэффициенты, имеющие смысл коэффициента теплопроводности, теплоты фазового перехода ($\lambda > 0$ – охлаждение среды, $\lambda < 0$ – нагревание) и плотности вещества соответственно для задачи о фазовом переходе, когда искомая функция $u(x, t)$ имеет смысл температуры вещества в данной фазе. Условие (5) обычно называют условием Стефана. В условии (4) функция $u_p(t)$ считается заданной.

Также пусть искомая функция удовлетворяет на неподвижной границе при $x$=0 (на поверхности вещества) одному из трех краевых условий:

$$\left.\left(\gamma_2 k\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_1\varphi u\right)\right|_{x=0} = \varphi u_s, \quad t > 0, \tag{6}$$

где $\varphi(t)$, $u_s(t)$ – заданные функции. При $\gamma_1$=1, $\gamma_2$=0 из (6) будет получаться краевое условие первого рода, при $\gamma_1$=0, $\gamma_2$=1 – второго рода, при $\gamma_1$=1, $\gamma_2$=1 – третьего рода.

В результате (4)-(6) образуют общую постановку краевой задачи стефановского типа, включающую в себя сразу первую, вторую и третью краевые задачи.

Если граничные функции $u_p$ и $u_s$ в условиях (4) и (6) являются всюду постоянными, а функция $\varphi$ имеет специальный вид: $\varphi=\varphi_0 t^{-1/2}$, где $\varphi_0$ – const, то возможно найти аналитический вид закона движения границы

$$\xi(t) = \alpha\sqrt{t}, \tag{7}$$

где величина $\alpha$ не зависит от $t$ и является корнем уравнения:

$$\frac{(u_s - \gamma_1 u_p)\exp(-\alpha^2/4a)}{\gamma_2 k/\sqrt{\pi a} - \gamma_1\varphi_0\operatorname{erf}(\alpha/2\sqrt{a})} = \frac{\alpha\lambda\rho\sqrt{\pi a}}{2k\varphi_0}, \tag{8}$$

где $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-y^2}dy$ – интеграл ошибок.

При указанных видах граничных функций и найденном законе движения границы оказывается возможным просуммировать ряд (2) и получить решение поставленной задачи (4)-(6) в явном аналитическом виде:

$$u(x,t)=\frac{\gamma_2 k u_p/\sqrt{\pi a}-\varphi_0[u_s \mathrm{erf}(\alpha/2\sqrt{a})+(u_s-\gamma_1 u_p)\mathrm{erf}(x/2\sqrt{at})]}{\gamma_2 k/\sqrt{\pi a}-\gamma_1\varphi_0 \mathrm{erf}(\alpha/2\sqrt{a})}. \qquad (9)$$

Полученная формула (9) определяет решения сразу первой, второй и третьей краевых задач при указанных выше значениях параметров $\gamma_{1,2}$.

## Неоднородные однофазные задачи Стефана

Рассмотрим теперь постановку задачи Стефана в области прежнего вида $[0, \xi(t)]$ для неоднородного параболического уравнения

$$u_t=au_{xx}+f(t),\ 0<x<\xi(t),\ t>0,\ (a>0-\mathrm{const}), \qquad (10)$$

где функция $f(t)$ является непрерывной при $t \geq 0$.

Условия на подвижной границе (4) и (5) остаются прежними. Оказалось, что получить простой аналитический вид решения задач сразу всех трех типов при специальных граничных функциях не представляется возможным. Поэтому ограничимся рассмотрением отдельно первой и второй краевых задач.

Пусть сначала на неподвижной границе при $x$=0 задано краевое условие первого рода:

$$u(0,t)=u_s, \qquad t>0. \qquad (11)$$

В результате уравнение (10) с условиями (4), (5) и (11) образует неоднородную первую краевую задачу стефановского типа.

Если в условия (4) и (11) граничные функции имеют специальный вид:

$$u_p(t)=u_p+\int_0^t f(\tau)d\tau, \quad u_s(t)=u_s+\int_0^t f(\tau)d\tau, \qquad (12)$$

где величины $u_p$ и $u_s$ в (12) являются постоянными, то получается закон движения границы в виде (7), где величина $\alpha$ теперь является корнем уравнения:

$$(u_p-u_s)\exp(-\alpha^2/4a)=\frac{\alpha\lambda\rho\sqrt{\pi a}}{2k}\mathrm{erf}(\alpha/2\sqrt{a}). \qquad (13)$$

Следует отметить, что при малых значениях $\alpha$ приближенное значение корня уравнения (13) определяется выражением $\alpha \approx \{(u_p-u_s)/\lambda\rho a^{1/2}\}^{1/2}$.

При указанных граничных функциях (12) и найденном законе движения границы оказывается возможным просуммировать ряд (2) и получить решение поставленной задачи (4), (5), (10), (11) в явном аналитическом виде:

$$u(x,t)=u_s+(u_p-u_s)\frac{\mathrm{erf}(x/2\sqrt{at})}{\mathrm{erf}(\alpha/2\sqrt{a})}+\int_0^t f(\tau)d\tau. \qquad (14)$$

Рассмотрим теперь вторую краевую задачу. Пусть на неподвижной границе при $x$=0 задано краевое условие второго рода:

$$k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\varphi, \quad t>0. \qquad (15)$$

В результате уравнение (10) с условиями (4), (5) и (15) образуют неоднородную вторую краевую задачу стефановского типа.

Если в условии (4) функция задана выражением (12), а функция $\varphi$ также имеет специальный вид: $\varphi=\varphi_0 t^{-1/2}$, где $\varphi_0$ – const, то получается закон движения границы в виде (7), где величина $\alpha$ теперь является корнем простого уравнения:

$$2\varphi_0 \exp(-\alpha^2/4a) = \alpha\lambda\rho. \tag{16}$$

Следует отметить, что при малых значениях $\alpha$ приближенное значение корня уравнения (16) определяется выражением $\alpha\approx 2\varphi_0/\lambda\rho$.

При указанных граничных функциях (12) и найденном законе движения границы оказывается возможным просуммировать ряд (2) и получить решение поставленной второй краевой задачи (4), (5), (10), (15) в явном аналитическом виде:

$$u(x,t) = u_p + \frac{\varphi_0\sqrt{\pi a}}{k}\{\operatorname{erf}(x/2\sqrt{at}) - \operatorname{erf}(\alpha/2\sqrt{a})\} + \int_0^t f(\tau)d\tau. \tag{17}$$

## Однородные двухфазные задачи Стефана

Рассмотрим постановку двухфазной задачи Стефана с условием сопряжения на подвижной границе, закон движения которой $\xi(t)$ подлежит определению. Пусть требуется найти решения $u_1(x, t)$ в области $[0, \xi(t)]$, $t \ge 0$ и $u_2(x, t)$ в области $[\xi(t), +\infty]$ однородных параболических уравнений

$$u_{1t}=a_1 u_{1xx}, \qquad 0 < x < \xi(t),\ t > 0, \tag{18}$$

$$u_{2t}=a_2 u_{2xx}, \qquad \xi(t) < x < +\infty,\ t > 0, \tag{19}$$

где $a_{1,2}$ – положительные постоянные, имеющие смысл коэффициентов температуропроводности для задачи о фазовом переходе, когда искомые функции $u_{1,2}(x, t)$ имеют смысл температур вещества в соответствующих агрегатных состояниях.

Пусть решения уравнений (18) и (19) удовлетворяют условиям на подвижной границе

$$u_1(\xi(t), t)=u_2(\xi(t), t)=u_p, \qquad t > 0, \tag{20}$$

$$\left.\left(k_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - k_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\right|_{x=\xi(t)} = \lambda\rho_1\frac{d\xi}{dt}, \qquad t > 0, \tag{21}$$

где $k_{1,2}$, $\lambda$, $\rho_1$ – постоянные коэффициенты, имеющие смысл коэффициентов теплопроводности, теплоты фазового и плотности вещества в первой фазе соответственно. Условие (21) представляет собой условие Стефана, выражающее баланс энергии при переходе среды из одного агрегатного состояния в другое. В условии (20) функция $u_p(t)$ считается заданной.

Пусть функция $u_1(x, t)$ удовлетворяет на неподвижной границе при $x=0$ (на поверхности вещества) одному из трех краевых условий:

$$\left.\left(\gamma_2 k_1\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_1\varphi u_1\right)\right|_{x=0} = \varphi u_s, \quad t > 0, \tag{22}$$

где $\varphi(t)$, $u_s(t)$ – заданные функции. При $\gamma_1=1$, $\gamma_2=0$ из (22) следует краевое условие первого рода, при $\gamma_1=0$, $\gamma_2=1$ – второго рода, при $\gamma_1=1$, $\gamma_2=1$ – третьего рода.

Пусть для функции $u_2(x, t)$ задано начальное значение

$$u_2(x, 0)=u_0, \quad \xi(0) < x < +\infty. \tag{23}$$

В результате (18)-(23) образуют общую постановку начально-краевой двухфазной задачи стефановского типа, включающей в себя сразу первую, вторую и третью краевые задачи.

Если начальная и граничные функции $u_0$, $u_p$ и $u_s$ в условиях (20), (22) и (23) являются всюду постоянными, а функция $\varphi$ имеет специальный вид: $\varphi=\varphi_0 t^{-1/2}$, где $\varphi_0$ – const, то получается закон движения границы в виде (7), где величина $\alpha$ является корнем уравнения:

$$\frac{k_1\varphi_0(\gamma_1 u_p-u_s)\exp(-\alpha^2/4a_1)}{\sqrt{a_1}[\gamma_1\varphi_0\mathrm{erf}(\alpha/2\sqrt{a_1})-\gamma_2k_1/\sqrt{\pi a_1}} - \frac{k_2(u_0-u_p)\exp(-\alpha^2/4a_2)}{\sqrt{a_2}\mathrm{erfc}(\alpha/2\sqrt{a_2})} = \frac{\alpha\lambda\rho_1\sqrt{\pi}}{2}, \tag{24}$$

где $\mathrm{erfc}(z)=1-\mathrm{erf}(z)$. При указанных видах граничных функций и найденном законе движения границы можно получить решение поставленной задачи (18)-(23) в явном аналитическом виде:

$$u_1(x,t) = \frac{\gamma_2k_1u_p/\sqrt{\pi a_1}-\varphi_0[u_s\mathrm{erf}(\alpha/2\sqrt{a_1})+(u_s-\gamma_1u_p)\mathrm{erf}(x/2\sqrt{a_1t})]}{\gamma_2k_1/\sqrt{\pi a_1}-\gamma_1\varphi_0\mathrm{erf}(\alpha/2\sqrt{a_1})}, \tag{25}$$

$$u_2(x,t) = u_0+(u_p-u_0)\frac{\mathrm{erfc}(x/2\sqrt{a_2t})}{\mathrm{erfc}(\alpha/2\sqrt{a_2})}. \tag{26}$$

Полученные выражения (25) и (26) определяют решения сразу первой, второй и третьей краевых задач при указанных выше значениях параметров $\gamma_{1,2}$. В частности, при $\gamma_1=1$, $\gamma_2=0$ из нее следует хорошо известное решение двухфазной первой краевой задачи Стефана для однородного уравнения теплопроводности [13, 14].

## Неоднородные двухфазные задачи Стефана

Рассмотрим теперь двухфазные задачи Стефана с условием сопряжения на подвижной границе для неоднородных параболических уравнений

$$u_{1t}=a_1u_{1xx}+f(t), \quad 0 < x < \xi(t),\ t > 0, \tag{27}$$

$$u_{2t}=a_2u_{2xx}+f(t), \quad \xi(t) < x < +\infty,\ t > 0, \tag{28}$$

В данной постановке на подвижной границе остаются прежними условие Стефана (21) и начальное условие (23). Добавляется начальное условие

$$u_1(x, 0)=0, \quad 0 < x < \xi(0). \tag{29}$$

Условие сопряжения на подвижной границе будет иметь вид, который отличается

$$u_1(\xi(t), t)=u_2(\xi(t), t), \quad t > 0, \tag{30}$$

от (20) тем, что значения искомых функций при $x=\xi(t)$ не равны определенному значению.

Так же, как и для однофазных неоднородных задач, получить простой аналитический вид решения задач сразу всех трех типов при специальных граничных функциях не представляется возможным. Поэтому ограничимся рассмотрением отдельно первой и второй начально-краевых задач.

Пусть сначала на неподвижной границе при $x=0$ задано краевое условие первого рода:

$$u_1(0, t)=u_s, \qquad t > 0. \tag{31}$$

В результате уравнения (27), (28) с условиями (21), (23) (29), (30) и (31) образуют неоднородную первую начально-краевую задачу стефановского типа.

Если начальная и граничные функции $u_0$ и $u_s$ в условиях (23) и (31) являются всюду постоянными, то получается закон движения границы в виде (7), где величина $\alpha$ является корнем уравнения:

$$\frac{k_2[u_s\mathrm{erfc}(\alpha/2\sqrt{a_1})-u_0]\exp(-\alpha^2/4a_2)}{\sqrt{a_2}\mathrm{erfc}(\alpha/2\sqrt{a_2})}-k_1u_s\exp(-\alpha^2/4a_1)/\sqrt{a_1}=\frac{\alpha\lambda\rho_1\sqrt{\pi}}{2}. \tag{32}$$

При указанных видах граничных функций и найденном законе движения границы можно получить решение поставленной задачи (21), (23), (27)-(31) в явном аналитическом виде:

$$u_1(x,t)=u_s\mathrm{erfc}(x/2\sqrt{a_1t})+\int_0^t f(\tau)d\tau, \tag{33}$$

$$u_2(x,t)=u_0+\{u_s\mathrm{erfc}(\alpha/2\sqrt{a_1})-u_0\}\frac{\mathrm{erfc}(x/2\sqrt{a_2t})}{\mathrm{erfc}(\alpha/2\sqrt{a_2})}+\int_0^t f(\tau)d\tau. \tag{34}$$

Рассмотрим теперь вторую начально-краевую задачу. Пусть на неподвижной границе при $x=0$ задано краевое условие второго рода:

$$k_1\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0}=\varphi u_s, \qquad t>0. \tag{35}$$

В результате уравнения (27) и (28) с условиями (21), (23), (29), (30) и (35) образуют неоднородную вторую начально-краевую задачу стефановского типа.

Если начальная и граничные функции $u_0$ и $u_s$ в условиях (23) и (35) являются всюду постоянными, а функция $\varphi$ имеет специальный вид: $\varphi=\varphi_0t^{-1/2}$, где $\varphi_0$ – const, то получается закон движения границы в виде (7), где величина $\alpha$ является корнем уравнения:

$$k_1u_s\exp(-\alpha^2/4a_1)-\frac{k_2[\varphi_0u_s\sqrt{\pi a_1}\mathrm{erfc}(\alpha/2\sqrt{a_1})+u_0]\exp(-\alpha^2/4a_2)}{\sqrt{\pi a_2}\mathrm{erfc}(\alpha/2\sqrt{a_2})}=\frac{\alpha\lambda\rho_1}{2}. \tag{32}$$

При указанных видах граничных функций и найденном законе движения границы можно получить решение поставленной задачи (21), (23), (27)-(31) в явном аналитическом виде:

$$u_1(x,t) = -\varphi_0 u_s \sqrt{\pi a_1}\,\mathrm{erfc}(x/2\sqrt{a_1 t}) + \int_0^t f(\tau)d\tau, \qquad (33)$$

$$u_2(x,t) = u_0 + \{\varphi_0 u_s \sqrt{\pi a_1}\,\mathrm{erfc}(\alpha/2\sqrt{a_1}) - u_0\}\frac{\mathrm{erfc}(x/2\sqrt{a_2 t})}{\mathrm{erfc}(\alpha/2\sqrt{a_2})} + \int_0^t f(\tau)d\tau. \qquad (34)$$

Такое решение было получено в [15], где приведен его подробный анализ, а также исследован вопрос о существовании корней уравнения (32).

## Заключение

В работе были рассмотрены постановки задач стефановского типа для параболических уравнений. Приведены случаи однофазных и двухфазных постановок задач, как для однородных, так и для неоднородных уравнений теплопроводности. Для специального вида начальных и граничных функций найдены решения поставленных задач в явном аналитическом виде. Во всех случаях определен закон движения границы в виде (7), где величина $\alpha$ является корнем трансцендентного уравнения, различного для каждой задачи.

Следует отметить, что дифференциальные ряды вида (2) удается просуммировать также для других видов законов движения границы, отличных от корневой зависимости (7) [7, 8, 10-12]. Тем не менее, важность корневого вида закона движения границы обусловлена физическими приложениями задач стефановского типа. В частности, экспериментально установлено [16], что зависимость положения фронта активированной рекристаллизации металлов и сплавов зависит от времени отжига по корневому закону. Поэтому полученные в работе результаты могут найти применение в области физики конденсированного состояния, например, для расчетов различных кинетических коэффициентов (температуропроводности, диффузии) системы по известному распределению температуры или концентрации.

## Литература

1. Гринберг Г.А. О решении обобщенной задачи Стефана о промерзании жидкости, а также о родственных задачах теплопроводности, диффузии и других // ЖТФ. – 1967. – Т.37. – № 9. – С. 1598-1606.

2. Будак Б.М., Москал М.Б. О классическом решении 1-ой краевой задачи Стефана для многомерного уравнения теплопроводности в координатном параллелепипеде // Труды вычислительного центра МГУ. – Москва, 1971. – С. 87-114.

3. Мейрманов А.М. Задача Стефана. – Новосибирск: Наука, 1986. – 240 с.

4. Бородин М.А. Двухфазная контактная задача Стефана // Укр. мат. журн. – 1995. – Т.47. – № 2. – С. 158-167.

5. Любов Б.Я. Теория кристаллизации в больших объемах. – М.: Наука, 1975. – 340 с.

6. Карташов Э.М., Любов Б.Я. Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами // Изв. АН СССР: Сер. «Энергетика и транспорт». – 1974. – № 6. – С. 82-114.

7. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 2001. – 550 с.

8. Кудинов В.А., Карташев Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высш. шк., 2005. – 430 с.

9. Любов Б.Я. Вычисление скорости затвердевания металлического слитка // Докл. АН СССР. – 1949. – Т.68. – № 5. – С. 847-850.

10. Любов Б.Я., Ройтбурд А.Л. О влиянии переохлаждения на границе разделения фаз на скорость перемещения фронта рекристаллизации в условиях направленного теплоотвода // Кристаллизация и фазовые переходы. – Минск: Изд. АН БССР, 1962. – С. 226-234.

11. Любов Б.Я., Темкин Д.Е. Расчет температурного поля и скорости перемещения фронта фазового превращения в сферических телах // Проблемы металловедения и физики металлов. – М., 1958. – С. 311-316.

12. Чекмарева О.М. По поводу задачи Стефана в цилиндрической и сферической системах координат // ЖТФ. – 1971. – Т.61. –№ 5. – С. 1071-1072.

13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.

14. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с.

15. Савотченко С.Е., Юрова О.В. Модель кинетики фронта рекристаллизации, активированной потоками примесей // «Биосовместимые наноструктурные материалы и покрытия медицинского назначения»: сб. науч. тр. Российской школы-конференции молодых ученых и преп. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2006. – С. 266-270.

16. Колобов Ю.Р. Диффузионно-контролируемые процессы на границах зерен и пластичность металлических поликристаллов. – Новосибирск: Наука; Сиб. предприятие РАН, 1998. – 184 с.

## THE ANALYTICAL VIEW OF SOME PARTIAL SOLUTIONS OF STEFAN PROBLEMS

**S.E. Savotchenko**

Belgorod State University
308015, Belgorod, Pobedy, Str. 85

The sets of one-phase and two-phase boundary problems with the moving boundary for homogeneous and inhomogeneous parabolic equations (Stefan problems) are considered in the case when the law of boundary motion (Stefan problems) has to be determined. For the special initial and boundary functions the exact solutions of the problems are derived. The laws of boundary motion are obtained in analytical sets.

Key words: Stefan problem, diffusion equation.