УДК 51.73

ЗАДАЧА РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ В СЛУЧАЕ СЛАБОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

М.А. Сапрыкин

Белгородский государственный университет, 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14.

Изложена процедура решения одномерной стационарной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в так называемом сером приближении, в случае оптически полупрозрачной среды. Рассмотрен случай малой оптической длины λ образца. В рамках теории возмущений получены первые члены асимптотического разложения по степеням λ.

Ключевые слова: полупрозрачная среда, закон Кирхгофа, стационарное распределение температуры, слабое поглощение излучения, оптическая длина, закон Стефана-Больцмана.

Введение

Задачи о распределении температуры в полупрозрачных средах являются намного более сложными как по своей математической постановке, так и по сложности математических проблем, возникающих при их решении, по сравнению со стандартными задачами тепломассопереноса [1]. Это связано с тем, что при определении распределения температуры в таких средах, приходится учитывать перенос тепловой энергии посредством электромагнитного излучения. Физический механизм такого переноса энергии носит нелокальный характер. Это приводит к тому, что эволюционное уравнение для распределения температуры становится уже интегро-дифференциальным и существенно нелинейным из-за нелинейной зависимости излучаемого потока энергии единицей объёма вещества от температуры. Более того, для формулировки замкнутого эволюционного уравнения необходим учёт граничных условий, что является необычным при постановке задач математической физики. Последнее связано с тем, что на процесс переноса тепла излучением влияют граничные условия для электромагнитного излучения, которое, испытывая частично многократные отражения от границы, оказывает влияние на значение температуры в каждой точке образца при каждом её прохождении излучением. Наконец, имеется ещё один источник появления нелокальности при переносе излучения, связанный с конечностью длины волны излучения. Впрочем, обычно этим типом нелокальности, обычно, пренебрегают, используя приближение геометрической оптики [2]. Но даже в приближении геометрической оптики, из-за большого разнообразия условий излучения единицей объёма среды и условий поглощения электромагнитного излучения, эволюционное уравнение для распределения температуры $T(r,t)$ в каждый момент времени t не удаётся сформулировать универсальным образом [2]. Упрощение задачи радиационно-кондуктивного теплообмена возникает в тех случаях, когда учёт нелокальности может быть произведён в рамках теории возмущений. Например, при большом коэффициенте поглощения α, когда световые лучи могут оказывать влияние на распределение температуры только на области среды, находящиеся на очень малых расстояниях от точки излучения. В этом случае, в рамках теории возмущений по степеням α получаются дифференциальные уравнения [3]. Далее, такое же положение реализуется при малом значении α и малом коэффициенте отражения $r<<1$ луча от границы. В этом случае, выражение для потока энергии, переносимой световыми лучами, уже не определяется производными от распределения температуры. Однако, учитывая, что большая часть энергии при каждом отражении уходит из образца, можно вычислять поток энергии в каждой точке r образца, представив его в виде ряда по числу отражений от границы. При этом каждый член ряда, пропорциональный степени коэффициента отражения, будет представляться интегралом по всему образцу (по вкладам от всех точек излучения). Таким образом, результирующее эволюционное уравнение, в этом случае, будет обязательно интегро-дифференциальным. Исследованию этого случая при одномерном распределении температуры посвящена настоящая работа.

Одномерная задача о распределении температуры

В этом разделе мы выведем эволюционное уравнение для распределения температуры $T(x,t)$ в одномерном образце в условиях малого отражения световых лучей от границы. Основным для нас будет следующее эволюционное уравнение для температуры

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{\partial P(x)}{\partial x},$$

где второе слагаемое представляет собой дивергенцию потока $P(x,t)$ тепла, переносимого электромагнитным излучением. В этом уравнении заложен принцип баланса энергии. А именно, полагается, что убыль потока энергии в каждой фиксированной точке x образца расходуется на локальное увеличение внутренней энергии, в противовес процессу теплопроводности, который уносит тепло из этой точки в соседние области. Основной задачей при получении замкнутого уравнения для распределения температуры является вычисление потока $P(x,t)$. Далее, мы используем следующее выражение для потока энергии $P(x,t)$, которое было найдено в [3].

$$P(x,t)=\alpha\sigma\int_0^L Q(x,y)T^4(y,t)dy.$$

Это выражение справедливо в случае одномерного распространения излучения в образце длиной L, в условиях, когда один и тот же коэффициент α , одновременно является коэффициентом поглощения излучения и служит, согласно закону Кирхгофа, интенсивностью излучения поверхностью единичной площади. При этом принят закон излучения Стефана-Больцмана $P_0(x,t)=\sigma T^4(x,t)$ в каждой точке среды, связывающий поток энергии излучения с температурой среды в каждой точке x и заданный момент времени t, где σ - постоянная Стефана-Больцмана. В цитируемой работе вычислена также матрица перехода $Q(x,y)$, зависящая от коэффициента α и от коэффициента $r<1$ отражения лучей от границы внутрь образца. Она имеет следующий вид

$$Q(x,y)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-y)e^{-\alpha|x-y|}+\frac{re^{-\alpha L}}{1-r^2e^{-2\alpha L}}\left[sh\alpha(L-x-y)+re^{-\alpha L}sh\alpha(x-y)\right].$$

В одномерном случае задача радиационно-кондуктивного теплообмена состоит в решении начально-краевой задачи для эволюционного уравнения при фиксированных краевых условиях для температуры на концах образца. В настоящей работе краевые условия состоят в постоянстве температуры на концах, т.е. фиксируются значения

$$T_-=T(0)\text{ и }T_+=T(L).$$

В равновесном состоянии эволюционное уравнение распределения температуры принимает вид

$$k\frac{d^2T}{dx^2}=\frac{dP(x)}{dx}$$

или, с учётом принятой модели излучения [3]

$$k\frac{d^2T}{dx^2}=\alpha\sigma\frac{d}{dx}\int_0^L Q(x,y)T^4(y)dy$$

Полученное уравнение допускает первый интеграл с неопределённой постоянной $C=const$, которая определяется на основе краевых условий построив решение самого уравнения.

$$k\frac{dT}{dx} = \alpha\sigma\int_0^L Q(x,y)T^4(y)dy + C$$

Такое положение является неудобным для решения сформулированной краевой задачи, но в рамках теории возмущений удаётся находить эту постоянную, одновременно устанавливая функциональную зависимость $T(y,t)$.

Приближение слабого поглощения

В настоящей работе мы воспользуемся, для вычисления равновесного распределения температуры, приближением малости коэффициента отражения. При этом условии, матрица перехода $Q(x,y)$ имеет следующий вид:

$$Q(x,y) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-y)e^{-\alpha|x-y|}.$$

Это выражение получено при условии $r<<1$, когда в матрице перехода учитывается только первый член разложения по степеням r. При указанной матрице перехода, поток $P(x,t)$ в этом приближении имеет следующий вид

$$P(x,t) = \frac{\alpha\sigma}{2}\int_0^L \operatorname{sgn}(x-y)e^{-\alpha|x-y|}T^4(y)dy. \tag{1}$$

Учтем, теперь, в выражении для дивергенции потока энергии, малость коэффициента отражения $\alpha << L^{-1}$. С этой целью вычислим асимптотику интеграла в (1) при $\alpha \to 0$. Она имеет следующий вид

$$\frac{2}{\alpha\sigma}\frac{d}{dx}P(x,t) = 2T^4(x,t) - \alpha\int_0^L T^4(y,t)dy.$$

Перейдём теперь к решению задачи о стационарном распределении температуры $T(x)$ в одномерном образце в описанном приближении. Это распределение определяется следующим уравнением

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \alpha\sigma T^4 - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma\int_0^L T^4(y)dy. \tag{2}$$

Перейдем, прежде всего, к безразмерным переменным

$$\frac{T}{T_+} = \tau, \quad \frac{x}{L} = \xi, \quad \frac{y}{L} = \psi,$$

$\lambda = \alpha L$ – приведенная оптическая длина,

$\varepsilon = \dfrac{\sigma T_+^3 L}{k}$ – разогрев образца,

$\theta = \dfrac{T_-}{T_+}$ – относительная температура.

В терминах этих переменных, уравнение (2) представляется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \xi^2} = \lambda\varepsilon\tau^4(\xi) - \frac{1}{2}\lambda^2\varepsilon\int_0^1 \tau^4(\psi)d\psi. \tag{3}$$

Будем искать решение этого уравнения методом последовательных приближений

$$\tau(\xi) = \tau^{(0)}(\xi) + \tau^{(1)}(\xi) + \tau^{(2)}(\xi) + \ldots \tag{4}$$

считая, что приведенная оптическая длина настолько мала, что

$$\lambda << 1.$$

В качестве граничных условий, принимаем, что на концах образца поддерживаются постоянные температуры, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{cases} \tau(0) = \theta \\ \tau(1) = 1 \end{cases}$$

Будем считать, что эти граничные условия удовлетворяют решению в нулевом приближении, а все последующие приближения удовлетворяют нулевым граничным условиям

$$\begin{cases}\tau^{(0)}(0)=\theta\\ \tau^{(0)}(1)=1\end{cases},\tau^{(1)}(0)=\tau^{(1)}(1)=0,\tau^{(2)}(0)=\tau^{(2)}(1)=0,\dots \qquad (5)$$

Подставляя разложение (4) в уравнение (3) получаем систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2\tau}{d\xi^2}=0 \qquad (6)$$

$$\frac{d^2\tau^{(1)}}{d\xi^2}=\lambda\varepsilon\left(\tau^{(0)}\right)^4 \qquad (7)$$

$$\frac{d^2\tau^{(2)}}{d\xi^2}=4\lambda\varepsilon\left(\tau^{(0)}\right)^3\tau^{(1)}-\frac{1}{2}\lambda^2\varepsilon\int_0^1\left(\tau^{(0)}(\psi)\right)^4d\psi \qquad (8)$$

и т.д.

Решая уравнение (8) с учётом граничных условий (7), получаем нулевое приближение

$$\tau^{(0)}(\xi)=\xi(1-\theta)+\theta\ . \qquad (9)$$

Подставляя выражение (9) в (7) получаем уравнение для определения первого приближения

$$\frac{d^2\tau^{(1)}}{d\xi^2}=\lambda\varepsilon[\xi(1-\theta)+\theta]. \qquad (10)$$

Полученное уравнение решается последовательным интегрированием с учетом граничных условий (5) для первого приближения. После интегрирования получаем

$$\tau^{(1)}(\xi)=\frac{\lambda\varepsilon}{30(\theta-1)^2}[\xi(1-\theta)+\theta]^6+C_1^1\xi+C_2^1, \qquad (11)$$

где C_1^1 и C_2^1 постоянные интегрирования, однозначно определяемые из граничных условий (5)

$$C_1^1=-\frac{\lambda\varepsilon}{30(\theta-1)}\frac{1-\theta^6}{(\theta-1)^2},$$
$$C_2^1=-\frac{\lambda\varepsilon}{30(\theta-1)^2}\theta^6. \qquad (12)$$

Вторая поправка находится аналогично первой. Подставляем найденные первое и второе приближения в уравнение (8). В результате, находим второе приближение в следующей форме

$$\tau^{(2)}(\xi)=\frac{1}{150}\frac{\lambda^2\varepsilon^2}{(1-\theta)^4}\left\{\frac{2}{11}\left[\xi(1-\theta)+\theta\right]^{11}-(1-\theta^6)\xi\left[\xi(1-\theta)+\theta\right]^5+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\frac{1}{1-\theta}\left[\xi(1-\theta)+\theta\right]^6-\theta^6\left[\xi(1-\theta)+\theta\right]^5-\frac{1}{\varepsilon}(1-\theta^5)(1-\theta)^3\xi^2\right\}+C_1^2\xi+C_2^2 \qquad (13)$$

Используя граничные условия (5), находим постоянные интегрирования

$$C_1^2=\frac{1}{150}\frac{\lambda^2\varepsilon^2}{(1-\theta)^4}\left[\frac{1}{\varepsilon}(1-\theta^5)(1-\theta)^3-\frac{11(1-\theta^6)-27(1-\theta^{11})}{33(1-\theta)}\right]$$

$$C_2^2=-\frac{1}{150}\frac{\lambda^2\varepsilon^2}{(1-\theta)^4}\theta^6\left[\frac{11-27(1-\theta)\theta^5}{33(1-\theta)}\right]$$

Здесь мы ограничиваемся решением вплоть до второго порядка по малому параметру. Теперь можем записать аналитическое выражение для стационарного распределения температуры внутри образца. Переходя к размерным величинам, запишем получившееся уравнение

$$T(x)=\frac{x}{L}(T_{+}-T\ )+T_{-}+\frac{\alpha L^{2}\sigma}{30k}\frac{1}{(T_{+}-T_{-})^{2}}\left\{\left[\frac{x}{L}(T_{+}-T_{-})+T\right]^{6}-(T_{+}^{\,6}-T_{-}^{6})\frac{x}{L}-T_{-}T_{+}^{5}\right\}+$$

$$+\frac{\alpha^{2}L^{4}\sigma^{2}}{150k^{2}}\frac{1}{(T_{+}-T_{-})^{4}}\left\{\frac{2}{11}\left[\frac{x}{L}(T_{+}-T_{-})+T\right]^{11}-(T_{+}^{\,6}-T_{-}^{6})\frac{x}{L}\left[\frac{x}{L}(T_{+}-T_{-})+T\right]^{5}+\right.$$

$$+\frac{1}{3}\frac{T_{+}^{6}}{T_{+}-T}\left[\frac{x}{L}(T_{+}-T\ )+T\right]^{6}-T_{-}^{6}\left[\frac{x}{L}(T_{+}-T\ )+T\right]^{5}-\frac{x^{2}k}{\sigma L^{3}}(T_{+}^{\,3}-T_{-}^{3})+$$

$$+\left[\frac{k}{\sigma L}(T_{+}^{\,3}-T_{-}^{3})(T_{+}^{\,5}-T_{-}^{5})-\frac{11T_{+}^{6}(T_{+}^{\,6}-T_{-}^{6})-27(T_{+}^{\,11}-T_{-}^{11})T_{+}}{33(T_{+}-T\ )}\right]\frac{x}{L}-$$

$$\left.-T_{-}^{6}\left[\frac{11T_{+}^{6}-27(T_{+}-T_{-})T_{+}^{\,5}}{33(T_{+}-T_{-})}\right]\right\}$$

Полученное распределение температуры не является линейным по x, как это имеет место в теории теплопроводности. Основной вклад в распределение температуры вносит первое слагаемое представляющее собой линейный рост температуры от концов образца. Оставшиеся слагаемые малы в силу малости безразмерного параметра – оптической длины.

Заключение

В работе показано, что полученное решение, не даёт полного решения задачи, так как в приложениях очень важно знать равновесное распределение температуры в условиях, когда оптическая длина – примерно порядка единицы. Попытка использовать для получения решения при таком условии последовательных итераций не приводит к цели, так как принцип сжимающих отображений применим только при значительно меньших значениях оптической длины из-за сильно возрастающей зависимости закона излучения от температуры.

Литература

1. В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. - М.: Наука, 1987. - 352с.
2. Э.М. Спэрроу, Р.Д. Сесс. Теплообмен излучением. - Л.: Энергия, Ленинградское отделение, 1972. - 295с.
3. Yu.P. Virhcenko, A.V. Kolesnikov. Analytic approach to the radiative conduction problem in semi-transparent media. The large optical length approximation// Functional Materials. - 2006. – V.13,№ 3. - P.372-390.

RADIATION HEAT TRANSFER PROBLEM IN SEMITRANSPARENT MEDIUM. THE CASE OF WEAK ABSORPTION OF RADIATION

M.A. Saprykin

Belgorod State University, Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia

The solution method for one-dimensional radiation heat conductance problem in semitransparent medium is proposed. The Stefan-Boltzman formula is used. The case of small optical length λ is studied. Some terms of asymptotic expansion on λ powers is calculated.

Key words: semitransparent medium, Kirchhoff law, stationary temperature distribution, weak radiation absorption, optical length, Stefan-Boltzman law.