УДК 538.941

О КЛАССИФИКАЦИИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ МАГНЕТИКОВ С ВЕКТОРНЫМ И ТЕНЗОРНЫМ ПАРАМЕТРАМИ ПОРЯДКА*

Д.А. Демьяненко[1], М.Ю. Ковалевский[2], Н.Н. Чеканова[3]

[1]Харьковский национальный университет, 61001, Харьков, пл. Свободы, 4, Украина
[2]Белгородский государственный университет, 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14,
e-mail: mikov@kharkov.ua
[3]Украинская инженерно-педагогическая академия, 61001, Харьков, ул. Университетская, 6, Украина

Классифицированы состояния равновесия магнитных конденсированных сред, симметрия которых спонтанно нарушена относительно поворотов в спиновом пространстве и трансляций в конфигурационном пространстве. Рассмотрены случаи векторного и тензорного параметров порядка, обладающих различной симметрией относительно отражения времени. Сформулированы условия ненарушенной симметрии и пространственной симметрии состояний равновесия таких сред. Выяснена связь этих условий симметрии с пара- ферро-, антиферро-, ферри-, спиральными и квадрупольными магнитными состояниями.

Ключевые слова: магнетики, фазовые переходы, параметр порядка, квазисредние, симметрия, распределение Гиббса, спиновый нематик.

Введение

Фазовые переходы II рода характеризуются изменением симметрии состояния равновесия при переходе системы через критическую температуру. Известно, что адекватное описание термодинамики в конденсированных средах с нарушенной симметрией ниже критической температуры требует введения в теорию дополнительных термодинамических параметров, не связанных с законами сохранения, а обусловленных физической природой термодинамической фазы. В соответствии с феноменологией классификации состояний равновесия вырожденных конденсированных сред [1] необходимо знание свободной энергии как функции параметра порядка в явном виде. Минимизация свободной энергии по параметру порядка и возникающее при этом уравнение на равновесную структуру параметра порядка имеет в общем случае нелинейный характер. Другой теоретико-групповой подход [2,3] использует представление о ненарушенной симметрии вырожденного состояния равновесия как подгруппе симметрии нормальной фазы. Классификация однородных состояний равновесия в рамках указанных подходов осуществлялась для сверхтекучего ^{3}He [3-9], характеризующегося тензорным параметром порядка.

В работах [10-13] предложен микроскопический подход к исследованию состояний равновесия конденсированных сред, использующий концепцию квазисредних. На основе этого подхода классифицированы как однородные, так и неоднородные состояния равновесия сверхтекучих фаз He^3, сверхтекучая d-фаза и жидкокристаллические состояния [14-16].

При теоретическом описании магнитных систем также оказалось плодотворным использование представления о спонтанном нарушении симметрии состояния статического равновесия. Случаи различного нарушения симметрии состояний равновесия относительно спиновых поворотов рассмотрены ранее в [17-24]. В настоящее время известны и исследуются магнетики, состояние равновесия которых не является трансляционно-инвариантным [25-29], и их состояния описываются на основе векторного или тензорного (квадрупольного) параметров порядка [30-32].

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-02-16663.

Классификация состояний равновесия магнитных состояний в настоящей работе осуществляется исходя из условий ненарушенной и пространственной симметрии при ненулевых значениях параметра порядка. При этом детально рассмотрены два различных случая. Для первого из них конденсированная среда характеризуется векторным параметром порядка, который обладает свойством нечетности при операции отражения времени. Другой рассмотренный случай описывает магнитную систему с квадрупольным параметром порядка. Этот параметр порядка четен при преобразовании отражения времени. Поэтому получаемые в результате классификации магнитные состояния равновесия имеют разные магнитные свойства. В развиваемом нами подходе в обоих случаях уравнения на равновесные значения параметра порядка получаются линейными и не требуют каких-либо модельных представлений о свободной энергии. Рассмотрены как однородные, так и неоднородные состояния равновесия.

1. Состояния равновесия нормальных конденсированных сред

Равновесный статистический оператор Гиббса имеет вид

$$\hat{w} = \exp(\Omega(Y) - Y_a\hat{\gamma}_a) \equiv \hat{w}_n, \tag{1.1}$$

где Y_a – термодинамические силы сопряженные аддитивным интегралам движения $\hat{\gamma}_a \equiv (\hat{H}, \hat{P}_k, N, \hat{S}_a)$, $a = 0, k, 4, \alpha$. Здесь $\hat{H} = \int d^3x\hat{\varepsilon}(x)$ – гамильтониан, $\hat{P}_k = \int d^3x\hat{\pi}(x)$ – импульс, набор генераторов группы внутренних симметрий состоит из операторов числа частиц $\hat{N} = \int d^3x\hat{n}(x)$ и спина $\hat{S}_a = \int d^3x\hat{s}_a(x)$. Входящие в подынтегральные выражения операторы представляют собой плотности аддитивных интегралов движения. Термодинамический потенциал $\Omega(Y)$ определяется из условия нормировки $Sp\hat{w} = 1$. Набор термодинамических сил включает в себя $Y_0^{-1} \equiv T$ – температуру, $-Y_k / Y_0 \equiv v_k$ – нормальную скорость, $-Y_4 / Y_0 \equiv \mu$ – химический потенциал, $-Y_\alpha / Y_0 \equiv h_\alpha$ – эффективное магнитное поле.

Сформулируем свойства симметрии состояния равновесия. Условие пространственной однородности нормального состояния имеет вид

$$[\hat{w}, \hat{P}_k] = 0. \tag{1.2}$$

Свойства симметрии равновесного статистического оператора следует дополнить равенствами

$$[\hat{w}, \hat{H}] = 0, \qquad [\hat{w}, \hat{N}] = 0, \tag{1.3}$$

которые отражают временную инвариантность и фазовую инвариантность состояния равновесия нормальных систем. Наличие интегралов движения – операторов орбитального $\hat{L}_i = \varepsilon_{ikl}\int d^3x x_k\hat{\pi}_l(x)$ и спинового $\hat{S}_\alpha$ моментов позволяет сформулировать соответствующие свойства симметрии равновесного статистического оператора. С этой целью введем в рассмотрение обобщенные операторы орбитального и спинового момента равенствами:

$$\hat{L}_i(Y) \equiv \hat{L}_i + \hat{L}_i^Y, \qquad L_i^Y \equiv -i\varepsilon_{ikl}Y_k\frac{\partial}{\partial Y_l},$$

$$\hat{\Sigma}_\alpha(Y) = \hat{S}_\alpha + \hat{S}_\alpha^Y, \qquad \hat{S}_\alpha^Y \equiv -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}Y_\beta\frac{\partial}{\partial Y_\gamma}. \tag{1.4}$$

Введенные операторы действуют как в гильбертовом пространстве, так и в пространстве термодинамических функций. На векторы Y_l и Y_α дифференциальные операторы действуют так:

$$i\left[\hat{L}_i^Y, Y_j\right] = \varepsilon_{ikj} Y_k, \qquad i\left[\hat{S}_\alpha^Y, Y_\rho\right] = \varepsilon_{\alpha\beta\rho} Y_\beta. \qquad (1.5)$$

В силу известных коммутационных соотношений

$$\left[\hat{N}, \hat{N}\right] = 0, \qquad \left[\hat{N}, \hat{P}_i\right] = 0, \qquad \left[\hat{N}, \hat{L}_i\right] = 0, \qquad \left[\hat{P}_k, \hat{P}_i\right] = 0, \quad (1.6)$$

$$i\left[\hat{L}_i, \hat{P}_k\right] = -\varepsilon_{ikl} \hat{P}_l, \quad i\left[\hat{L}_i, \hat{L}_k\right] = -\varepsilon_{ikl} \hat{L}_l. \quad i\left[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{S}_\gamma$$

и явного вида операторов (1.4), получим квантовые скобки Пуассона для введенных операторов (1.4):

$$i\left[\hat{L}_i(Y), \hat{L}_k(Y)\right] = -\varepsilon_{ikl} \hat{L}_l(Y), \qquad i\left[\hat{\Sigma}_\alpha(Y), \hat{\Sigma}_\beta(Y)\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\Sigma}_\gamma(Y). \quad (1.7)$$

С помощью этих операторов удобно сформулировать свойства симметрии равновесного статистического оператора относительно пространственных и спиновых поворотов

$$\left[\hat{w}, \hat{L}_k(Y)\right] = 0, \qquad \left[\hat{w}, \hat{\Sigma}_\alpha(Y)\right] = 0. \qquad (1.8)$$

Условия симметрии относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах означают пренебрежение слабыми дипольными и спин-орбитальными взаимодействиями при характеристике состояния равновесия. Полная группа симметрии нормального состояния равновесия среды имеет вид

$$G = [SO(3)]_S \times [SO(3)]_L \times [U(1)]_\varphi \times [T(3)] \times [T(1)]. \qquad (1.9)$$

Здесь $[SO(3)]_S, [SO(3)]_L$ – группы симметрии относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах, $[T(3)], [T(1)]$ – трансляционные группы в пространстве и времени, $[U(1)]_\varphi$ – группа фазовой симметрии. Каждый элемент группы представляет собой унитарный оператор $U \equiv \exp i\hat{G}g$ (g – действительные параметры преобразования), оставляющий инвариантным распределение Гиббса

$$U\hat{w}U^+ = \hat{w}. \qquad (1.10)$$

Генераторами преобразований (1.9) являются линейные комбинации операторов $\hat{G} \in \left\{ \hat{\Sigma}, \hat{L}, \hat{N}, \hat{P}, \hat{H} \right\}$. Обратим внимание, что свойство инвариантности (1.10) имеет место для произвольных параметров преобразования, сопряженных с интегралами движения в силу условий симметрии (1.2), (1.3), (1.7). Поэтому средние $Sp\hat{w}\left[\hat{G}, \hat{b}(x)\right]$ обращаются в нуль для произвольного квазилокального оператора $\hat{b}(x)$. Это, в частности, справедливо для операторов $\hat{b}(x) \equiv \hat{\Delta}_a(x)$, имеющих смысл операторов параметра порядка и не коммутирующих с интегралами движения $\hat{G}$. Здесь индекс a отражает тензорную размерность параметра порядка. В последующих разделах будут сформулированы трансформационные свойства операторов параметра порядка изучаемых магнетиков. Здесь же достаточно заметить, что возникающие коммутаторы типа $\left[\hat{G}, \hat{\Delta}_a(x)\right]$ линейны и однородны по операторам параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$, что приводит к обращению в нуль их равновесных средних:

$$Sp\hat{w}\hat{\Delta}_a(x) = 0 \qquad (1.11)$$

в нормальном состоянии, то есть в состоянии, описываемом статистическим оператором Гиббса (1.1). Так как нас интересуют магнитные свойства среды в состоянии равновесия, рассмотрим равновесное значение спина $s_a = Sp\hat{w}\hat{s}_\alpha(x)$. В силу (1.6) – (1.8), справедливо уравнение

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma + \varepsilon_{\alpha\lambda\rho} Y_\lambda \frac{\partial s_\beta}{\partial Y_\rho} = 0,$$

откуда следует равенство

$$s_\alpha = sY_\alpha / Y, \qquad Y \equiv \left|\vec{Y}\right|. \tag{1.12}$$

Таким образом, в этом состоянии равновесия спин направлен вдоль вектора $\vec{Y}$, и его величина в терминах плотности термодинамического потенциала

$$\omega(Y) = \lim_{V\to\infty} \Omega(Y)/V$$

имеет, очевидно, вид

$$s(Y) = 2Y \frac{\partial\omega(Y)}{\partial Y^2}.$$

Здесь V – объем системы. Рассмотренный случай представляет собой парамагнитное состояние равновесия конденсированной среды.

2. Состояния равновесия вырожденных конденсированных сред и задача их классификации

Рассмотрим состояния равновесия со спонтанно нарушенной симметрией относительно поворотов в спиновом пространстве. В этом случае статистический оператор (1.1) не описывает правильно равновесные состояния изучаемых конденсированных сред, для которых равновесный параметр порядка отличен от нуля. Для адекватного построения теории равновесия конденсированной среды в рамках статистической теории используем концепцию квазисредних [10]. Конструктивным моментом этой концепции является введение в равновесный статистический оператор бесконечно малого источника $\nu\hat{F}$, который уменьшает симметрию состояния статистического равновесия по сравнению с симметрией гамильтониана и позволяет обобщить распределение Гиббса на конденсированные среды в условиях спонтанного нарушения симметрии. Согласно [10], квазисреднее величины $a(x)$ в состоянии статистического равновесия с нарушенной симметрией определяется формулой

$$a(x) = \langle\hat{a}(x)\rangle \equiv \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} Sp\hat{w}_\nu \hat{a}(x), \tag{2.1}$$

где

$$\hat{w}_\nu \equiv \exp\left(\Omega_\nu - Y_a\hat{\gamma}_a - \nu Y_0 \hat{F}\right). \tag{2.2}$$

Источник $\hat{F}$ обладает симметрией исследуемой фазы конденсированной среды и снимает вырождение состояния равновесия. Имеет место спонтанное нарушение симметрии состояния равновесия

$$\left[\,\hat{w}, \hat{G}_0\,\right] \neq 0,$$

при $\left[\,\hat{H}, \hat{G}_0\,\right] = 0$ и, следовательно, равновесное среднее параметра порядка отлично от нуля

$$\Delta_a(x) = Sp\hat{w}\hat{\Delta}_a(x) \neq 0,$$

где $\hat{G}_0$ – подмножество генераторов группы $\hat{G}$, по отношению к которым симметрия нарушена. Выписанное операторное соотношение следует понимать в смысле квазисредних, то есть

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} Sp\hat{w}_\nu \left[\,\hat{G}_0, \hat{a}(x)\,\right] \neq 0.$$

Всюду мы используем одинаковое обозначение, как для средних, так и для квазисредних. В соответствии с концепцией квазисредних, выбираем источник $\hat{F}$, нарушающий симметрию состояния равновесия в виде линейного функционала оператора параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$:

$$\hat{F} = \int d^3x\left(f_a(x)\hat{\Delta}_a(x) + h.c.\right), \tag{2.3}$$

где $f_a(x)$ – некоторая функция координат, сопряженная оператору параметра порядка, которая задает его равновесные значения $\Delta_a(x) = \left\langle \hat{\Delta}_a(x) \right\rangle$. Такая модификация статистического оператора Гиббса дает возможность ввести в рассмотрение дополнительные термодинамические параметры [11-14]. Заметим, что введение источника $\hat{F}$ в общем случае нарушает инвариантность равновесного статистического оператора по отношению к трансляциям, то есть

$$\left[\hat{w}, \hat{P}\right] \neq 0, \tag{2.4}$$

поэтому может возникнуть зависимость параметра порядка от координаты в состоянии равновесия.

Операторы параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$ представляют собой некоторые определенные локальные функции полевых операторов рождения и уничтожения. Сформулируем трансформационные свойства операторов параметра порядка [14]. Условие трансляционной инвариантности имеет вид

$$i\left[\hat{P}_k, \hat{\Delta}_a(x)\right] = -\nabla_k \hat{\Delta}_a(x). \tag{2.5}$$

Генератором группы фазовых преобразований является оператор числа частиц $\hat{N}$. Оператор параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$ преобразуется согласно соотношениям

$$\left[\hat{N}, \hat{\Delta}_a(x)\right] = -g\hat{\Delta}_a(x). \tag{2.6}$$

Постоянная g зависит от тензорной размерности оператора параметра порядка.

При преобразованиях, связанных с группой спиновых поворотов, генераторами которых являются операторы спина $\hat{S}_\alpha (\alpha = x, y, z)$, операторы параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$ преобразуются по представлениям этой группы

$$i\left[\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}_a(x)\right] = -g_{\alpha ab}\hat{\Delta}_b(x), \tag{2.7}$$

где $\left(\hat{g}_\alpha\right)_{ab} \equiv g_{\alpha ab}$ – некоторые постоянные, зависящие от тензорной размерности оператора параметра порядка. Генераторы группы спиновой симметрии $\hat{S}_\alpha$ удовлетворяют соотношениям

$$i\left[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_\gamma,$$

здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – антисимметричный тензор Леви-Чивита. Из формул (2.7), используя тождество Якоби для операторов $\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta$ и $\hat{\Delta}(x)$, вытекает соотношение

$$\left[\hat{g}_\alpha, \hat{g}_\beta\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{g}_\gamma. \tag{2.8}$$

При преобразованиях, связанных с группой пространственных поворотов L_i $(i = 1,2,3)$ для операторов параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$, справедливы соотношения

$$i\left[\hat{L}_i, \hat{\Delta}_a(x)\right] = -g_{iab}\hat{\Delta}_b(x) - \varepsilon_{ijk}x_k\nabla_j\hat{\Delta}_a(x), \tag{2.9}$$

$$\left[\hat{g}_i, \hat{g}_j\right] = -\varepsilon_{ijk}\hat{g}_k, \tag{2.10}$$

где $\left(\hat{g}_i\right)_{ab} \equiv g_{iab}$ – некоторые постоянные, зависящие от тензорной размерности оператора параметра порядка.

Покажем, как формулируются свойства симметрии состояния равновесия и вводятся дополнительные термодинамические параметры для вырожденных конденсированных сред. Рассмотрим в начале трансляционно-инвариантные подгруппы ненарушенной симметрии H полной группы симметрии G. Трансляционная инвариантность означает, что равновесный статистический оператор удовлетворяет соотношению симметрии

$$\left[\hat{w}, \hat{P}_k\right] = 0. \qquad (2.11)$$

Анализ трансляционно-инвариантных подгрупп ненарушенной симметрии равновесных состояний в соответствии с [2,14] осуществим исходя из соотношения

$$\left[\hat{w}, \hat{T}\right] = 0, \qquad (2.12)$$

где генератор ненарушенной (оставшейся) симметрии $\hat{T}$ представляет собой линейную комбинацию интегралов движения, (генераторы подгруппы H)

$$\hat{T} \equiv a_i\hat{L}_i(Y) + b_\alpha\hat{\Sigma}_\alpha(Y) + c\hat{N} \equiv \hat{T}(\xi, Y) \qquad (2.13)$$

с действительными параметрами $(a_i, b_\alpha, c \equiv \xi)$. Унитарные преобразования $U(\xi, Y) = \exp i\hat{T}(\xi, Y)$ образуют непрерывные подгруппы ненарушенной симметрии

$$U(\xi, Y)U(\xi', Y') = U(\xi''(\xi, \xi'; Y, Y'), Y''(\xi, \xi'; Y, Y'))$$

равновесного состояния. Из равенств

$$iSp\left[\hat{w}, \hat{T}(\xi, Y)\right]\hat{\Delta}_a(x) = 0, \; iSp\left[\hat{w}, \hat{P}_k\right]\hat{\Delta}_a(x) = 0, \qquad (2.14)$$

учитывая алгебраические соотношения (2.5) – (2.8),(2.10) и определение (2.13), получим линейные дифференциальные уравнения [16], которые задают структуру параметра порядка в состоянии равновесия:

$$a_i\left(g_{iab}\Delta_b + \varepsilon_{ikl}Y_k\frac{\partial\Delta_a(x)}{\partial Y_l}\right) + b_\alpha\left(g_{\alpha ab}\Delta_b + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}Y_\beta\frac{\partial\Delta_a(x)}{\partial Y_\gamma}\right) + ig\Delta_a(x) = 0,$$

$$\nabla_k\Delta_a(x) = 0. \qquad (2.15)$$

Эти уравнения существенно упрощаются, если $Y_\alpha = Y_k = 0$. При этом первое из уравнений (2.15) переходит в линейное уравнение для параметра порядка

$$T_{ab}(\xi)\Delta_b = 0, \qquad T_{ab}(\xi) \equiv a_i g_{iab} + b_\alpha g_{\alpha ab} + ig\delta_{ab}. \qquad (2.16)$$

Условие существования нетривиального решения $\Delta_a \neq 0$ системы линейных уравнений (2.16) приводит к равенству

$$\det\left|T_{ab}(\xi)\right| = 0, \qquad (2.17)$$

которое накладывает ограничения на допустимые значения параметров генератора ненарушенной симметрии ξ. Таким образом, в трансляционно-инвариантном случае равновесный статистический оператор Гиббса является функцией термодинамических параметров и параметров генератора ненарушенной симметрии, удовлетворяющих соотношению (2.17):

$$\hat{w} = \hat{w}(Y, \xi).$$

Рассмотрим теперь состояния равновесия, которые не обладают свойством трансляционной инвариантности (2.11). Пространственную симметрию таких неоднородных состояний равновесия определим соотношением [14]

$$\left[\hat{w}, \hat{P}_k(\eta, Y)\right] = 0, \quad \hat{P}_k(\eta, Y) \equiv \hat{P}_k - p_k\hat{N} - q_{k\alpha}\hat{\Sigma}_\alpha(Y) - t_{kj}\hat{L}_j(Y), \qquad (2.18)$$

здесь $\eta \equiv p_k, q_{k\alpha}, t_{kj}$ – некоторые действительные параметры. Генератор ненарушенной симметрии таких состояний теперь включает в себя оператор импульса

$$\hat{T}(\xi, Y) \equiv a_i\hat{L}_i(Y) + b_\alpha\hat{\Sigma}_\alpha(Y) + c\hat{N} + d_i\hat{P}_i, \qquad (2.19)$$

$$a_i, b_\alpha, c, d_l \equiv \xi \, .$$

Соотношения

$$iSp\left[\, \hat{w}, \hat{T}(\xi, Y)\,\right] \hat{\Delta}_a(x) = 0, \qquad iSp\left[\, \hat{w}, P_k(\eta, Y)\,\right] \hat{\Delta}_a(x) = 0, \tag{2.20}$$

в соответствии с (2.5) – (2.8) и (2.10) ведут к связям параметров, входящих в определение генераторов ненарушенной и пространственной симметрии. Эти соотношения следует дополнить двумя условиями на параметры ненарушенной и пространственной симметрии, которые являются следствием тождеств Якоби для операторов $\hat{w}, \hat{T}, \hat{P}_k$ и $\hat{w}, \hat{P}_i, \hat{P}_k$:

$$Sp\left[\, \hat{w}, \left[\, \hat{T}(\xi, Y), \hat{P}_k(\eta, Y)\,\right]\right] \hat{\Delta}_a(x) = 0, \qquad Sp\left[\, \hat{w}, \left[\, \hat{P}_i(\eta, Y), \hat{P}_k(\eta, Y)\,\right]\right] \hat{\Delta}_a(x) = 0. \tag{2.21}$$

Уравнения (2.20),(2.21) позволяют решить задачу о классификации состояния равновесия конденсированных сред в пространственно-неоднородном случае. Таким образом, равновесный статистический оператор теперь является функцией термодинамических параметров, а также параметров генераторов ненарушенной и пространственной симметрии:

$$\hat{w} = \hat{w}(Y, \xi, \eta),$$

причем допустимые значения параметров η и ξ находятся из соотношений (2.20) и (2.21).

3. Магнитные конденсированные среды с векторным параметром порядка. Однородные состояния равновесия

Рассмотрим конденсированные среды с нарушенной симметрией относительно спиновых поворотов и характеризуемые векторным параметром порядка

$$\Delta_\alpha(x, \hat{p}) = Sp\hat{p}\hat{\Delta}_\alpha(x) = \Delta_\alpha(x, \hat{p}). \tag{3.1}$$

Здесь $\hat{\Delta}_\alpha(x)$ – эрмитов оператор параметра порядка, построенный линейным образом из операторов спинов подрешеток $\hat{\Delta}_\alpha(x) = \hat{\Delta}_\alpha(x, \hat{s}(x))$. Этот векторный оператор параметра порядка удовлетворяет операторной алгебре:

$$i\left[\, \hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}_\beta(x)\,\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\Delta}_\gamma(x), \qquad \left[\, \hat{N}, \hat{\Delta}_\beta(x)\,\right] = 0,$$

$$i\left[\, \hat{P}_k, \hat{\Delta}_\alpha(x)\,\right] = -\nabla_k \hat{\Delta}_\alpha(x), \quad i\left[\, \hat{L}_i, \hat{\Delta}_\alpha(x)\,\right] = -\varepsilon_{ijl} x_j \nabla_l \hat{\Delta}_\alpha(x). \tag{3.2}$$

Примерами таких систем являются, в частности, многоподрешеточные магнетики, спиновые стекла. В соответствии с концепцией квазисредних равновесный статистический оператор рассматриваемых магнитных систем имеет вид

$$\hat{w}_\nu \equiv \exp\left(\Omega_\nu - Y_0 \hat{H} - Y_\alpha \hat{S}_\alpha - \nu Y_0 \hat{F}\right) \equiv \hat{w}_\Delta, \tag{3.3}$$

$$\hat{F} = \int d^3x \left(f_\alpha(x) \hat{\Delta}_\alpha(x) + h.c.\right), \tag{3.4}$$

где $\hat{H}$ – гамильтониан обменного взаимодействия ($\left[\, \hat{H}, \hat{S}_\alpha\,\right] = 0$).

Так как в изучаемой среде отсутствуют явления сверхтекучести или сверхпроводимости, то фазовая инвариантность состояния равновесия не нарушена:

$$\left[\, \hat{w}, \hat{N}\,\right] = 0. \tag{3.5}$$

Кроме того, мы не будем рассматривать жидкокристаллические состояния, то есть состояния, которые имеют макроскопическую пространственную анизотропию:

$$\left[\, \hat{w}, \hat{L}_i\,\right] = 0. \tag{3.6}$$

Введем дискретные преобразования пространственного отражения и обращения времени и выпишем соответствующие трансформационные преобразования интегралов движения и параметра порядка относительно этих преобразований:

$$1)\qquad x_i \to x_i' = -x_i, \qquad t \to t' = t,$$

$$2)\qquad x_i \to x_i' = x_i, \qquad t \to t' = -t. \qquad (3.7)$$

Мы рассмотрим здесь эти преобразования, используя гейзенберговское представление квантовой механики. Преобразование пространственного отражения определяется равенством

$$\hat{\psi}'(\mathbf{x},t) = \hat{\psi}(-\mathbf{x},t) = \hat{P}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)\hat{P}^{+}. \qquad (3.8)$$

Отсюда следует, что $\left[\hat{P}^2, \hat{\psi}(\mathbf{x})\right] = 0$. Учитывая, что оператор $\hat{P}$ определен с точностью до фазового множителя, и замечая, что произвольный оператор, коммутирующий с операторами $\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$ и $\hat{\psi}^{+}(\mathbf{x},t)$ кратен единичному, можно считать, что $\hat{P}^2 = 1$ и, следовательно, собственные значения оператора $\hat{P}$ равны ± 1. Оператор $\hat{P}$ называется оператором пространственной четности. В соответствии с выражениями плотностей аддитивных интегралов движения $\hat{\pi}_k(\mathbf{x})$, $\hat{n}(\mathbf{x})$, $\hat{s}_\alpha(\mathbf{x})$

$$\hat{n}(x) = \hat{\psi}_\sigma^{+}(x)\hat{\psi}_\sigma(x), \qquad \hat{s}_i(x) = \hat{\psi}_\sigma^{+}(x)(s_i)_{\sigma\sigma'}\hat{\psi}_{\sigma'}(x),$$

$$\hat{\pi}_i(x) = -i\left\{\hat{\psi}_\sigma^{+}(x)\nabla_i\hat{\psi}_\sigma(x) - \nabla_i\hat{\psi}_\sigma^{+}(x)\hat{\psi}_\sigma(x)\right\}/2$$

в терминах полевых операторов и соотношением (3.8) получим трансформационные соотношения

$$\hat{P}\zeta_a(\mathbf{x})\hat{P}^{+} = \underline{\varepsilon}_a\zeta_a(-\mathbf{x}), \qquad (3.9)$$

(здесь мы положили $t = 0$ и перешли к шредингеровскому представлению квантовой механики), где множитель

$$\underline{\varepsilon}_a \equiv \delta_{a0} + \delta_{a4} + \delta_{a\alpha} - \delta_{ak} \qquad (3.10)$$

представляет собой пространственную сигнатуру оператора $\hat{\zeta}_a(\mathbf{x})$. В силу линейности оператора параметра порядка по спиновым операторам и соотношения (3.10), получим для векторного оператора параметра порядка трансформационное соотношение

$$\hat{P}\hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x})\hat{P}^{+} = \hat{\Delta}_\alpha(-\mathbf{x}). \qquad (3.11)$$

Рассмотрим теперь дискретное преобразование обращения времени

$$t \to t' = -t. \qquad (3.12)$$

Этой операции соответствует следующее преобразование полевого оператора $\hat{\psi}(x,t)$:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},t) \to \hat{\psi}'(\mathbf{x},t') = \mathrm{T}\hat{\psi}^{*}(\mathbf{x},t), \qquad (3.13)$$

где Т – унитарная матрица ($\mathrm{T}\mathrm{T}^{+} = 1$), действующая на спиновые индексы $\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$, и знак * служит для обозначения операции комплексного сопряжения. Легко видеть, что $\left[\mathrm{T}^2, \hat{\psi}(\mathbf{x},t)\right] = 0$. Эта операция зависит от выбора базиса в гильбертовом пространстве. Именно, если выбран определенный базис в гильбертовом пространстве, то в нем операция комплексного сопряжения определяется формулой

$$\langle n|\psi^{*}|n'\rangle = \langle n|\psi|n'\rangle^{*}. \qquad (3.14)$$

Так как операторы $\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$ и $\hat{\psi}'(\mathbf{x},t)$ удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям, то они связаны унитарным оператором $\hat{\mathrm{T}}$, действующим в гильбертовом пространстве:

$$\hat{\psi}'(\mathbf{x},t) = \hat{T}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)\hat{T}^{+} = \mathrm{T}\hat{\psi}^{*}(\mathbf{x},-t). \qquad (3.15)$$

Зная выражения для операторов аддитивных интегралов движения в терминах полевых операторов рождения и уничтожения, а также, используя равенство (3.13) при $t = 0$, легко установить справедливость соотношений

$$\hat{\mathrm{T}}\zeta_a(\mathbf{x})\hat{T}^{+} = \varepsilon_a\hat{\zeta}_a^{*}(\mathbf{x}). \qquad (3.16)$$

Здесь величина

$$\varepsilon_a \equiv \delta_{a0} + \delta_{a4} - \delta_{aa} - \delta_{ak} \qquad (3.17)$$

представляет собой временную сигнатуру шредингеровского оператора $\hat{\zeta}_a(\mathbf{x})$.

Используя формулы (3.16),(3.17) и, учитывая линейность векторного оператора параметра порядка по операторам плотности спина, найдем закон преобразования оператора параметра порядка при преобразовании обращения времени

$$\hat{\mathrm{T}}\hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x})\hat{T}^+ = -\hat{\Delta}_\alpha^*(\mathbf{x}). \qquad (3.18)$$

Соотношения (3.9) – (3.11) и (3.16) – (3.18) позволяют получить трансформационные свойства равновесного статистического оператора Гиббса (3.3) при дискретных преобразованиях отражения пространства и обращения времени

$$\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{T}}\,\hat{w}(Y_0, Y_\alpha, f_\alpha)\left(\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{T}}\right)^+ = \hat{w}^*(Y_0, -Y_\alpha, -f_\alpha). \qquad (3.19)$$

Для пространственно-однородных состояний (2.11) генератор ненарушенной симметрии (2.13) магнетиков имеет вид

$$\hat{T}(\xi, Y) \equiv b_\alpha \hat{\Sigma}_\alpha(Y). \qquad (3.20)$$

(Во избежание недоразумений обращаем внимание на различное написание операторов ненарушенной симметрии $\hat{T}$ и унитарного оператора обращения времени $\hat{\mathrm{T}}$). Не ограничивая общность рассмотрения, можно считать, что вектор $\vec{b}$ единичный: $b_\alpha^2 = 1$. В силу условия ненарушенной симметрии (2.12) и операторной алгебры (3.2), получим уравнения, определяющие равновесную структуру спина и параметра порядка

$$b_\alpha\left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_\gamma + \varepsilon_{\alpha\lambda\rho}Y_\lambda\frac{\partial\Delta_\beta}{\partial Y_\rho}\right) = 0, \qquad b_\alpha\left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma + \varepsilon_{\alpha\lambda\rho}Y_\lambda\frac{\partial s_\beta}{\partial Y_\rho}\right) = 0. \qquad (3.21)$$

Так как равновесный статистический оператор Гиббса зависит от двух векторов $\vec{b}$ и $\vec{Y}$: $\hat{w} = \hat{w}(\vec{Y}, \vec{b})$, то плотность термодинамического потенциала является функцией двух скалярных инвариантов

$$\omega = \omega(\vec{Y}, \vec{b}) = \omega\left(Y^2, \vec{Y}\vec{b}\right).$$

Поэтому справедливы следующие равенства

$$s_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial Y^2}2Y_\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\vec{Y}\vec{b}}b_\alpha, \qquad \Delta_\alpha = \Delta_1 Y_\alpha + \Delta_2 b_\alpha + \Delta_3\left(\vec{Y}\times\vec{b}\right)_\alpha. \qquad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в (3.21), видим, что уравнения (3.21) выполняются тождественно при любых направлениях вектора $\vec{b}$.

1. Общая ситуация, когда $\vec{b} \neq 0$ и $\vec{Y} \neq 0$ соответствуют ферримагнитному упорядочению.

2. Частный случай – при котором $\vec{b} \neq 0$, $\vec{Y} = 0$ и $\lim\limits_{\vec{Y}\to 0}\frac{\partial\omega}{\partial\vec{Y}\vec{b}} \to 0$ соответствует антиферромагнитному упорядочению.

3. Если $\lim\limits_{\vec{Y}\to 0}\frac{\partial\omega}{\partial\vec{Y}\vec{b}} \neq 0$, то при $\vec{b} \neq 0$, $\vec{Y} = 0$ реализуется ферромагнитное упорядочение.

4. Неоднородные состояния равновесия магнитных сред с векторным параметром порядка

Исследуем теперь случай, когда пространственная симметрия состояния равновесия имеет более сложный пространственный характер и определяется равенством (2.21). При этом генератор ненарушенной симметрии соответственно имеет вид (2.21). Согласно условиям симметрии (2.15) и (2.21), запишем соотношения

$$iSp\left[\hat{w},\hat{T}(\xi,Y)\right]\hat{\Delta}_\beta(x)=0, \qquad iSp\left[\hat{w},\hat{P}_k(\eta,Y)\right]\hat{\Delta}_\beta(x)=0. \qquad (4.1)$$

Откуда следуют уравнения, устанавливающие равновесную структуру параметра порядка, и возникают ограничения на параметры генераторов ненарушенной симметрии и пространственной симметрии. Условие пространственной симметрии, вид генератора $\hat{P}_k$ (2.21) и алгебра (3.2) приводят к уравнениям

$$\nabla_k\Delta_\beta(x)=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}q_{k\alpha}\Delta_\gamma(x), \qquad t_{kj}\varepsilon_{j\mu\nu}q_{\nu\lambda}\varepsilon_{\lambda\beta\gamma}\Delta_\gamma(x)=0. \qquad (4.2)$$

Второе соотношение в (4.2) является следствием требования отсутствия линейного по координате слагаемого в условии пространственной симметрии (2.21) и первого соотношения в (4.2). Условие ненарушенной симметрии в (4.1), принимая во внимание вид генератора (2.22), приводит к уравнениям

$$(b_\alpha+d_iq_{i\alpha})\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_\gamma(x)=0, \qquad a_i\varepsilon_{ikl}q_{l\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_\gamma(x)=0. \qquad (4.3)$$

Дополнительные связи параметров генераторов симметрии, введенных соотношениями (2.21), (2.22), установим, используя тождество Якоби. Для операторов $\hat{w},\hat{T},\hat{\hat{P}}$ принимая во внимание свойства симметрии (2.15), (2.21), приходим к равенству

$$Sp\left[\hat{w},\left[\hat{T}(\xi,Y),\hat{P}_k(\eta,Y)\right]\right]\hat{\Delta}_\beta(x)=0. \qquad (4.4)$$

Откуда, учитывая (2.21), (2.22), (3.2), получаем соотношения

$$(b_\beta q_{i\rho}-b_\rho q_{i\beta})\varepsilon_{\rho\alpha\gamma}\Delta_\gamma(x)=0, \qquad (a_it_{kl}-a_lt_{ki})q_{l\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_\gamma(x)=0. \qquad (4.5)$$

Используя далее тождество Якоби для операторов $\hat{w}$, $\hat{P}_i$, $\hat{P}_k$ и учитывая свойство пространственной симметрии (2.21, имеем соотношение

$$Sp\left[\hat{w},\left[\hat{P}_i(\eta,Y),\hat{P}_k(\eta,Y)\right]\right]\hat{\Delta}_\beta(x)=0. \qquad (4.6)$$

Отсюда следуют уравнения

$$(t_{ij}t_{kl}-t_{il}t_{kj})q_{l\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_\gamma(x)=0, \qquad (q_{l\alpha}q_{i\beta}-q_{l\beta}q_{i\alpha})\Delta_\alpha(x)=0. \qquad (4.7)$$

Система уравнений (4.2), (4.3), (4.5), (4.7) полностью определяет допустимую структуру параметров генератора симметрии и вид параметра порядка в равновесии. Не трудно видеть, что решение этой системы уравнений может быть представлено в виде

$$\Delta_\beta(x)=a_{\beta\gamma}(\vec{n}\theta(x))\underline{\Delta}_\gamma(0), \qquad \theta(x)=\theta+\vec{q}\vec{x}, \qquad (4.9)$$

$$q_{i\alpha}=q_in_\alpha.$$

Здесь q_k – вектор магнитной спирали, n_α – ось анизотропии в спиновом пространстве матрица t_{ik} – произвольна. Ортогональная матрица поворота связана с углом спинового поворота соотношением

$$a_{\alpha\beta}(\vec{\theta}(x))\equiv(\exp(\varepsilon\theta(x)))_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\cos\theta(x)+n_\alpha n_\beta(1-\cos\theta(x))+\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma\sin\theta(x), \quad (4.10)$$

$$\theta_\alpha(x) = n_\alpha \theta(x), \qquad n_\alpha^2 = 1$$

Равновесные значения плотности спина $s_\alpha(x)$ зависят от координат: $s_\alpha(x) = a_{\alpha\beta}(x) \underline{s}_\beta$, причем вся пространственная зависимость содержится в ортогональной матрице поворота $a_{\alpha\beta}(x)$, определенной равенствами (4.10). Таким образом, состояние равновесия рассматриваемой неоднородной магнитной системы со спонтанным нарушением симметрии относительно спиновых поворотов и пространственных трансляций характеризуется термодинамическими силами Y_a, вектором магнитной спирали $\vec{q}$ и углом спинового поворота θ : $\hat{w} = \hat{w}(Y, \vec{q}, \theta)$.

5. Магнитные конденсированные среды с квадрупольным параметром порядка. Однородные состояния равновесия

Квадрупольные магнетики описываются тензорным параметром порядка

$$Q_{\alpha\beta}(x, \hat{\rho}) = Sp\hat{\rho}\hat{Q}_{\alpha\beta}(x) = Q_{\alpha\beta}(x, \hat{\rho}). \tag{5.1}$$

Здесь $\hat{Q}_{\alpha\beta}(x)$ – эрмитов оператор параметра порядка, введенный нами билинейным образом из операторов спина $\hat{\Delta}_\alpha(x) = \hat{\Delta}_\alpha(x, \hat{s}(x))$:

$$\hat{Q}_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}\left(\hat{s}_\alpha(x)\hat{s}_\beta(x) + \hat{s}_\beta(x)\hat{s}_\alpha(x) - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\hat{s}_\gamma^2(x) \right). \tag{5.2}$$

Этот оператор является симметричным и бесшпуровым

$$\hat{Q}_{\alpha\beta}(x) = \hat{Q}_{\beta\alpha}(x), \qquad \hat{Q}_{\alpha\alpha}(x) = 0. \tag{5.3}$$

Квадрупольный оператор параметра порядка в соответствии с определением (5.2) удовлетворяет выписанной операторной алгебре

$$i\left[\hat{S}_\alpha, \hat{Q}_{\beta\gamma}(x) \right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\rho}\hat{Q}_{\gamma\rho}(x) - \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}\hat{Q}_{\beta\rho}(x),$$

$$\left[\hat{N}, \hat{Q}_{\alpha\beta}(x) \right] = 0, \tag{5.4}$$

$$i\left[\hat{P}_k, \hat{Q}_{\alpha\beta}(x) \right] = -\nabla_k \hat{Q}_{\alpha\beta}(x), \qquad i\left[\hat{L}_i, \hat{Q}_{\alpha\beta}(x) \right] = -\varepsilon_{ijl} x_j \nabla_l \hat{Q}_{\alpha\beta}(x).$$

Видим, что правые стороны квантовых скобок Пуассона (5.4) линейны по квадрупольному оператору параметра порядка. Это обстоятельство приводит, в конечном итоге, к линейным уравнениям, классифицирующим состояния равновесия этих магнитных систем.

Состояние равновесия магнитной конденсированной среды описывается статистическим оператором Гиббса (2.2), причем теперь источник (2.3) в гиббсовской экспоненте имеет вид

$$\hat{F} = \int d^3x f_{\alpha\beta}(x)\hat{Q}_{\alpha\beta}(x). \tag{5.5}$$

Рассмотрим трансформационное свойство квадрупольного оператора параметра порядка при преобразовании пространственного отражения (3.8). Согласно формуле (3.9), (3.10) и определению (5.2), имеем

$$\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{Q}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\hat{\mathrm{P}}^+ = \hat{Q}_{\alpha\beta}(-\mathbf{x}). \tag{5.6}$$

При дискретном преобразовании обращения времени, в силу (3.16), (3.17) и (5.2), получим соотношение

$$\hat{\mathrm{T}}\hat{Q}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\hat{T}^+ = \hat{Q}_{\alpha\beta}{}^*(\mathbf{x}). \tag{5.7}$$

Формулы (5.6),(5.7) совместно с (3.9),(3.16) позволяют найти трансформационные соотношения при отражении координат и обращении времени для статистического оператора Гиббса:

$$\hat{\mathrm{P}}\hat{T}\hat{w}(Y_0, Y_\alpha, f_{\alpha\beta})(\hat{P}\mathrm{T})^{+} = \hat{w}^{*}(Y_0, -Y_\alpha, f_{\alpha\beta}). \quad (5.8)$$

Видим, что характер преобразований равновесного статистического оператора существенно зависит от трансформационных свойств источника, нарушающего симметрию. В частности, при $Y_\alpha = 0$ статистический оператор четен относительно TP преобразований.

$$\hat{\mathrm{P}}\hat{T}\hat{w}(Y_0 f_{\alpha\beta})(\hat{P}\mathrm{T})^{+} = \hat{w}^{*}(Y_0 f_{\alpha\beta}). \quad (5.9)$$

Соотношения (5.9),(3.9),(3.11),(3.16)-(3.18) приводят к равенствам

$$Sp\hat{w}(Y_0 f_{\alpha\beta})\hat{s}_\gamma(x) = 0, \qquad Sp\hat{w}(Y_0 f_{\alpha\beta})\hat{\Delta}_\gamma(x) = 0. \quad (5.10)$$

Пять независимых компонент квадрупольного параметра порядка могут быть параметризованы соотношением

$$Q_{\alpha\beta}(x,\bar{p}) = Q(x,\bar{p})\left(e_\alpha(x,\bar{p})e_\beta(x,\bar{p}) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\right) + Q'(x,\bar{p})\left(f_\alpha(x,\bar{p})f_\beta(x,\bar{p}) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\right). \quad (5.11)$$

Здесь Q и Q' – модули параметра порядка и векторы – $d_\alpha, e_\alpha, f_\alpha$ образуют ортонормированный репер:

$$\mathbf{de} = 0, \quad \mathbf{df} = 0, \quad \mathbf{ef} = 0, \quad \mathbf{f}^2 = 1, \quad \mathbf{d}^2 = 1, \quad \mathbf{e}^2 = 1,$$
$$\mathbf{e}\times\mathbf{f} = \mathbf{d}, \quad \mathbf{f}\times\mathbf{d} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{d}\times\mathbf{e} = \mathbf{f}. \quad (5.12)$$

Нетрудно видеть, что введенные векторы удовлетворяют равснству

$$e_\alpha e_\beta + f_\alpha f_\beta + d_\alpha d_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.13)$$

Определим генератор одноосной спиновой симметрии и двухосной спиновой симметрии равенствами

$$\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e}) = \hat{S}_\alpha + \hat{S}_\alpha^{\mathbf{e}}, \quad (5.14)$$

$$\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e},\mathbf{f}) = \hat{S}_\alpha + \hat{S}_\alpha^{\mathbf{e}} + \hat{S}_\alpha^{\mathbf{f}}. \quad (5.15)$$

Эти операторы, как легко видеть, удовлетворяют равенствам

$$i\left[\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e}), \hat{\Sigma}_\beta(\mathbf{e})\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\Sigma}_\gamma(\mathbf{e}), \qquad i\left[\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e},\mathbf{f}), \hat{\Sigma}_\beta(\mathbf{e},\mathbf{f})\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\Sigma}_\gamma(\mathbf{e},\mathbf{f}). \quad (5.16)$$

Введем в рассмотрение генераторы ненарушенной симметрии в соответствии с формулами (2.13), (5.14), (5.15) для одноосного и двухосного случаев

$$\hat{T} \equiv b_\alpha\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e}) = \hat{T}(\mathbf{b},\mathbf{e}),$$
$$\hat{T} \equiv b_\alpha\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e},\mathbf{f}) = \hat{T}(\mathbf{b},\mathbf{e},\mathbf{f}). \quad (5.17)$$

Заметим, кроме того, что для производных, связанных с единичными векторами e_α и f_α, справедливы соотношения

$$\frac{\partial e_u}{\partial e_v} = \frac{\partial f_u}{\partial f_v} \equiv \delta_{uv} - e_u e_v - f_u f_v = d_u d_v. \quad (5.18)$$

Обратим внимание, что формулы (5.18) учитывают связи соотношений (5.12) для векторов e_α и f_α. Соотношения (5.18) справедливы, как мы увидим далее, для двухосных магнитных систем. Однако при рассмотрении одноосных магнитных сред, которые характеризуются одним спиновым вектором e_α, связи типа (5.12) отсутствуют, и вместо формул (5.18) в этом случае справедливо соотношение

$$\frac{\partial e_u}{\partial e_v} = \delta_{uv} - e_u e_v \equiv \delta_{uv}^{\perp}(\vec{e}). \quad (5.19)$$

Условие ненарушенной симметрии (2.12) совместно с условием пространственной однородности (2.11) и в соответствии с определениями (5.17) и алгебраическими соотношениями (5.4) приводит к уравнениям для одноосного случая

$$b_\alpha \left\{ \varepsilon_{\alpha u\rho} Q_{\rho v} + \varepsilon_{\alpha v\rho} Q_{\rho u} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} e_\beta \frac{\partial Q_{uv}}{\partial e_\gamma} \right\} = 0, \qquad \nabla_k Q_{uv}(x) = 0. \tag{5.20}$$

Для двухосного случая получим аналогично

$$b_\alpha \left\{ \varepsilon_{\alpha u\rho} Q_{\rho v} + \varepsilon_{\alpha v\rho} Q_{\rho u} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} e_\beta \frac{\partial Q_{uv}}{\partial e_\gamma} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f_\beta \frac{\partial Q_{uv}}{\partial f_\gamma} \right\} = 0, \qquad \nabla_k Q_{uv}(x) = 0. \tag{5.21}$$

Очевидно, что решения уравнений (5.20) и (5.21) не зависят от координаты

$$Q_{uv}(x) = Q_{uv}(0) \equiv Q_{uv}. \tag{5.22}$$

Решение уравнения (5.20) ищем в виде

$$Q_{uv} = Q\left(e_u e_v - \frac{1}{3}\delta_{uv} \right).$$

Используя формулу(5.19), найдем

$$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial e_v} = Q\left(\delta^{\perp}_{\alpha v}(\vec{e}) e_\beta + e_\alpha \delta^{\perp}_{\beta v}(\vec{e}) \right).$$

Подставляя последнюю формулу в уравнение (5.20), видим, что оно тождественно выполняется при всех значениях вектора $\vec{b}$.

Перейдем к нахождению решения уравнения (5.21) и будем искать его в виде

$$Q_{uv} = Q\left(e_u e_v - \frac{1}{3}\delta_{uv} \right) + Q'\left(f_u f_v - \frac{1}{3}\delta_{uv} \right). \tag{5.23}$$

Заметим, что согласно (5.18) имеют место равенства

$$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial e_v} = Q d_v \left(d_\alpha e_\beta + e_\alpha d_\beta \right), \qquad \frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial f_v} = Q' d_v \left(d_\alpha f_\beta + d_\beta f_\alpha \right). \tag{5.24}$$

Подставляя (5.23) и (5.24) в (5.21), получим уравнение

$$\begin{aligned} b_\lambda \Big\{ & Q\left[\varepsilon_{\lambda\alpha\rho} e_\beta e_\rho + \varepsilon_{\lambda\beta\rho} e_\rho e_\alpha - f_\lambda \left(d_\alpha e_\beta + d_\beta e_\alpha \right) \right] + \\ & + Q'\left[\varepsilon_{\lambda\alpha\rho} f_\beta f_\rho + \varepsilon_{\lambda\beta\rho} f_\rho f_\alpha + e_\lambda \left(d_\beta f_\alpha + d_\alpha f_\beta \right) \right] \Big\} = 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Для установления допустимых значений вектора $\vec{b}$ ищем его в виде разложения по ортонормированному реперу

$$b_\lambda = \alpha e_\lambda + \beta f_\lambda + \gamma d_\lambda, \tag{5.26}$$

где числа α, β, γ связаны соотношением $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Подставляя (5.26) в (5.25), в результате получим равенство

$$\gamma (Q - Q')\left(e_\beta f_\alpha + e_\alpha f_\beta \right) = 0. \tag{5.27}$$

Отсюда следует, что при $Q \neq Q'$ параметр $\gamma = 0$. Это решение описывает пространственно-однородный двухосный спиновый нематик

$$Q_{uv} = Q\left(e_u e_v - \frac{1}{3}\delta_{uv} \right) + Q'\left(f_u f_v - \frac{1}{3}\delta_{uv} \right), \tag{5.28}$$

и вектор $\vec{b}$ имеет вид

$$b_\lambda = \alpha e_\lambda + \beta f_\lambda,$$

причем $\alpha^2+\beta^2=1$.

Другое решение получается из (5.27), если $Q=Q'$. В этом случае вектор $\vec{b}$ произволен. В силу соотношения (5.13), параметр порядка приобретает вид одноосного спинового нематика:

$$Q_{uv}=-Q\left(d_u d_v-\frac{1}{3}\delta_{uv}\right).$$

6. Неоднородные состояния равновесия магнитных сред с квадрупольным параметром порядка

Обратимся теперь к неоднородным состояниям равновесия в смысле формулы (2.18). Операторы ненарушенной и пространственной симметрии имеют вид

$$\hat{T}(\xi)\equiv b_\alpha\hat{\Sigma}_\alpha\left(\vec{e},\vec{f}\right)+d_i\hat{P}_i,\qquad \hat{P}_k(\eta)\equiv\hat{P}_k-q_{k\alpha}\hat{\Sigma}_\alpha\left(\vec{e},\vec{f}\right).\tag{6.1}$$

Набор параметров генератора ненарушенной симметрии включает в себя векторы $(\xi)\equiv\vec{b},\vec{e},\vec{f},\vec{d}$. Через (η) обозначены параметры генератора пространственной симметрии $(\eta)\equiv q_{k\alpha},\vec{e},\vec{f}$. Так как для компонент оператора импульса справедливо соотношение $\left[\hat{P}_i,\hat{P}_k\right]=0$, то потребуем, чтобы и для компонент генератора пространственной симметрии справедливо аналогичное соотношение

$$\left[\hat{P}_i(\eta),\hat{P}_k(\eta)\right]=0.\tag{6.2}$$

Учитывая явный вид выражения (6.1), приходим к соотношению

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}q_{i\alpha}q_{k\beta}=0,\tag{6.3}$$

которое выполняется, если тензор $q_{i\alpha}$ обладает структурой

$$q_{i\alpha}=q_i n_\alpha,\tag{6.4}$$

где q_i – вектор магнитной спирали и n_α – ось спиновой анизотропии. Подставляя последнее выражение в (6.1) получим, согласно (6.2), соотношения, определяющие допустимый вид квадрупольного параметра порядка и вектора $\vec{b}$:

$$Sp\left[\hat{w},\left[\hat{T}(\xi),\hat{P}_k(\eta)\right]\right]\hat{Q}_{\alpha\beta}(x)=0,\tag{6.5}$$

$$iSp\left[\hat{w},\hat{T}(\xi)\right]\hat{Q}_{\alpha\beta}(x)=0,\qquad iSp\left[\hat{w},\hat{P}_k(\eta)\right]\hat{Q}_{\alpha\beta}(x)=0.$$

Используя далее квантовые скобки (5.4), приходим к уравнениям на структуру квадрупольного параметра порядка и допустимым значениям вектора $\vec{b}$:

$$b_\alpha F_\alpha^{uv}(x)=0,\qquad \left(\vec{b}\times\vec{n}\right)_\alpha F_\alpha^{uv}(x)=0,\qquad \nabla_k Q_{uv}(x)=q_k n_\alpha F_\alpha^{uv}(x),\tag{6.6}$$

где введено обозначение

$$F_\alpha^{uv}(x)=\varepsilon_{\alpha u\rho}Q_{\rho v}(x)+\varepsilon_{\alpha v\rho}Q_{\rho u}(x)+\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}e_\beta\frac{\partial Q_{uv}(x)}{\partial e_\gamma}+\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}f_\beta\frac{\partial Q_{uv}(x)}{\partial f_\gamma}.\tag{6.7}$$

Покажем, что решением системы уравнений (6.6) является следующий вид квадрупольного параметра порядка

$$Q_{uv}(x)=Q\left(m_u(x)m_v(x)-\frac{1}{3}\delta_{uv}\right)+Q'\left(l_u(x)l_v(x)-\frac{1}{3}\delta_{uv}\right),\tag{6.8}$$

где зависящие от координат векторы $\vec{m}(x)$ и $\vec{l}(x)$ определяются равенствами

$$\vec{m}(x)=\vec{e}\cos\varphi(x)+\vec{f}\sin\varphi(x),$$
$$\vec{l}(x)=-\vec{e}\sin\varphi(x)+\vec{f}\cos\varphi(x), \tag{6.9}$$
$$\varphi(x)=\varphi-\vec{q}\vec{x}$$

и вектор $\vec{n}$ коллинеарен $\vec{d}$. Начнем с проверки третьего соотношения в (6.6). В силу определения (6.9) векторы $\vec{m}(x)$ и $\vec{l}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\nabla_k m_u(x)=-q_k l_u(x), \qquad \nabla_k l_u(x)=q_k m_u(x).$$

Поэтому

$$\nabla_k Q_{uv}(x)=(Q'-Q)q_k(l_u(x)m_v(x)+l_v(x)m_u(x)). \tag{6.10}$$

С другой стороны, так как

$$\frac{\partial Q_{uv}(x)}{\partial e_\gamma}=Qd_\gamma(d_u m_v(x)+d_v m_u(x))\cos\varphi(x)-Q'd_\gamma(d_u l_v(x)+d_v l_u(x))\sin\varphi(x),$$
$$\frac{\partial Q_{uv}(x)}{\partial f_\gamma}=Qd_\gamma(d_u m_v(x)+d_v m_u(x))\sin\varphi(x)+Q'd_\gamma(d_u l_v(x)+d_v l_u(x))\cos\varphi(x),$$

то

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(e_\beta\frac{\partial Q_{uv}(x)}{\partial e_\gamma}+f_\beta\frac{\partial Q_{uv}(x)}{\partial f_\gamma}\right)=-Ql_\alpha(x)(d_u m_v(x)+d_v m_u(x))+Q'm_\alpha(x)(d_u l_v(x)+d_v l_u(x)). \tag{6.11}$$

Кроме того, в силу (6.8), получим соотношение

$$\varepsilon_{\alpha u\rho}Q_{v\rho}(x)+\varepsilon_{\alpha v\rho}Q_{u\rho}(x)=Q(\varepsilon_{\alpha u\rho}m_v(x)+\varepsilon_{\alpha v\rho}m_u(x))m_\rho(x)+ \tag{6.12}$$
$$+Q'l_\rho(x)(\varepsilon_{\alpha u\rho}l_v(x)+\varepsilon_{\alpha v\rho}l_u(x)).$$

Из соотношений (6.11), (6.12) найдем

$$F^{uv}_\alpha(x)=Q(\varepsilon_{\alpha u\rho}m_v(x)+\varepsilon_{\alpha v\rho}m_u(x))m_\rho(x)+Q'l_\rho(x)(\varepsilon_{\alpha u\rho}l_v(x)+\varepsilon_{\alpha v\rho}l_u(x))- \tag{6.13}$$
$$-Ql_\alpha(x)(d_u m_v(x)+d_v m_u(x))+Q'm_\alpha(x)(d_u l_v(x)+d_v l_u(x)).$$

Пусть разложение вектора $\vec{b}$ по ортонормированному реперу имеет вид (5.26)

$$\vec{b}=\alpha\vec{e}+\beta\vec{f}+\gamma\vec{d}.$$

Нетрудно видеть, что имеют место равенства

$$F^{uv}_\alpha(x)e_\alpha=F^{uv}_\alpha(x)f_\alpha=0,$$
$$F^{uv}_\alpha(x)d_\alpha=(Q'-Q)(l_u(x)m_v(x)+l_v(x)m_u(x)). \tag{6.14}$$

В силу формул (6.10), (6.14), видим, что все три уравнения (6.6) выполняются при $\gamma=0$ и $Q\neq Q'$. Это решение описывает двухосный квадрупольный параметр порядка, причем $\alpha^2+\beta^2=1$ и $\vec{b}=\alpha\vec{e}+\beta\vec{f}$. Если $Q=Q'$, то вектор $\vec{b}$ произволен, и эта ситуация соответствует одноосному квадрупольному параметру порядка.

Заключение

В заключение отметим, что проблема фазовых переходов II рода, обычно рассматриваемая на основе феноменологических подходов, изначально модельно зависима. Представление о ненарушенной и пространственной симметрии состояния равновесия в рамках подхода Гиббса в сочетании с концепцией квазисредних позволяет сформулировать альтернативный подход, свободный от каких-либо модельных предположений. В работе проведена классификация состояний равновесия магнитных сред с векторным и тензорным параметрами порядка. Выяснена допустимая структура параметров порядка в состоянии равновесия и вид генераторов ненарушенной и пространственной симметрии.

Литература

1. Ландау Л.Д. К теории фазовых переходов // Собрание трудов. – М.: Наука – Т.1. 1969. – С.234-261.

2. Mineev V.P. Topologically stable nonhomogeneous states in the ordered medium // Soviet Scientific Reviews, Section A / I.M. Khalatnikov (ed). – 1980. – V.2. – P. 173.

3. Nijhoff F.W., Capel H.W., Breems A. The superfluid phases of helium 3. I // Physica. – 1985. – V. A130. – P.375-381.

4. Barton G., Moore M. Some p-wave phases of superfluid helium-3 in strong-coupling theory // J. Phys. C. – 1974. – V.7. – P.4220-4235.

5. Nijhoff F.W., Capel H.W., Breems A. The superfluid phases of helium 3. I // Physica. – 1986. V. A135. – P. 295; – V. A139. – P. 256-275.

6. Bruder C., Vollhardt D. Symmetry and stationary points of a free energy: The case of superfluid 3He // Phys. Rev. – 1986. – V. B34. – P.131-146.

7. Schakel A. M. J., Bais F.A. A symmetry classification of superfluid ^{3}He phases // J. Phys.: Condensed Matter. – 1989. – V.1. – P.1743-1752.

8. Vollhardt D., Wolfle P. The superfluid phases of helium 3. – London: Taylor and Francis. – 1990. – 620 P.

9. Mermin N.D., Ho T.L. Circulation and Angular Momentum in the A Phase of Superfluid Helium-3 // Phys. Rev. Lett. – 1976. – V.36. – P. 594-597.

10. Боголюбов Н.Н. Квазисредние в задачах статистической механики: препринт ОИЯИ Р-781. – Дубна. – 1961. – С.21.

11. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. – М.: Наука, 1977. – 368 с.

12. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.). Введение в квантовую статистическую механику. – М.: Наука, 1984. – 384 с.

13. Боголюбов Н.Н.(мл.), Ковалевский М.Ю., Курбатов А.М., Пелетминский С.В., Тарасов А.Н. К микроскопической теории сверхтекучей жидкости.//Успехи физических наук. – 1989. – Т. 159. – Вып.4. – С.585-635.

14. Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Статистическая механика квантовых жидкостей с триплетным спариванием // ЭЧАЯ. – 2002. – Т.33. – Вып.6. – С.1357-1445.

15. Ивашин А.П., Ковалевский М.Ю., Чеканова Н.Н. Классификация состояний равновесия сверхтекучей жидкости с d-спариванием // ФНТ. – 2004. – Т.30. – № 9. – С.920-927.

16 Ковалевский М.Ю., Чеканова Н.Н. Параметр порядка и классификация состояний равновесия нематических жидких кристаллов // Вестник Харьк. нац. ун-та № 541: Сер. физическая «Ядро, частицы, поля». – 2001. – Вып.4(16). – С.59-62.

17. Halperin B.I., Hohenberg P.C. Hydrodynamic Theory of Spin Waves // Phys. Rev. – 1969. – V.188. – No.2. – P.898-919.

18. Волков Д. В., Желтухин А.А., Блиох Ю.П. Феноменологический лагранжиан спиновых волн // ФТТ. – 1971. – Т.13. – Вып.6. – С. 1668-1678.

19. Halperin B.I., Saslow W.M. Hydrodynamic theory of spin waves in spin glasses and other systems with noncollinear spin orientations // Phys. Rev. B. – 1977. – 16. – N5. – P. 2154-2162.

20. Андреев А.Ф., Марченко В.И. Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков // УФН. – 1980. – 130. – Вып.1. – С.39-63.

21. Dzyaloshinskii I.E., Volovick G.E. Poisson brackets in condensed matter physics // Ann. Phys. – 1980. – 125. – N 1. – P 67-97.

22. Saslow W.M. Macroscopic spin dynamics of spin-glasses with remanence and anisotropy // Phys. Rev. B. – 1980. – 22. – N 3. – P. 1174-1182.

23. Барьяхтар В.Г. Белых В.Г., Соболева Т.К. К теории фазовых переходов // ТМФ. – 1988. – 77. – № 2. – С. 311-318.

24. Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. К гидродинамической теории магнетиков с полным нарушением симметрии // ТМФ. – 1994. – Т. 100. – №.1. – С.59-71.

25. Kaplan T.A. Some Effects of Anisotropy on Spiral Spin-Configurations with Application to Rare-Earth Metals // Phys. Rev. – 1961. – 124. – N2. – P. 329-339.

26. Барьяхтар В.Г., Савченко М.А., Шишкин. Л.А. К нарушению некоторых свойств инвариантности в фазовых переходах // ФТТ. – 1964. – 6. – Вып.5. – С.1435-1438.

27. Тябликов С.В. Методы квантовой теории магнетизма. – М.: Наука, 1975.

28. Дзялошинский И.Е. Сверхктекучесть некоторых веществ // ЖЭТФ. – 1964. – Т.46. – Вып.4. – С. 1420-1437; Т.47. – Вып.1. – С.336-348.

29. Изюмов Ю.А. Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах.– М.: Энергоатомиздат, 1987.

30. Андреев А.Ф., Грищук И.А. Спиновые нематики // ЖЭТФ. – 1984. – Т.87. – Вып. 2(8). – С.467-475.

31. Островский В.Л. О нелинейной динамике сильноанизотропных магнетиков со спинами s=1 // ЖЭТФ. – 1986. – Т.91. – Вып.5(11). – С.1690-1701.

32. Локтев В.М., Островский В.С. Особенности статики и динамики магнитных диэлектриков с одноионной анизотропией // ФНТ. – 1994. – Т.20. – №10. – С.983-1016.