Прикладная математика & Физика, 2022, том 54, № 4. С. 219–241.

УДК 539.421
MSC 74R10, 74R20
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-219-241

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЖАТИЯМИ

А. Л. Тасевич

(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*)

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Москва, 119333, Россия
Российский университет дружбы народов,
Москва, 117198, Россия

E-mail: atasevich@gmail.com

Аннотация. Статья посвящена исследованию функционально-дифференциального уравнения эллиптического типа, содержащего в старшей части преобразование сжатия аргументов искомой функции, причем по разным переменным сжатие различается. Представлен ряд необходимых и достаточных условий выполнения неравенства типа Гординга, аналога условия сильной эллиптичности, в явном виде. Исследована фредгольмова разрешимость и структура спектра первой краевой задачи в пространствах Соболева. Даны достаточные условия разрешимости уравнения в весовых пространствах Кондратьева на плоскости. В ходе доказательства получены достаточные условия обратимости конечно-разностного оператора с переменными коэффициентами на прямой. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, весовые пространства, функционально-дифференциальные уравнения, оператор взвешенного сдвига

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-00288.

Для цитирования: Тасевич А. Л. 2022. Об одном эллиптическом функционально-дифференциальном уравнении со сжатием. Прикладная математика & Физика, 54(4): 219–241. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-219-241

ON A CLASS OF ELLIPTIC FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONTRACTIONS

Alla Tasevich

(*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev*)

Federal research center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences,
Moscow, 119333, Russia
RUDN University,
Moscow, 117198, Russia
E-mail: atasevich@gmail.com

Received November, 26, 2022

Abstract. The article is devoted to the study of one elliptic-type functional differential equation that contains in its upper part the contraction transformation of unknown function arguments herewith contractions are different for every argument, i.e. contractions are orthotropic. Some necessary and sufficient conditions of strong ellipticity in the terms of the Garding-type inequality fulfilment were presented in explicit form. Thus, a new class of equations satisfying the Kato square root problem was obtained. The first boundary valued problem for the strongly elliptic functional differential equation with contractions was considered in the domain containing the origin — the fixed point of contraction transformation, and star-shaped regarding it. The Fredholm solvability and spectrum structure in the Sobolev spaces were studied. Further the sufficient conditions for solvability of the equation considered in the Kondratiev weighted spaces on the plane were obtained. It is remarkable that the conditions depend on the weight parameter. In the course of the proof, sufficient conditions for the invertibility of a finite-difference operator with variable coefficients on a line are obtained. Some concrete examples illustrating the obtained results were presented.

Key words: Elliptic Equations, Weighted Spaces, Functional Differential Equations, Weighted Shift Operator

Acknowledgements: The work is supported by Russian Foundation of Basic Research, project No. 20-01-00288.

For citation: Tasevich A. 2022. On an elliptic functional differential equation with contractions. Applied Mathematics & Physics, 54(4): 219–241 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-219-241

1. Введение. Первая часть работы посвящена первой краевой задаче

$$A_R u \equiv -\sum_{i,j=1}^{2}(R_{ij}u_{x_i})_{x_j} = f(x_1,x_2), \quad x=(x_1,x_2)\in B, \qquad u|_{\partial B}=0 \tag{1}$$

в ограниченной области $B\subset\mathbb{R}^2$. Здесь

$$R_{ij}v(x_1,x_2) = a_{ij0}v(x_1,x_2) + a_{ij1}v(q^{-1}x_1, px_2) + a_{ij,-1}v(qx_1, p^{-1}x_2),$$

параметры сжатия $p,q>1$, коэффициенты $a_{ij0}, a_{ij,\pm1}\in\mathbb{C}$ $(i,j=1,2)$, а комплекснозначная функция $f(x)$ принадлежит пространству Лебега $L_2(B)$.

Освещается исследование известного неравенства

$$\mathrm{Re}(A_R u,u)_{L_2(B)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(B)} - c_2\|u\|^2_{L_2(B)} \quad (\forall u\in C_0^\infty(B)), \tag{2}$$

называемого неравенством типа Гординга, а также условие коэрцитивности оператора A_R. Если положить $a_{ij,\pm1}=0$, то оператор A_R становится линейным дифференциальным оператором второго порядка с постоянными коэффициентами, и в этом случае оценка (2) равносильна хорошо известному условию сильной эллиптичности:

$$\mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij0}\xi_i\xi_j \geqslant c_1|\xi|^2.$$

Вопрос, связанный с выполнением неравенства (2) для дифференциальных операторов, включая уравнения высокого порядка, системы уравнений и переменные коэффициенты, был решен в работах [4, 22], а для дифференциально-разностных операторов в ограниченных областях, а также в цилиндре — в работе [25, 5, 6]. Функционально-дифференциальные уравнения, содержащие в старшей части сжатия и растяжения аргументов неизвестной функции, рассматривались в работах [10, 11, 12, 13], где предполагалось, что коэффициент сжатия (растяжения) по всем переменным одинаков,

$$v(x_1,x_2)\longmapsto v(qx_1,qx_2). \tag{3}$$

Для такого класса уравнений были получены при постоянных коэффициентах необходимые и достаточные условия в алгебраической форме выполнения неравенства типа Гординга, а при переменных коэффициентах — ряд необходимых условий и достаточных условий.

Хорошо известно, что свойства краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения во многом определяются структурой орбит точек области под действием группы, порожденной присутствующими в уравнении преобразованиями. Для преобразований вида (3) орбиты располагаются на лучах, выходящих из начала координат. Объективная трудность в изучении уравнений со сжатиями (растяжениями), не позволяющая в полной мере воспользоваться существующей теорией нелокальных эллиптических задач, состоит в том, что все орбиты сгущаются в одной точке — начале координат.

У функционально-дифференциальных уравнений, содержащих сжатия по одним переменным и растяжения по другим,

$$v(x_1,x_2)\longmapsto v(q^{-1}x_1,px_2), \tag{4}$$

орбиты лежат на “гиперболах” $|x_1|^{\ln p}|x_2|^{\ln q}=const$, что определяет основное отличие задач с ортотропными сжатиями вида (4) от задач с изотропными сжатиями вида (3).

Показано, что неравенство типа Гординга в случае уравнения (1) сводится к проверке положительной определенности действующего в $L_2(\mathbb{R})$ самосопряженного разностного оператора

$$z(t)\mapsto z(t)+g(t)z(t-1)+\bar{g}(t+1)z(t+1)$$

с гладким коэффициентом $g(t)$, имеющим конечные пределы на $\pm\infty$. В то же время, доказательство однозначной разрешимости задачи (1), дискретности, полуограниченности и секториальной структуры ее спектра в $L_2(B)$ при условии выполнения (2) абсолютно стандартно.

Более того, рассматриваемая задача дополняет класс задач, для которых справедлива известная гипотеза Т. Като о квадратном корне из максимально аккретивного оператора, см. [23], где было показано, что эта гипотеза справедлива для сильно эллиптических дифференциальных операторов в ограниченной области, если коэффициенты операторов и граница области достаточно гладкие. После построения в [24] примера регулярно аккретивного оператора, для которого гипотеза Като не выполняется, дальнейшие исследования были посвящены расширению множества операторов, для которых она верна. Важным шагом стало доказательство гипотезы Като для сильно эллиптических дифференциальных операторов с измеримыми ограниченными коэффициентами [21]. Одновременно и независимо от этой работы для некоторого класса сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов было доказано утверждение, эквивалентное гипотезе Като [20]. В дальнейшем выполнение данной гипотезы для более широких классов сильно эллиптических функционально-дифференциальных операторов было доказано в [1, 18]. В [19] была изучена проблема Като для эллиптических дифференциально-разностных операторов второго порядка с вырождением в ограниченной области.

Во второй половине статьи приведены результаты о разрешимости уравнения из (1) в весовых пространствах $H_0^s\left(\mathbb{R}^2\right)$ $\left(f \in H_0^s\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$ на всей плоскости. Согласно определению В. А. Кондратьева [7], весовым пространством $H_0^s\left(\mathbb{R}^2\right)$ при целом неотрицательном s называется пополнение множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ по норме

$$\|u\|_{H_0^s(\mathbb{R}^2)} = \left(\sum_{|\alpha| \le s} \int\limits_{\mathbb{R}^2} |x|^{2(-s+|\alpha|)} |D^\alpha u(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

В [8, Глава 2, параграф 1] показано, как при помощи преобразования Меллина по радиальной переменной и разложения в тригонометрический ряд Фурье по угловой координате это определение можно распространить на произвольный показатель $s \in \mathbb{R}$.

В. А. Кондратьевым весовые пространства такого типа были предложены для исследования разрешимости эллиптических задач в областях с угловыми или коническими особенностями. Позже оказалось удобным использовать те же пространства и при решении краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений. Это вызвано существованием обобщенных решений, имеющих степенные особенности как на границе, так и внутри области. Наличие таких решений с особенностями в случае дифференциально-разностных уравнений продемонстрировано в [17, 26]. Для функционально-дифференциальных уравнений со сжатием эффект появления особенностей дополнительно связан с наличием в области неподвижной точки преобразования сжатия — начала координат. В [14] установлена разрешимость в шкале весовых пространств функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями, т. е. одинаковыми сжатиями по всем переменным, и показано, как за счет выбора показателей пространства добиться однозначной разрешимости.

Исследование разрешимости в весовом пространстве состоит из трех частей. В первой части исходное уравнение приводится при помощи ряда преобразований к разностному уравнению на прямой

$$v(\tau) + \gamma_1(\tau)v(\tau - h) + \gamma_2(\tau)v(\tau - 2h) = g(\tau), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

которое решается в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Разрешимость уравнений вида (5), содержащих операторы взвешенного сдвига, исследовалась в работах многих авторов, в том числе [2, 3]. Однако необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения вида (5), напрямую выраженные через коэффициенты γ_0, γ_1 и γ_2, не были получены. Исследованию разрешимости разностных уравнений с переменными коэффициентами на прямой посвящена вторая часть работы. В ней показано, что основное влияние на разрешимость оказывают значения коэффициентов γ_0, γ_1 и γ_2 на $\pm\infty$.

В третьей части получены достаточные условия разрешимости в весовых пространствах рассматриваемого уравнения в явном виде. При этом в условиях фигурирует показатель веса, чье изменение имеет существенное влияние. Более подробные доказательства приведенных в статье утверждений можно найти в работах [15, 16, 27].

2. Сильная эллиптичность функционально-дифференциального оператора с ортотропными сжатиями. В работе через $H^1(B)$ обозначается пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(B)$ вместе с обобщенными производными первого порядка, а через $\mathring{H}^1(B)$ — замыкание множества $C_0^\infty(B)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^1(B)$. Пространство $H^1(B)$ – гильбертово со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^1(B)} = \int\limits_B \left(u\bar{v} + u_{x_1}\bar{v}_{x_1} + u_{x_2}\bar{v}_{x_2}\right) dx.$$

Пространство $\mathring{H}^1(B)$ можно отождествлять с подпространством функций из $H^1(\mathbb{R}^2)$, равных нулю вне B.

Зафиксировав числа $p > 1$, $q > 1$, введем ограниченный линейный оператор P в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ по формуле

$$Pu(x_1, x_2) = u(q^{-1}x_1, px_2).$$

Если же оператор P применяется к функциям, заданным в ограниченной области B, то считаем, что последние продолжены нулем вне B.

Легко вычислить, что

$$P^{-1}u(x_1, x_2) = u(qx_1, p^{-1}x_2), \quad P^* = qp^{-1}P^{-1}, \quad Px_1 = q^{-1}x_1P, \quad Px_2 = px_2P,$$

а в образах Фурье оператор P заменяется на P^*,

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} u(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2, \quad \widetilde{Pu}(\xi_1, \xi_2) = P^* u(\xi_1, \xi_2).$$

Спектр $\sigma(P)$ оператора $P : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ лежит на окружности $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \sqrt{q/p}\}$. Можно показать аналогично [10], что $\sigma(P)$ совпадает с указанной окружностью.

Если есть оператор $R = a_0 I + a_1 P + a_{-1} P^{-1}$ с комплексными коэффициентами $a_0, a_\pm 1$, то, обозначив через $\bar{R}$ оператор с комплексно-сопряженными коэффициентами, $\bar{R} = \bar{a}_0 I + \bar{a}_1 P + \bar{a}_{-1} P^{-1}$, получаем, что $\bar{R}$ при преобразовании Фурье переходит в сопряженный оператор R^*.

Неравенство (2) после интегрирования слева по частям и замены переменных $y = tx$, $t > 1$, переходит в неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{2} (R_{ij} v_{y_i}, v_{y_j})_{L_2(tB)} \geqslant c_1 \||\nabla v|\|^2_{L_2(tB)} - (c_2 - c_1) t^{-2} \|v\|^2_{L_2(tB)}, \tag{6}$$

справедливое уже для произвольной функции $v \in C_0^\infty(tB)$, где tB есть исходная область в новых координатах.

Из (6) следует, что для произвольной функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{2} (R_{ij} u_{x_i}, u_{x_j})_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geqslant c_1 \||\nabla u|\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}.$$

В силу плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ в $H^1(\mathbb{R}^2)$ оно распространяется на все функции u из пространства $H^1(\mathbb{R}^2)$. Кроме того, заменяя в этом неравенстве функцию $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ на комплексно-сопряженную функцию $\bar{u}$, приходим к

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{2} (\bar{R}_{ij} u_{x_i}, u_{x_j})_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geqslant c_1 \||\nabla u|\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} \quad (\forall u \in H^1(\mathbb{R}^2)). \tag{7}$$

Применив в (7) преобразование Фурье, по теореме Планшереля получаем эквивалентное неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{2} (R^*_{ij} \xi_i \tilde{u}, \xi_j \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geqslant c_1 \, \||\xi|\tilde{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)},$$

справедливое уже для всех функций $\tilde{u}(\xi)$ из пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$, для которых конечен интеграл справа.

В левой части полученного неравенства введем новые обозначения:

$$2 \operatorname{Re}(R^*_{ii} \xi_i \tilde{u}, \xi_i \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} = (R'_i \xi_i \tilde{u}, \xi_i \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)},$$

где самосопряженные операторы R'_1 и R'_2 определены по формулам

$$R'_1 = R_{11} + R^*_{11} = 2\alpha_{10} I + p\alpha_{11} P + q\bar{\alpha}_{i1} P^{-1},$$

$$R'_2 = R_{22} + R^*_{22} = 2\alpha_{20} I + q^{-1}\alpha_{21} P + p^{-1}\bar{\alpha}_{21} P^{-1} \tag{8}$$

с коэффициентами

$$\alpha_{i0} = \operatorname{Re} a_{ii0} \ (i = 1, 2), \quad \alpha_{11} = p^{-1} a_{111} + q^{-1} \bar{a}_{11,-1}, \quad \alpha_{21} = q a_{221} + p \bar{a}_{22,-1}. \tag{9}$$

Обозначая через

$$R = 2\beta_0 I + \beta_1 P + \bar{\beta}_1 P^{-1} \tag{10}$$

оператор с коэффициентами

$$\beta_0 = \operatorname{Re}(a_{120} + a_{210}), \quad \beta_1 = q a_{121} + q^{-1} \bar{a}_{12,-1} + p^{-1} a_{211} + p \bar{a}_{21,-1}, \tag{11}$$

будем иметь окончательно

$$2 \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{2} (R^*_{ij} \xi_i \tilde{u}, \xi_j \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} = ((\xi_1 R'_1 \xi_1 + \xi_2 R'_2 \xi_2 + R \xi_1 \xi_2) \tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)}.$$

Далее все условия будут выражаться через коэффициенты α_{i0}, α_{i1}, β_0 и β_1.

Замечание 2.1. *Отметим, что функции, обращающиеся в ноль во всех четвертях плоскости $\mathbb{R}^2_\xi$, кроме одной, образуют инвариантное подпространство для функциональных операторов рассматриваемого класса. Поэтому достаточно проверить два неравенства*

$$((\xi_1 R_1'\xi_1 + \xi_2 R_2'\xi_2 \pm R\xi_1\xi_2)\tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(Q)} \geqslant 2c_1\, \| |\xi|\tilde{u}\|^2_{L_2(Q)}$$

лишь на функциях $\tilde{u}$ с носителями в первой четверти $Q = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 > 0, \xi_2 > 0\}$.

Сформулируем промежуточный результат.

Лемма 2.1. *Пусть область B содержит начало координат. Тогда неравенство* (2) *равносильно двум неравенствам*

$$((\xi_1 R_1'\xi_1 + \xi_2 R_2'\xi_2 \pm R\xi_1\xi_2)\tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(Q)} \geqslant 2c_1\, \| |\xi|\tilde{u}\|^2_{L_2(Q)} \tag{12}$$

на классе всех функций $\tilde{u} \in L_2(Q)$, для которых сходится стоящий справа в (12) *интеграл, а операторы R_1', R_2' и R заданы формулами* (8)–(11).

Далее, основываясь на структуре орбит точек области под действием оператора ортотропного сжатия, введем новые координаты таким образом, что действие оператора будет проводиться вдоль новой координатной оси. Положим,

$$s_1 = \frac{2\ln q}{\ln pq}, \quad s_2 = \frac{2\ln p}{\ln pq} \quad (s_1 + s_2 = 2), \tag{13}$$

сделаем в интегралах из неравенства (12) замену переменных

$$\xi_1 = \rho t^{s_1}, \quad \xi_2 = \rho t^{-s_2}, \tag{14}$$

$$\rho = \sqrt{\xi_1^{s_2}\xi_2^{s_1}}, \quad t = \sqrt{\xi_1/\xi_2}, \tag{15}$$

диффеоморфно отбражающую первую четверть Q на себя.

Якобиан такой замены равен

$$\begin{vmatrix} \partial\xi_1/\partial t & \partial\xi_1/\partial\rho \\ \partial\xi_2/\partial t & \partial\xi_2/\partial\rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1\rho t^{s_1-1} & t^{s_1} \\ -s_2\rho t^{-s_2-1} & t^{-s_2} \end{vmatrix} = 2\rho t^{s_1-s_2-1}.$$

Если

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{u}(\rho t^{s_1}, \rho t^{-s_2}) = v(\rho, t) = v\left(\sqrt{\xi_1^{s_2}\xi_2^{s_1}}, \sqrt{\xi_1/\xi_2}\right),$$

то

$$P\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{u}(q^{-1}\xi_1, p\xi_2) = v\left(\sqrt{(q^{-1}\xi_1)^{s_2}(p\xi_2)^{s_1}}, \sqrt{(q^{-1}\xi_1)/(p\xi_2)}\right) = v(\rho, (pq)^{-1/2}t),$$

поскольку $p^{s_1/2}q^{-s_2/2} = 1$. Таким образом, оператор P в новых переменных есть оператор сжатия (растяжения) по t, $t > 0$. Положим, $t = e^\tau$ $(-\infty < \tau < +\infty)$ и $v(\rho, t) = v(\rho, e^\tau) = w(\rho, \tau) = w(\rho, \ln t)$. Тогда $dt/t = d\tau$ и

$$Pv(\rho, t) = v(\rho, (pq)^{-1/2}t) = w(\rho, \ln((pq)^{-1/2}t)) = w(\rho, \tau - \ln\sqrt{pq}),$$

т. е. в результате сделанных преобразований оператор P превращается в оператор сдвига T на прямой,

$$Tw(\rho, \tau) = w(\rho, \tau - \ln\sqrt{pq}), \quad T^{-1}w(\rho, \tau) = w(\rho, \tau + \ln\sqrt{pq})$$

(переменная $\rho > 0$ в данном случае является параметром). Введя обозначения

$$h_1 = \frac{1}{2}(3s_1 - s_2), \quad h_2 = \frac{1}{2}(s_1 - 3s_2), \quad h = \frac{h_1 + h_2}{2} = s_1 - s_2 \quad (h_2 < h < h_1),$$

перепишем

$$t^{2s_1 - s_2}R_1' t^{s_1} = e^{h_1\tau}e^{h\tau/2}\left(2\alpha_{10}I + p\alpha_{11}T + q\bar{\alpha}_{11}T^{-1}\right)e^{-h\tau/2}e^{h_1\tau} =$$

$$= e^{h_1\tau}\left(2\alpha_{10}I + (pq)^{1/2}\alpha_{11}T + (pq)^{1/2}\bar{\alpha}_{11}T^{-1}\right)e^{h_1\tau} = e^{h_1\tau}R_1e^{h_1\tau},$$

$$t^{s_1 - 2s_2}R_2' t^{-s_2} = e^{h_2\tau}e^{h\tau/2}\left(2\alpha_{20}I + q^{-1}\alpha_{21}T + p^{-1}\bar{\alpha}_{21}T^{-1}\right)e^{-h\tau/2}e^{h_2\tau} =$$

$$= e^{h_2\tau}\left(2\alpha_{20}I + (pq)^{-1/2}\alpha_{21}T + (pq)^{-1/2}\bar{\alpha}_{21}T^{-1}\right)e^{h_2\tau} = e^{h_2\tau}R_2e^{h_2\tau},$$

$$t^{s_1 - s_2}Rt^{s_1 - s_2} = e^{h\tau}Re^{h\tau},$$

где теперь R_1, R_2 и R представляют собой самосопряженные разностные операторы

$$R_1 = 2\alpha_{10}I + (pq)^{1/2}\alpha_{11}T + (pq)^{1/2}\bar{\alpha}_{11}T^{-1}, \quad R_2 = 2\alpha_{20}I + (pq)^{-1/2}\alpha_{21}T + (pq)^{-1/2}\bar{\alpha}_{21}T^{-1},$$

$$R = 2\beta_0 I + \beta_1 T + \bar{\beta}_1 T^{-1}, \tag{16}$$

а коэффициенты по-прежнему задаются формулами (9), (11).

Итак, неравенства (12) заменяются неравенствами

$$\int_0^{+\infty} \rho^3 d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{h_1\tau} R_1 e^{h_1\tau} + e^{h_2\tau} R_2 e^{h_2\tau} \pm e^{h\tau} R e^{h\tau}\right) w\,\bar{w}\,dt \geqslant 2c_1 \int_0^{+\infty} \rho^3 d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{2h_1\tau} + e^{2h_2\tau}\right) |w|^2 dt. \tag{17}$$

где $w(\rho, \tau)$ пробегает множество всех измеримых в полуплоскости $\{(\rho, \tau) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0\}$ функций, для которых конечен интеграл

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho e^{h\tau} + \rho^3 (e^{2h_1\tau} + e^{2h_2\tau})) |w(\rho, \tau)|^2 \, d\tau d\rho.$$

Для выполнения (17) необходимо и достаточно, чтобы для внутреннего интеграла имела место соответствующая оценка

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{h_1\tau} R_1 e^{h_1\tau} + e^{h_2\tau} R_2 e^{h_2\tau} \pm e^{h\tau} R e^{h\tau}\right) w(\tau)\,\bar{w}(\tau)\,dt \geqslant 2c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{2h_1\tau} + e^{2h_2\tau}\right) |w(\tau)|^2 dt \tag{18}$$

на множестве всех функций $w(\tau)$ на прямой, для которых конечен интеграл в правой части (18). Достаточность очевидна, а чтобы показать необходимость, предположим, что для некоторой функции w_0 из указанного класса выполняется противоположное неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{h_1\tau} R_1 e^{h_1\tau} + e^{h_2\tau} R_2 e^{h_2\tau} + e^{h\tau} R e^{h\tau}\right) w_0(\tau)\,\bar{w}_0(\tau)\,dt < 2c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{2h_1\tau} + e^{2h_2\tau}\right) |w_0(\tau)|^2 dt$$

(со знаком + перед R для определенности). Рассмотрим тогда функцию

$$w(\rho, \tau) = \begin{cases} w_0(\tau), & 0 < \rho < 1, \\ 0, & \rho > 1. \end{cases}$$

Она принадлежит нужному пространству, поскольку $2h_1 < h < 2h_2$, и для нее неравенство (17) нарушено.

После введения обозначения $z(\tau) = e^{h\tau} w(\tau)$ оценка (18) принимает более удобный вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\tau} R_1 e^{\tau} + e^{-\tau} R_2 e^{-\tau} \pm R)\, z(\tau)\,\bar{z}(\tau)\,dt \geqslant 2c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{2\tau} + e^{-2\tau}\right) |z(\tau)|^2 dt \tag{19}$$

(заметим, что $(h_1 - h_2)/2 = 1$). Доказана

Лемма 2.2. *Пусть область B содержит начало координат. Тогда неравенство* (2) *равносильно двум неравенствам* (19) *на множестве всех функций $z(\tau)$ таких, что функции $e^{|\tau|} z(\tau)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R})$. Операторы R_1, R_2 и R заданы формулами* (16) *и* (9), (11).

Следствие 2.1. *Если выполнено неравенство* (2), *а B содержит начало координат, то разностные операторы $R_1, R_2 : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ положительно определены, или, что то же самое, $\alpha_{10} > (pq)^{1/2} |\alpha_{11}|$ и $\alpha_{20} > (pq)^{-1/2} |\alpha_{21}|$.*

Подставим в (19) вместо функции $z(\tau)$ функцию $z(\tau)/\operatorname{ch}\tau$, где теперь $z(\tau)$ пробегает все пространство $L_2(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{\tau}}{\operatorname{ch}\tau} R_1 \frac{e^{\tau}}{\operatorname{ch}\tau} + \frac{e^{-\tau}}{\operatorname{ch}\tau} R_2 \frac{e^{-\tau}}{\operatorname{ch}\tau} \pm \frac{1}{\operatorname{ch}\tau} R \frac{1}{\operatorname{ch}\tau}\right) z(\tau)\,\bar{z}(\tau)\,dt \geqslant 4c_1 \|z\|^2_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{20}$$

Таким образом, стоящий в скобках разностный оператор положительно определен. Приводя в нем подобные члены, видим, что он равен

$$\frac{g_0^{\pm}(\tau)}{\operatorname{ch}^2\tau} I + \frac{g_1^{\pm}(\tau)}{\operatorname{ch}\tau \operatorname{ch}(\tau - \ln\sqrt{pq})} T + T^{-1} \frac{\bar{g}_1^{\pm}(\tau)}{\operatorname{ch}\tau \operatorname{ch}(\tau - \ln\sqrt{pq})},$$

где

$$g_0^{\pm}(\tau) = 2(\alpha_{10} e^{2\tau} + \alpha_{20} e^{-2\tau} \pm \beta_0), \quad g_1^{\pm}(\tau) = \alpha_{11} e^{2\tau} + \alpha_{21} e^{-2\tau} \pm \beta_1.$$

На функциях, носитель которых лежит на отрезке длины $\ln\sqrt{pq}$, неравенство (20) превращается в

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_0^{\pm}(\tau)}{\operatorname{ch}^2\tau}|z(\tau)|^2\,dt \geqslant 4c_1\|z\|^2_{L_2(\mathbb{R})},$$

откуда немедленно следует положительность функций $g_0^{\pm}(\tau)$, т. е. $\beta_0^2 < \alpha_{10}\alpha_{20}$. Но тогда рассматриваемый разностный оператор можно представить в виде

$$\frac{\sqrt{g_0^{\pm}(\tau)}}{\operatorname{ch}\tau}\left[I + g^{\pm}(\tau)T + T^{-1}\bar{g}^{\pm}(\tau)\right]\frac{\sqrt{g_0^{\pm}(\tau)}}{\operatorname{ch}\tau}$$

(см. формулу (22)).

Сформулируем основную теорему о выполнении неравенства Гординга.

Теорема 2.1. *Пусть область B содержит начало координат. Неравенство* (2) *выполнено тогда и только тогда, когда* $\beta_0^2 < \alpha_{10}\alpha_{20}$ *и самосопряженные разностные операторы*

$$I + g^{\pm}(\tau)T + T^{-1}\bar{g}^{\pm}(\tau) : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}), \tag{21}$$

где

$$g^{\pm}(\tau) = \frac{\alpha_{11}e^{2\tau} + \alpha_{21}e^{-2\tau} \pm \beta_1}{2\sqrt{(\alpha_{10}e^{2\tau} + \alpha_{20}e^{-2\tau} \pm \beta_0)((pq)^{-1}\alpha_{10}e^{2\tau} + pq\alpha_{20}e^{-2\tau} \pm \beta_0)}} \tag{22}$$

положительно определены.

Итак, вопрос о выполнении неравенства типа Гординга сведен к вопросу о положительной определенности самосопряженного разностного оператора (21) на прямой с гладким стабилизирующимся на бесконечности коэффициентом $g^{\pm}(\tau)$.

При получении следующих ниже достаточных условий положительной определенности операторов (21) использован подход, предложенный в работе [13].

Лемма 2.3. *Если существуют такие положительные числа* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *и такая измеримая вещественная функция* $\delta(\tau)$, *что при почти всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *выполнены условия*

$$\delta(\tau) \geqslant \varepsilon_1, \quad |g^{\pm}(\tau)|^2 \leqslant \delta(\tau - \ln\sqrt{pq})[1 - \delta(\tau) - \varepsilon_2], \tag{23}$$

то разностные операторы (21) *положительно определены.*

Доказательство леммы см. в [15].

Легко проверяется, что условие

$$|g^{\pm}(\tau)| < 1 \quad (\tau \in \mathbb{R})$$

является необходимым для положительной определенности оператора (21). Очевидное достаточное условие

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} |g^{\pm}(\tau)| < 1/2 \tag{24}$$

получается, если положить $\delta(\tau) \equiv 1/2$ в лемме 2.3.

Приведем сейчас еще одно, более тонкое, нежели (24), достаточное условие, основанное на применении леммы 2.3.

Следствие 2.2. *Пусть*

$$\varkappa = \sup_{\tau\in\mathbb{R}}\left(|g^{\pm}(\tau)| + |g^{\pm}(\tau + \ln\sqrt{pq})|\right) < 1. \tag{25}$$

Тогда разностные операторы (21) *положительно определены.*

Пример 2.1. *Рассмотрим уравнение*

$$-\Delta u + a u_{x_1x_2}(q^{-1}x_1, px_2) + \bar{b}u_{x_1x_2}(qx_1, p^{-1}x_2) = f.$$

Выпишем условия на коэффициенты $a, b \in \mathbb{C}$, *гарантирующие выполнение неравенства* (2).

В исходных обозначениях имеем $a_{110} = a_{220} = 1$,

$$a_{111} = a_{11,-1} = a_{221} = a_{22,-1} = a_{120} = a_{210} = 0.$$

Можно считать, что $a_{121} = a/p$, $a_{12,-1} = pb$, *в то время как* $a_{211} = a_{21,-1} = 0$. *Тогда* $\alpha_{11} = \alpha_{21} = 0$, $\alpha_{10} = \alpha_{20} = 1$, $\beta_0 = 0$ *и, таким образом,*

$$g^{\pm}(\tau) = \frac{\pm\beta_1}{2\sqrt{\operatorname{ch}2\tau\,\operatorname{ch}(2\tau - \ln pq)}},$$

где $\beta_1 = qa/p + pb/q$.

При $\tau = (\ln pq)/4$ знаменатель этой дроби достигает своего минимума, равного $(pq+1)/\sqrt{pq}$. Поэтому наибольшее значение функции $|g^{\pm}(\tau)|$ равно $|\beta_1|\sqrt{pq}/(pq+1)$, и (24) в данном случае означает, что

$$|\beta_1| < \frac{pq+1}{2\sqrt{pq}},$$

т. е.

$$\left|q^2a + p^2b\right| < (pq+1)\sqrt{pq}/2.$$

Чтобы воспользоваться следствием 2.2., нужно найти наибольшее значение функции

$$|g^{\pm}(\tau)| + |g^{\pm}(\tau+\ln\sqrt{pq})| = \frac{|\beta_1|}{2\sqrt{\operatorname{ch}2\tau\operatorname{ch}(2\tau-\ln pq)}} + \frac{|\beta_1|}{2\sqrt{\operatorname{ch}2\tau\operatorname{ch}(2\tau+\ln pq)}} =$$

$$= \frac{|\beta_1|}{\sqrt{2(\operatorname{ch}(4\tau-\ln pq)+\operatorname{ch}\ln pq)}} + \frac{|\beta_1|}{\sqrt{2(\operatorname{ch}(4\tau+\ln pq)+\operatorname{ch}\ln pq)}}.$$

3. Разрешимость первой краевой задачи для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями. Будем рассматривать задачу (1) в предположении выполнения неравенства (2). Уравнение тогда принято называть сильно эллиптическим. При этом из рассуждений предыдущего пункта видно, что неравенство (2) выполняется для рассматриваемого уравнения при постоянной c_2, равной нулю. Будем считать также область B ограниченной.

С задачей (1) свяжем непрерывную на пространстве $\mathring{H}^1(B)$ полуторалинейную форму

$$a_R[u,v] = \sum_{i,j=1}^{2}(R_{ij}u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(B)} \quad (u,v\in\mathring{H}^1(B)).$$

Очевидно, существует постоянная $M>0$ такая, что

$$|a_R[u,v]| \leqslant M\|u\|_{H^1(B)}\|v\|_{H^1(B)} \quad (u,v\in\mathring{H}^1(B)). \tag{26}$$

Кроме того, неравенство (2), левая часть которого совпадает на гладких финитных функциях с $\operatorname{Re}a_R[u,u]$, обеспечивает оценку

$$\operatorname{Re}a_R[u,u] \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(B)} \quad (u\in\mathring{H}^1(B)) \tag{27}$$

на всем пространстве $\mathring{H}^1(B)$.

Функция $u\in\mathring{H}^1(B)$ называется обобщенным решением задачи (1), если интегральное тождество

$$a_R[u,v] = (f,v)_{L_2(B)}$$

выполнено для любой функции $v\in\mathring{H}^1(B)$.

Будем рассматривать также неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)\subset L_2(B)\to L_2(B),$$

область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ которого состоит из всевозможных обобщенных решений задачи (1), когда f пробегает все пространство $L_2(B)$. Если u — обобщенное решение, отвечающее правой части f, то полагаем $\mathcal{A}_Ru=f$ (оператор $\mathcal{A}_R$, очевидно, корректно определен на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$). Понятно, что $C_0^\infty(B)\subset\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)\subset\mathring{H}^1(B)$ и $\mathcal{A}_Ru = A_Ru$, если $u\in C_0^\infty(B)$.

Рассуждения этого пункта хорошо известны, они носят достаточно общий характер и опираются на неравенство (2), позволяющее ввести в пространстве $\mathring{H}^1(B)$ связанное с оператором в уравнении эквивалентное скалярное произведение.

Лемма 3.1. *Формула*

$$(u,v)'_{\mathring{H}^1(B)} = \frac{1}{2}\left(a_R[u,v] + \overline{a_R[v,u]}\right) \tag{28}$$

задает эквивалентное скалярное произведение на пространстве $\mathring{H}^1(B)$.

Лемма 3.2. *Существует (единственный) линейный ограниченный оператор*

$$K : \mathring{H}^1(B)\to\mathring{H}^1(B)$$

такой, что

$$(u,Kv)'_{\mathring{H}^1(B)} = \frac{1}{2i}\left(a_R[u,v] - \overline{a_R[v,u]}\right) \tag{29}$$

для всех $u, v \in \overset{\circ}{H}{}^1(B)$. При этом оператор K является самосопряженным,

$$(Ku, v)'_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)} = (u, Kv)'_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)},$$

и $\|K\|' \leqslant M/c_1$, где M и c_1 — постоянные из неравенств (26) и (27), а $\|.\|'$ обозначает операторную норму, отвечающую норме $\|.\|'_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)}$.

Теорема 3.1. *Для любой функции $f \in L_2(B)$ задача (1) имеет единственное обобщенное решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(B)$, причем $\|u\|'_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)} \leqslant (1/\sqrt{c_1})\|f\|_{L_2(B)}$.*

Спектр $\sigma(\mathcal{A}_R)$ оператора $\mathcal{A}_R$ дискретный и содержится во множестве

$$\sigma(\mathcal{A}_R) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0,\ |\arg\lambda| \leqslant \operatorname{arctg}(M/c_1)\}.$$

Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\lambda I - \mathcal{A}_R : L_2(B) \to L_2(B)$ фредгольмов. Если $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_R)$, то резольвента $(\lambda I - \mathcal{A}_R)^{-1}$ есть компактный оператор в $L_2(B)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{A}_R u = f, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R),\ f \in L_2(B).$$

По определению, $a_R[u, v] = (f, v)_{L_2(B)}$, или

$$\frac{1}{2}\left(a_R[u, v] + \overline{a_R[v, u]}\right) + i\,\frac{1}{2i}\left(a_R[u, v] - \overline{a_R[v, u]}\right) = (f, v)_{L_2(B)}$$

для всех $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(B)$. В силу лемм 3.1. и 3.2. последнее соотношение можно переписать следующим образом:

$$(u, v)'_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)} + i(Ku, v)'_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)} = (f, v)_{L_2(B)}. \tag{30}$$

Правая часть этого равенства является непрерывным антилинейным функционалом относительно v на пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(B)$ и по теореме Рисса порождает ограниченный линейный оператор $\Lambda : L_2(B) \to \overset{\circ}{H}{}^1(B)$ такой, что

$$(\Lambda f, v)'_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)} = (f, v)_{L_2(B)}, \quad v \in \overset{\circ}{H}{}^1(B).$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $(I + iK)u = F$ в $\overset{\circ}{H}{}^1(B)$ с правой частью $F = \Lambda f$. Поскольку оператор iK кососимметрический, его спектр лежит на мнимой оси, и существует ограниченный обратный оператор

$$(I + iK)^{-1} : \overset{\circ}{H}{}^1(B) \to \overset{\circ}{H}{}^1(B),$$

т. е. уравнение имеет единственное решение

$$u = (I + iK)^{-1}F = (I + iK)^{-1}\Lambda f.$$

Чтобы оценить норму этого решения, подставим в (30) $v = u$. Будем иметь

$$\|u\|'^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)} + i(Ku, u)'_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)} = (f, u)_{L_2(B)},$$

откуда с учетом вещественности $(Ku, u)'_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)}$ получаем оценку

$$\|u\|'^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)} \leqslant |(f, u)_{L_2(B)}| \leqslant \|f\|_{L_2(B)}\|u\|_{L_2(B)}.$$

Поскольку

$$\|u\|'^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)} = \operatorname{Re} a_R[u, u] + c_2\|u\|^2_{L_2(B)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(B)} \geqslant c_1\|u\|^2_{L_2(B)},$$

выводим $\|u\|'_{\overset{\circ}{H}{}^1(B)} \leqslant (1/\sqrt{c_1})\|f\|_{L_2(B)}$.

Итак, точка $\lambda = 0$ является резольвентной точкой оператора $\mathcal{A}_R$, и оператор $\mathcal{A}_R^{-1}$ компактен в силу компактного вложения $\overset{\circ}{H}{}^1(B)$ в $L_2(B)$. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}_R$ имеет дискретный спектр, т. е. спектр, состоящий из изолированных собственных значений конечной кратности. Чтобы в этом убедиться, достаточно записать оператор $\lambda I - \mathcal{A}_R$ для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ в виде

$$\lambda I - \mathcal{A}_R = -\left(I - \lambda\mathcal{A}_R^{-1}\right)\mathcal{A}_R,$$

сводящем вопрос о разрешимости к уравнению с оператором „тождественный плюс компактный“. Из этого представления очевидным образом вытекает и фредгольмовость оператора $\lambda I - \mathcal{A}_R$.

Убедимся теперь, что все собственные значения лежат в угле, охватывающем положительную вещественную полуось. Пусть $\mathcal{A}_R u = \lambda u$ при ненулевой функции $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$, которую можно нормировать: $\|u\|'_{\mathring{H}^1(B)} = 1$. Имеем

$$(u, v)'_{\mathring{H}^1(B)} + i(Ku, v)'_{\mathring{H}^1(B)} = \lambda(\Lambda u, v)'_{\mathring{H}^1(B)} \quad (v \in \mathring{H}^1(B)).$$

Полагая теперь $v = u$, будем иметь

$$1 + i(Ku, u)'_{\mathring{H}^1(B)} = \mu(\Lambda u, u)'_{\mathring{H}^1(B)} + i\nu(\Lambda u, u)'_{\mathring{H}^1(B)}, \tag{31}$$

где μ и ν обозначают действительную и мнимую части числа λ.

Отметим, что сужение оператора Λ на пространство $\mathring{H}^1(B)$ (будем обозначать это сужение Λ_0) является положительным и компактным оператором в $\mathring{H}^1(B)$. Действительно, по определению,

$$(\Lambda_0 u, u)'_{\mathring{H}^1(B)} = \|u\|^2_{L_2(B)} > 0, \ u \neq 0,$$

а компактность Λ_0 следует из компактности вложения $\mathring{H}^1(B)$ в $L_2(B)$. Приравняем действительные и мнимые части равенства (31):

$$1 = \mu(\Lambda_0 u, u)'_{\mathring{H}^1(B)}, \quad (Ku, u)'_{\mathring{H}^1(B)} = \nu(\Lambda_0 u, u)'_{\mathring{H}^1(B)}.$$

Отсюда следует, что действительная и мнимая части собственного значения удовлетворяют соотношениям

$$\mu > 0, \quad \frac{\nu}{\mu} = (Ku, u)'_{\mathring{H}^1(B)}.$$

Поскольку u лежит на единичной сфере, имеем $\left|(Ku, u)'_{\mathring{H}^1(B)}\right| \leqslant \|K\|'$. Из леммы 3.2. выводим $|\nu|/\mu \leqslant M/c_1$. Теорема доказана.

4. Функционально-дифференциальное уравнение с ортотропными сжатиями в весовых пространствах. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение на всей плоскости

$$A_R u(x_1, x_2) = -\sum_{i,j=1}^{2} \left(R_{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} = f(x_1, x_2), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{32}$$

Проведем преобразования, переводящие исходное уравнение (32) в разностное уравнение вида (5) с переменными коэффициентами на прямой.

Замечание 4.1. *Обратим внимание на орбиты точек плоскости под действием оператора P. Если точка не лежит на координатных осях, то ее орбита лежит на одной из линий*

$$|x_1|^{\ln p}|x_2|^{\ln q} = \mathrm{const}.$$

При этом точка не покидает "свою" координатную четверть. Таким образом, функции, обращающиеся в нуль во всех четвертях плоскости $\mathbb{R}^2$, кроме одной, образуют инвариантное подпространство для оператора P. Координатные оси и начало координат являются, соответственно, неподвижными прямыми и неподвижной точкой преобразования ортотропного сжатия.

Применим преобразование Фурье к уравнению (32):

$$\begin{gathered}\left(a_{110}\tilde{u} + a_{111}q^2p^{-1}P^{-1}\tilde{u} + a_{11,-1}pq^{-2}P\tilde{u}\right)\xi_1^2 + \\ \left((a_{120} + a_{210})\tilde{u} + (a_{121}q + a_{211}p^{-1})qp^{-1}P^{-1}\tilde{u} + (a_{12,-1}q^{-1} + a_{21,-1}p)pq^{-1}P\tilde{u}\right)\xi_1\xi_2 + \\ \left(a_{220}\tilde{u} + a_{221}qp^{-2}P^{-1}\tilde{u} + a_{22,-1}p^2q^{-1}P\tilde{u}\right)\xi_2^2 = \tilde{f}.\end{gathered} \tag{33}$$

Поскольку преобразование Фурье, как известно [8, Глава 2, параграф 2], продолжается до изоморфизма

$$F_s : H_0^s\left(\mathbb{R}^2\right) \to H_s^0\left(\mathbb{R}^2\right), \quad s \notin \mathbb{Z},$$

функция $\tilde{f} = F[f]$ принадлежит весовому пространству $H_s^0\left(\mathbb{R}^2\right)$, определенному, в свою очередь, как пополнение множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ по норме

$$\|\tilde{f}\|_{H_s^0(\mathbb{R}^2)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s}|\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}. \tag{34}$$

В силу замечания 4.1., уравнение (33) на всей плоскости $\mathbb{R}^2_\xi$ распадается на четыре независимых уравнения в каждой из четвертей. Заменой ξ_1 (ξ_2) на $-\xi_1$ ($-\xi_2$) можно свести каждое из этих уравнений к уравнениям в первой четверти $\mathbb{R}^2_I = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 > 0, \xi > 0\}$:

$$\begin{gathered}\left(a_{110}\tilde{u} + a_{111}q^2p^{-1}P^{-1}\tilde{u} + a_{11,-1}pq^{-2}P\tilde{u}\right)\xi_1^2 \pm \\ \left((a_{120} + a_{210})\tilde{u} + (a_{121}q + a_{211}p^{-1})qp^{-1}P^{-1}\tilde{u} + (a_{12,-1}q^{-1} + a_{21,-1}p)pq^{-1}P\tilde{u}\right)\xi_1\xi_2 + \\ \left(a_{220}\tilde{u} + a_{221}qp^{-2}P^{-1}\tilde{u} + a_{22,-1}p^2q^{-1}P\tilde{u}\right)\xi_2^2 = \tilde{f}.\end{gathered} \tag{35}$$

Проведем замены переменных (13)-(15). Переобозначая функцию в правой части

$$\tilde{f}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{f}(\rho t^{s_1}, \rho t^{-s_2}) = \hat{f}(\rho, t)$$

и сохраняя для оператора сжатия прежнее обозначение, перепишем уравнение (33)

$$\begin{gathered}\left(a_{110}\hat{u} + a_{111}q^2p^{-1}P^{-1}\hat{u} + a_{11,-1}pq^{-2}P\hat{u}\right)\rho^2 t^{2s_1} + \\ \left((a_{120} + a_{210})\hat{u} + (a_{121}q + a_{211}p^{-1})qp^{-1}P^{-1}\hat{u} + (a_{12,-1}q^{-1} + a_{21,-1}p)pq^{-1}P\hat{u}\right)\rho^2 t^{s_1-s_2} + \\ \left(a_{220}\hat{u} + a_{221}qp^{-2}P^{-1}\hat{u} + a_{22,-1}p^2q^{-1}P\hat{u}\right)\rho^2 t^{-2s_2} = \hat{f}.\end{gathered}$$

Перепишем норму весового пространства (34)

$$\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} 2\rho^{2s+1}t^{s_1-s_2-1}\left(t^{2s_1} + t^{-2s_2}\right)^s |\hat{u}(\rho, t)|^2 d\rho dt\right)^{1/2}. \tag{36}$$

Перейдем к операторам сдвига T по переменной $\tau \in \mathbb{R}$, $t = e^\tau$, повторяя рассуждения пункта 2.

Определение 4.1. *Через K^s обозначим множество измеримых в $\mathbb{R}^2_+ = \{(\rho, \tau) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0\}$ функций, для которых конечен интеграл*

$$\|g\|_{K^s} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} 2\rho^{2s+1}e^{\tau(s_1-l_2)}\left(e^{2s_1\tau} + e^{-2s_2\tau}\right)^s |g(\rho, \tau)|^2 d\rho d\tau\right)^{1/2}. \tag{37}$$

Замечание 4.2. *Норма* (37) *получена в результате логарифмической замены из* (36)*, т. е. имеет место равенство* $\|\tilde{f}\|_{H^0_s(\mathbb{R}^2_I)} = \|g\|_{K^s}$.

Далее для краткости будем использовать обозначения $l = \ln\sqrt{pq}$, $e(\tau) = e^{2s_1\tau} + e^{-2s_2\tau}$, а также

$$\begin{gathered}\theta_{-1}(\tau) = a_{111}q^2p^{-1}e^{2s_1\tau} \pm \left(a_{121}q + a_{211}p^{-1}\right)qp^{-1}e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{221}qp^{-2}e^{-2s_2\tau}, \\ \theta_0(\tau) = a_{110}e^{2s_1\tau} \pm (a_{120} + a_{210})\, e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{220}e^{-2s_2\tau}, \\ \theta_1(\tau) = a_{11,-1}pq^{-2}e^{2s_1\tau} \pm \left(a_{12,-1}q^{-1} + a_{21,-1}p\right)pq^{-1}e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{22,-1}p^2q^{-1}e^{-2s_2\tau}.\end{gathered}$$

Сформулируем промежуточный результат.

Лемма 4.1. *Уравнение* (32) *имеет единственное решение $u \in H^{s+2}_0(\mathbb{R}^2)$ при любой функции $f \in H^s_0(\mathbb{R}^2)$, $s \notin \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда уравнение*

$$\rho^2\left(\theta_0(\tau)w(\rho, \tau) + \theta_{-1}(\tau)T^{-1}w(\rho, \tau) + \theta_1(\tau)Tw(\rho, \tau)\right) = g(\rho, \tau) \tag{38}$$

имеет единственное решение $w \in K^{s+2}$ при любой функции $g \in K^s$.

Можно переписать уравнение (38) следующим образом

$$\begin{gathered}\left[\gamma_0(\tau)I + \gamma_1(\tau)T + \gamma_2(\tau)T^2\right]\left(e^{\tau(s_1-s_2)/2}\,(e(\tau))^{s/2+1}\,w(\rho, \tau)\right) = \\ \rho^{-2}e^{\tau(s_1-s_2)/2}\,(e(\tau))^{s/2+1}\,\frac{g(\rho, \tau - l)}{e(\tau - l)},\end{gathered}$$

где

$$\gamma_0(\tau) = \frac{\theta_{-1}(\tau - l)}{e(\tau - l)}, \quad \gamma_1(\tau) = \frac{\theta_0(\tau - l)\sqrt{q/p}\,e^{s/2+1}(\tau)}{e^{s/2+2}(\tau - l)}, \quad \gamma_2(\tau) = \frac{\theta_1(\tau - l)(q/p)e^{s/2+1}(\tau)}{e(\tau - l)e^{s/2+1}(\tau - 2l)}.$$

Обратим внимание на то, что принадлежность функций $w(\rho, \tau)$ и $g(\rho, \tau)$ пространствам K^{s+2} и K^s, соответственно, означает, что при почти всех $\rho > 0$ функции

$$e^{\tau(s_1-s_2)/2}\,(e(\tau))^{s/2+1}\,w(\rho, \tau), \quad \rho^{-2}e^{\tau(s_1-s_2)/2}\,(e(\tau))^{s/2+1}\,(e(\tau - l))^{-1}\,g(\rho, \tau - l)$$

являются элементами пространства $L_2(\mathbb{R})$ как функции переменного τ.

Учитывая, что коэффициенты $\gamma_i,\ i = 0, 1, 2$, зависят только от τ, вопрос о разрешимости уравнения (38) сводится к вопросу об обратимости оператора

$$B_0 = \gamma_0 I + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}).$$

Обратим внимание на то, что получившиеся коэффициенты $\gamma_i,\ i = 0, 1, 2$, стабилизируются на бесконечности, т. е. существуют конечные пределы

$$\lim_{\tau\to+\infty} \gamma_0(\tau) = a_{111}\frac{q^2}{p}, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \gamma_1(\tau) = a_{110}\sqrt{\frac{q}{p}}q^{s+2}, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \gamma_2(\tau) = a_{11,-1}q^{2s+3},$$
$$\lim_{\tau\to-\infty} \gamma_0(\tau) = a_{221}\frac{q}{p^2} \quad \lim_{\tau\to-\infty} \gamma_1(\tau) = a_{220}\sqrt{\frac{q}{p}}p^{-s-2}, \quad \lim_{\tau\to-\infty} \gamma_2(\tau) = a_{22,-1}p^{-2s-3},$$

причем сходимость к этим пределам экспоненциальная.

Условие 4.1. *Одним из основных условий на коэффициенты рассматриваемого уравнения является условие отделимости от нуля коэффициента при операторе T или при T^{-1} в (38) Для этих двух случаев нет никаких принципиальных различий в дальнейших рассуждениях, поэтому будем считать, что $\theta_{-1}(\tau) \neq 0,\ \forall\tau \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

5. Обратимость оператора взвешенного сдвига. Построим обратный оператор к оператору взвешенного сдвига

$$B_0 = \sum_{j=0}^{2} \gamma_j(\tau)T^j : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}). \tag{39}$$

Коэффициенты $\gamma_j(\tau),\ j = \overline{0, 2}$, являются непрерывными функциями, имеющими на бесконечности конечные пределы и сходящимися к ним экспоненциально. Здесь мы предполагаем выполненным условие 4.1., что позволяет считать $\gamma_0(\tau) \equiv 1$ (в противном случае на γ_0 следует разделить).

Спектр оператора взвешенного сдвига достаточно подробно изучался в работах [2, 3]. Из результатов [2] вытекают необходимые и достаточные условия обратимости двучленного оператора вида (39) на прямой. В этом пункте мы получим достаточные условия для трех слагаемых в разностном операторе, легко обобщаемые и на произвольное количество слагаемых в (39).

Для произвольного вещественного N обозначим $I = (-\infty, N]$ и рассмотрим $C(I)$— банахово пространство непрерывных ограниченных функций на I (с супремум-нормой), а также $\mathcal{H}_d(C(I))$— пространство всех аналитических в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < d\}$ функций со значениями в $C(I)$.

Введем алгебру $\mathcal{A}_d$ операторов $B(\tau, T)$ с переменными коэффициентами. Опираясь на интегральную формулу Коши, легко показать, что функции $b(\tau, \lambda)$ из $\mathcal{H}_d(C(I))$ есть суммы степенных рядов $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(\tau)\lambda^k$ с коэффициентами $b_k \in C(I)$, удовлетворяющими условию: для любого $d' < d$ найдется постоянная $M(d') > 0$ такая, что

$$\|b_k\|_{C(I)} \leq M(d')d'^{-k} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{40}$$

Более того, $b_k(\tau) = (1/k!)b_\lambda^{(k)}(x, 0)$, а в качестве постоянной $M(d')$ можно взять величину $M(d') = \max\limits_{|\lambda|=d'} \|b(\cdot, \lambda)\|_{C(I)}$.

Каждой функции $b(\tau, \lambda)$ из $\mathcal{H}_d(C(\bar{I}))$ сопоставим (пока формальный) операторный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(\tau)T^k$.

Лемма 5.1. *Пусть $b \in \mathcal{H}_d(C(I))$, где $d > 1$. Тогда формулой*

$$B(\tau, T)u(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!)(b)_\lambda^{(k)}(x, 0)u(\tau - kl) \tag{41}$$

определен ограниченный оператор $B(\tau, T) : L_2(I) \to L_2(I)$.

Доказательство леммы см. в [16].

Операторы, соответствующие функциям из $\mathcal{H}_d(C(I))$, образуют некоммутативную алгебру $\mathcal{A}_d$. Чтобы получить формулу композиции, перемножим соответствующие ряды. Если

$$B_1(\tau, T) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{1,k}(\tau)T^k, \quad B_2(\tau, T) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2,k}(\tau)T^k,$$

где $b_1, b_2 \in \mathcal{H}_d(C(I))$, то композиция B_1B_2 представляет собой оператор

$$B_3(\tau, T) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{3,k}(\tau)T^k, \qquad b_{3,k}(\tau) = \sum_{j=1}^{k} b_{1,k}(\tau)b_{2,k-j}(\tau - jl).$$

Легко видеть, что соответствующий символ $b_3(\tau,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} b_{3,k}(\tau)\lambda^k$ также принадлежит классу $\mathcal{H}_d(C(I))$.

Теорема 5.1. *Пусть для оператора B_0 выполнено условие*

$$b_0(-\infty,\lambda):=\sum_{j=0}^{2}\gamma_j(-\infty)\lambda^j\neq 0 \quad (|\lambda|<d).$$

Тогда существует обратный оператор $B_0^{-1}(\tau,T)\in\mathcal{A}_d$.

Доказательство. Будем строить обратный оператор в виде ряда $\sum_{k=0}^{\infty} r_k(\tau)T^k$. Равенство $B_0B_0^{-1}=I$ приводит к системе

$$\begin{cases} r_0(\tau)=1, \\ r_k(\tau)=-\gamma_1(\tau)r_{k-1}(\tau-l)-\gamma_2(\tau)r_{k-2}(\tau-2l), \qquad k\in\mathbb{N}, \end{cases} \tag{42}$$

для определения коэффициентов $r_k(\tau)$, в то время как $B_0^{-1}B_0=I$ дает

$$\begin{cases} r_0(\tau)=1, \\ r_k(\tau)=-\gamma_1(\tau-(k-1)l)r_{k-1}(\tau)-\gamma_2(\tau-(k-2)l)r_{k-2}(\tau), \qquad k\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{43}$$

Можно показать, что системы (42) и (43) определяют одну и ту же последовательность коэффициентов $r_k(\tau)$, $k\in\mathbb{N}$.

А именно, функции $r_k(\tau)$, $k=1,2,\ldots$, из (42) и (43) можно вычислить по формуле

$$r_k(\tau)=(-1)^k\det M_k(\tau), \tag{44}$$

где матрицы $M_k(\tau)$ имеют порядок $k\times k$, $k\in\mathbb{N}$ и задаются формулой

$$M_k(\tau)=\begin{pmatrix} \gamma_1(\tau) & \gamma_2(\tau) & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \gamma_1(\tau-l) & \gamma_2(\tau-l) & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_1(\tau-2l) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \gamma_1(\tau-(k-1)l) \end{pmatrix}.$$

Докажем равенство (44) и, следовательно, эквивалентность формул (42) и (43) по индукции. При $k=1$ равенство очевидно. Предположим, что равенство (44) выполняется вплоть до некоторого k. Докажем, что оно справедливо и для $k+1$. Раскрыв определитель $\det M_{k+1}(\tau)$ по первому столбцу, получаем уравнение из (42), а раскрыв его по последней строке, получаем уравнение из системы (43).

Теперь введем 2×2-матрицы

$$G_k(\tau)=\begin{pmatrix} -\gamma_1(\tau-(k+1)l) & -\gamma_2(\tau-kl) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор-столбцы $S_k(\tau)=(r_{k+1}(\tau),r_k(\tau))^T$, $k=0,1,2,\ldots$. Тогда будут справедливы рекуррентные соотношения $S_k=G_{k-1}S_{k-1}$ и формула общего члена

$$S_k=G_{k-1}\ldots G_0S_0 \quad (k=0,1,2,\ldots).$$

Оценка (40), которую нам осталось установить для коэффициентов $r_k(\tau)$, сводится к проверке неравенств

$$\sup_{\tau\in I}\|(G_{k-1}\ldots G_0)(\tau)\|\le c(d')d'^{-k} \quad (k=1,2,\ldots)$$

(здесь $\|.\|$ есть матричная норма).

Обозначим $\bar{I}=I\cup\{-\infty\}$ одноточечную компактификацию I. Тогда функции из $C(I)$, сходящиеся на $-\infty$, можно отождествить с непрерывными функциями на компакте $\bar{I}$. Пусть $\mathcal{B}$ есть банахова алгебра непрерывных на компакте $\bar{I}$ матричных функций порядка 2×2. Понятно, что последовательность $g_k=G_k$ принадлежит $\mathcal{B}$. При этом она сходится в $\mathcal{B}$ к элементу $g=G(-\infty)$ так, что выполняется оценка

$$\|g_k-g\|_{\mathcal{B}}\le c_N(qp)^{-k}.$$

Это непосредственным образом вытекает из вида функций $\gamma_{1,2}(\tau)$.

Воспользуемся следующей леммой

Лемма 5.2. ([14]) *Пусть $\mathcal{B}$ — банахова алгебра и последовательность $g_n\in\mathcal{B}$, $n=0,1,2,\ldots$, экспоненциально сходится к элементу $g\in\mathcal{B}$: $\|g_n-g\|_{\mathcal{B}}\le cd^n$ для некоторых постоянных $c>0$, $0<d<1$. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\|g_{n-1}\ldots g_0\|_{\mathcal{B}}^{1/n}\le d(g),$$

где $d(g)$ обозначает спектральный радиус элемента g в $\mathcal{B}$.

По этой лемме для всякого $\overline{d} > d(g)$ найдется постоянная $\widetilde{M} = \widetilde{M}(\overline{d})$ такая, что

$$\|g_{n-1}\dots g_0\|_{\mathcal{B}}^{1/n} \le \widetilde{M}(\overline{d})\overline{d}^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{45}$$

Оценим спектральный радиус $d(g)$ элемента $g \in \mathcal{B}$. Он совпадает с большим по модулю собственным значением постоянной матрицы $G(-\infty)$. Характеристическое уравнение для определения этих собственных значений имеет вид

$$z^2 + \gamma_1(-\infty)z + \gamma_2(-\infty) = 0. \tag{46}$$

Делая замену $z^{-1} = \lambda$, мы получаем уравнение $b_0(-\infty, \lambda) = 0$. Условие теоремы 5.1. означает, что все корни уравнения (46) не превосходят d^{-1}, а значит и спектральный радиус $d(g) \le d^{-1}$. Поскольку в условии (40) $d' < d$, имеем $d'^{-1} > d^{-1} \ge d(g)$. Положив в (45) $\overline{d} = d'^{-1}$, получим

$$\sup_{\tau\in I}\|(G_{k-1}\dots G_0)(\tau)\| = \|g_{k-1}\dots g_0\|_{\mathcal{B}} \le c_N(d')d'^{-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Теорема доказана.

Из леммы 5.1. и теоремы 5.1. вытекает

Следствие 5.1. *Пусть для оператора B_0 выполнено условие*

$$b_0(-\infty, \lambda) := \sum_{j=0}^{l}\gamma_j(-\infty)\lambda^j \ne 0 \quad (|\lambda| \le 1).$$

Тогда оператор $B_0(\tau, T)$ есть изоморфизм пространства $L_2(I)$.

Было показано, что уравнение

$$u(\tau) + \gamma_1(\tau)u(\tau - l) + \gamma_2(\tau)u(\tau - 2l) = f(\tau) \tag{47}$$

имеет единственное решение

$$u(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} r_k(\tau)f(\tau - kl), \tag{48}$$

причем ряд в правой части (48) сходится в $L_2(I)$ для любого N, а коэффициенты $r_k(\tau), k = 0, 1, 2, \dots,$ определяются системой (42) или (43). При этом справедлива оценка

$$\|u\|_{L_2(I)} \le c\|f\|_{L_2(I)}. \tag{49}$$

Покажем, что на самом деле функция, задаваемая формулой (48), принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ и непрерывно зависит от $f \in L_2(\mathbb{R})$. Для этого нам понадобится другое представление функции u. Рассмотрим уравнение (47) на полуинтервале $[N, +\infty)$ с начальными условиями

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \phi_0(\tau), \quad \text{при} \quad \tau \in [N - 2l, N - l],\\ u(\tau) &= \phi_1(\tau), \quad \text{при} \quad \tau \in [N - hl, N]. \end{aligned}$$

Введем обозначения $S = [N - 2l, N - l]$ и $u_k(\tau) = u(\tau + kl)$, $f_k(\tau) = f(\tau + kl)$, $\gamma_{1,k}(\tau) = \gamma_1(\tau + kl)$, $\gamma_{2,k}(\tau) = \gamma_2(\tau + kl)$ при $\tau \in S$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Заметим, что элементы с индексом $k = 0, 1$ рассматриваются далее только для последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$. Учитывая введенные обозначения, перепишем исходное уравнение и начальные условия

$$u_{k+2}(\tau) + \gamma_{1,k+2}(\tau)u_{k+1}(\tau) + \gamma_{2,k+2}(\tau)u_k(\tau) = f_{k+2}(\tau), \tag{50}$$

$$u_0(\tau) = \phi_0(\tau), \qquad u_1(\tau) = \phi_1(\tau + l).$$

Здесь $\tau \in S,\ k = 0, 1, 2, \dots$.

Определим пространство $L_2^{\infty}(S)$ последовательностей функций $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{L_2^{\infty}(S)} = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{N-2h}^{N-h} u_k(\tau)\overline{v_k(\tau)}d\tau.$$

С задачей (50) связывается ограниченный оператор

$$\mathcal{W} : L_2^{\infty}(S) \to L_2^{\infty}(S) \times L_2(S) \times L_2(S),$$

действующий по формуле $\mathcal{W}\{u_k\}_{k=0}^{\infty} = \left\{\left\{u_{k+2} + \gamma_{1,k+2}u_{k+1} + \gamma_{2,k+2}u_k\right\}_{k=0}^{\infty}, u_0, u_1\right\}$.

Учитывая то, что функции $\gamma_i(\tau)$, $i = 1, 2$, стабилизируются на бесконечности, используем для них представление

$$\gamma_{i,k}(\tau) = \gamma_i(+\infty) + \epsilon_{N,i,k}(\tau), \qquad i = 1, 2;\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ \tau \in S.$$

При этом по любому наперед заданному $\varepsilon > 0$ выберем N так, чтобы иметь

$$|\epsilon_{N,i,k}(\tau)| < \varepsilon \quad \text{при} \qquad i = 1, 2;\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ \tau \in S.$$

В соответствии с этим представлением, разложим оператор $\mathcal{W}$ в сумму двух операторов

$$\mathcal{W} = W + W_\varepsilon,$$

где оператор W является оператором с постоянными коэффициентами,

$$W\left\{u_k\right\}_{k=0}^{\infty} = \left\{\left\{u_{k+2} + \gamma_1(+\infty)u_{k+1} + \gamma_2(+\infty)u_k\right\}_{k=0}^{\infty}, u_0, u_1\right\},$$

а коэффициенты оператора W_ε малы равномерно по k,

$$W_\varepsilon\left\{u_k\right\}_{k=0}^{\infty} = \left\{\left\{\epsilon_{N,1,k+2}(\tau)u_{k+1} + \epsilon_{N,2,k+2}(\tau)u_k\right\}_{k=0}^{\infty}, 0, 0\right\}.$$

Оценим норму оператора W_ε. Поскольку

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_S |\epsilon_{N,1,k+2}(\tau)u_{k+1} + \epsilon_{N,2,k+2}(\tau)u_k|^2 d\tau\right) \le 2\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_S \left(|u_{k+1}|^2 + |u_k|^2\right) d\tau, \tag{51}$$

то $\|W_\varepsilon\| \le 2\varepsilon$.

Теперь перейдем к решению неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами, отвечающего оператору W,

$$u_{k+2} + \gamma_1(+\infty)u_{k+1} + \gamma_2(+\infty)u_k = f_{k+2}, \tag{52}$$

где $u_0 = \phi_0$, $u_1 = \phi_1(. + h)$. Его характеристическое уравнение имеет вид, аналогичный уравнению (46):

$$\lambda^2 + \gamma_1(+\infty)\lambda + \gamma_2(+\infty) = 0.$$

Пусть λ_1 и λ_2 — корни этого уравнения.

Хорошо известно [9], что если $\lambda_1 \ne \lambda_2$, т. е. $\gamma_2(+\infty) \ne (\gamma_1(+\infty)/2)^2$, то решение соответственного однородного разностного уравнения имеет вид

$$u_k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k,$$

а решение уравнения (52) находится по формуле

$$u_k = \phi_1\frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2} - \phi_0\gamma_2(+\infty)\frac{\lambda_1^{k-1} - \lambda_2^{k-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \sum_{i=2}^{k} f_{k+2-i}\frac{\lambda_1^{i-1} - \lambda_2^{i-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Если же $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$, т. е. $\gamma_2(+\infty) = (\gamma_1(+\infty)/2)^2$, то решение имеет вид

$$u_k = \phi_1 k\lambda^{k-1} - \phi_0\gamma_2(+\infty)(k-1)\lambda^{k-2} + \sum_{i=2}^{k} f_{k+2-i}\lambda^{i-2}.$$

Тогда в обоих случаях имеем оценку

$$\frac{1}{3}|u_k(\tau)|^2 \le k^2|\lambda|^{2(k-1)}|\phi_1(\tau+h)|^2 + (k-1)^2|\gamma_2(+\infty)|^2|\lambda|^{2(k-2)}|\phi_0(\tau)|^2 + \left(\sum_{i=2}^{k}|\lambda|^{(i-2)}|f_{k+2-i}(\tau)|\right)^2.$$

Здесь $|\lambda| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$. Нетрудно убедиться в том, что для последнего слагаемого выполняется оценка

$$\left(\sum_{i=2}^{k}|\lambda|^{(i-2)}|f_{k+2-i}(\tau)|\right)^2 \le 2\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=i}^{k}|\lambda|^{2k-(i+j)}|f_i(\tau)||f_j(\tau)|.$$

Просуммируем по k

$$\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{\infty}|u_k(\tau)|^2 \le |\phi_1(\tau+h)|^2\sum_{k=2}^{\infty}k^2|\lambda|^{2(k-1)} + |\phi_0(\tau)|^2|\gamma_2(+\infty)|^2\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)^2|\lambda|^{2(k-2)} + 2\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=i}^{k}|\lambda|^{2k-(i+j)}|f_i(\tau)||f_j(\tau)|. \tag{53}$$

Условием сходимости рядов в правой части неравенства (53) является оценка $|\lambda| < 1$. Рассмотрим отдельно последний ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=i}^{k}|\lambda|^{2k-i-j}|f_i||f_j| = \sum_{i=2}^{\infty}|\lambda|^{-i}|f_i|\sum_{j=i}^{\infty}|\lambda|^{-j}|f_j|\sum_{k=j}^{\infty}|\lambda|^{2k} = \frac{1}{1-|\lambda|^2}\sum_{i=2}^{\infty}|\lambda|^{-i}|f_i|\sum_{j=i}^{\infty}|\lambda|^{j}|f_j| =$$
$$\frac{1}{1-|\lambda|^2}\sum_{i=2}^{\infty}|f_i|\sum_{m=0}^{\infty}|\lambda|^m|f_{i+m}| = \frac{1}{1-|\lambda|^2}\sum_{m=0}^{\infty}|\lambda|^m\sum_{i=2}^{\infty}|f_i||f_{i+m}| \le$$
$$\frac{1}{1-|\lambda|^2}\sum_{m=0}^{\infty}|\lambda|^m\left(\sum_{i=2}^{\infty}|f_i|^2\sum_{i=2}^{\infty}|f_{i+m}|^2\right)^{1/2} \le \frac{1}{1-|\lambda|^2}\sum_{m=0}^{\infty}|\lambda|^m\sum_{i=2}^{\infty}|f_i|^2$$

Таким образом, правую часть (53) можно оценить через

$$|\phi_1(\tau+h)|^2\frac{|\lambda|^2(|\lambda|^4-3|\lambda|^2+4)}{(1-|\lambda|^2)^3} + |\phi_0(\tau)|^2\frac{|\lambda|^2+1}{(1-|\lambda|^2)^3} + \frac{2}{(1-|\lambda|^2)(1-|\lambda|)}\sum_{i=2}^{\infty}|f_i|^2.$$

Проинтегрируем (53) по отрезку S

$$\int_{N-2l}^{N-l}\sum_{k=2}^{\infty}|u_k(\tau)|^2d\tau = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{N+kl}^{N+(k+1)l}|u(\tau)|^2d\tau = \|u\|^2_{L_2([N,+\infty)} \le$$
$$\frac{3|\lambda|^2(|\lambda|^4-3|\lambda|^2+4)}{(1-|\lambda|^2)^3}\int_{N-2l}^{N-l}|\phi_1(\tau+l)|^2d\tau + \frac{3(|\lambda|^2+1)}{(1-|\lambda|^2)^3}\int_{N-2l}^{N-l}|\phi_0(\tau)|^2d\tau +$$
$$\frac{6}{(1-|\lambda|^2)(1-|\lambda|)}\int_{N-2l}^{N-l}\sum_{i=2}^{\infty}|f(\tau+ih)|^2d\tau \le C\left(\|\phi_1\|_{L_2([N-l,N])} + \|\phi_0\|_{L_2([N-2l,N-l])} + \|f\|^2_{L_2([N,+\infty)}\right).$$

Получаем, что при $\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\} < 1$ выполняется оценка

$$\|u\|_{L_2([N,+\infty))} \le c\left(\|\phi_1\|_{L_2([-N,-N+h])} + \|\phi_0\|_{L_2([N-2h,N-h])} + \|f\|_{L_2([N,+\infty))}\right), \tag{54}$$

причем константа не зависит от N. Таким образом, мы убедились в том, что норма оператора W^{-1} не зависит от N.

В силу этого мы можем взять такое N, что норма оператора W_ε будет достаточно мала для обратимости оператора $W + W_\varepsilon$. Действительно,

$$(W+W_\varepsilon)^{-1} = \left(W\left(I+W^{-1}W_\varepsilon\right)\right)^{-1} = \left(I+W^{-1}W_\varepsilon\right)^{-1}W^{-1},$$

значит для обратимости оператора $W + W_\varepsilon$ достаточно выполнения оценки $\|W^{-1}W_\varepsilon\| < 1$, или $\|W_\varepsilon\| < 1/\|W^{-1}\|$. В силу (51), выбираем N так, чтобы $\varepsilon < 1/(2\|W^{-1}\|)$.

Таким образом, из (49) и (54) получаем

$$\|u\|_{L_2(\mathbb{R})} \le c\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{55}$$

Тогда сформулируем достаточные условия обратимости оператора B_0.

Теорема 5.2. *Пусть для оператора B_0 выполнено условие*

$$b_0(\pm\infty,\lambda) := \sum_{j=0}^{2}\gamma_j(\pm\infty)\lambda^j \ne 0 \quad (|\lambda| \le 1).$$

Тогда существует ограниченный обратный оператор $B_0^{-1}(\tau,T)$.

Замечание 5.1. *Условия обратимости оператора B_0, полученные в этом пункте, легко обобщаются на случай $M+1$-членного оператора*

$$B_0 = \sum_{j=0}^{M} \gamma_j(\tau) T^j$$

с коэффициентами, экспоненциально сходящимися на $\pm\infty$, и имеют аналогичный вид, а именно, требуется, чтобы $\sum_{j=0}^{M} \gamma_j(\pm\infty)\lambda^j \neq 0$ при $|\lambda| \leq 1$.

6. Разрешимость в весовом пространстве. Сформулируем основной результат о разрешимости функционально-дифференциального уравнения в весовых пространствах.

Теорема 6.1. *Пусть для оператора $A_R : H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2) \to H_0^s(\mathbb{R}^2)$ в (32) выполнены условия*

$$a_{111} pq e^{2s_1\tau} \pm (a_{121} pq + a_{211})\, e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{221} e^{-2ss_2\tau} \neq 0 \quad \left(\tau \in \overline{\mathbb{R}}\right); \tag{56}$$

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \leq \sqrt{p/q}\, q^{s+1}); \tag{57}$$

$$a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \leq \sqrt{p/q}\, p^{-s-1}). \tag{58}$$

Тогда существует ограниченный обратный оператор A_R^{-1}.

Доказательство. Действительно, условие (56) позволяет при исследовании исходного уравнения рассматривать оператор

$$I + \frac{\gamma_1(\tau)}{\gamma_0(\tau)} T + \frac{\gamma_2(\tau)}{\gamma_0(\tau)} T^2.$$

Его обратимость гарантируется теоремой 5.2. при условии, что корни уравнений

$$1 + \frac{\gamma_1(\pm\infty)}{\gamma_0(\pm\infty)}\lambda + \frac{\gamma_2(\pm\infty)}{\gamma_0(\pm\infty)}\lambda^2 = 0$$

лежат вне круга единичного радиуса. Подставляя значения пределов $\gamma_i(\pm\infty)$, $i = 0, 1, 2$, мы получаем два уравнения

$$\frac{a_{11,-1}}{a_{111}} q^{2(s+1)} \frac{p}{q}\lambda^2 + \frac{a_{110}}{a_{111}} q^{s+1} \sqrt{\frac{p}{q}}\lambda + 1 = 0,$$

$$\frac{a_{22,-1}}{a_{221}} p^{-2(s+1)} \frac{p}{q}\lambda^2 + \frac{a_{220}}{a_{221}} p^{-(s+1)} \sqrt{\frac{p}{q}}\lambda + 1 = 0.$$

После замен $\tilde{\lambda} = q^{s+1}\sqrt{p/q}\lambda$ и $\hat{\lambda} = p^{-(s+1)}\sqrt{p/q}\lambda$ мы получаем условия (57), (58).

Теперь в (55) используем функции $u(\tau) = e^{\tau(s_1-s_2)/2}\,(e(\tau))^{s/2+1}\, w(\rho,\tau)$ и

$$f(\tau) = \rho^{-2} e^{\tau(s_1-s_2)/2}\,(e(\tau))^{s/2+1}\,(e(\tau-h))^{-1}\, g(\rho, \tau-h)$$

(они принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$ при почти всех $\rho > 0$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau(s_1-s_2)}\,(e(\tau))^{s+2}\,|w(\rho,\tau)|^2 d\tau \leq c \int_{-\infty}^{\infty} \rho^{-4} e^{\tau(s_1-s_2)}\,(e(\tau))^{s+2}\,(e(\tau-l))^{-2}\,|g(\rho,\tau-l)|^2 d\tau.$$

Умножим обе части последнего неравенства на $2\rho^{2s+3}$ и проинтегрируем по ρ от 0 до $+\infty$. Получаем оценку

$$\|w\|^2_{K^{s+2}} \leq c\|g\|^2_{K^s},$$

равносильную оценке

$$\|\tilde{u}\|^2_{H^0_{s+2}(\mathbb{R}^2)} \leq c\|\tilde{f}\|^2_{H^0_s(\mathbb{R}^2)}.$$

Теорема доказана.

Замечание 6.1. *Интересным является наличие параметра s в условиях теоремы 6.1. Увеличение этого параметра позволяет нам ослабить условие на коэффициенты a_{22k}, $k = 0, \pm 1$: уменьшается круг, куда не должны попасть корни выражения в (58). Но в то же время ужесточаются условия на коэффициенты a_{11k}, $k = 0, \pm 1$, т. к. увеличивается круг, где выражение из (57) не должно обращаться в ноль.*

Замечание 6.2. *Обратим внимание на то, что коэффициенты при смешанных производных входят лишь в условие (56), которое является значительно менее ограничительным по сравнению с (57) и (58).*

Симметричные достаточные условия разрешимости получаются, если потребовать, чтобы $\theta_1(\tau) \neq 0$ на $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда можно свести вопрос об обратимости оператора A_R к вопросу об обратимости оператора

$$\hat{B}_0 = \delta_0 I + \delta_1 T^{-1} + \delta_2 T^{-2} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}),$$

где

$$\delta_0(\tau) = \frac{\theta_1(\tau + l)}{e(\tau + l)}, \quad \delta_1(\tau) = \frac{\theta_0(\tau + l)\sqrt{p/q}e^{s/2+1}(\tau)}{e^{s/2+2}(\tau + l)}, \quad \delta_2(\tau) = \frac{\theta_{-1}(\tau + l)(p/q)e^{s/2+1}(\tau)}{e(\tau + h)e^{s/2+1}(\tau + 2l.96 * +968/)}.$$

Аналогично убеждаемся, что для существования ограниченного обратного оператора $\hat{B}_0$ в этом случае достаточно выполнения условий

$$1 + \frac{\delta_1(\pm\infty)}{\delta_0(\pm\infty)}\lambda + \frac{\delta_2(\pm\infty)}{\delta_0(\pm\infty)}\lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \leq 1).$$

Подставляя предельные значения, получаем следующий результат.

Теорема 6.2. *Пусть для оператора* $A_R : H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2) \to H_0^s(\mathbb{R}^2)$ *выполнены условия*

$$a_{11,-1}e^{2s_1\tau} \pm \left(a_{12,-1} + a_{21,-1}pq\right) e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{22,-1}pqe^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad \left(\tau \in \overline{\mathbb{R}}\right);$$
$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \geq \sqrt{p/q}q^{s+1});$$
$$a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \geq \sqrt{p/q}p^{-s-1}).$$

Тогда существует ограниченный обратный оператор A_R^{-1}.

Комбинируя теоремы 6.1. и 6.2., приходим к такому утверждению.

Следствие 6.1. *Пусть для оператора* $A_R : H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2) \to H_0^s(\mathbb{R}^2)$ *из* (32) *одновременно выполняются условия*

$$a_{111}pqe^{2s_1\tau} \pm (a_{121}pq + a_{211})\, e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{221}e^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad \left(\tau \in \overline{\mathbb{R}}\right),$$
$$a_{11,-1}e^{2s_1\tau} \pm \left(a_{12,-1} + a_{21,-1}pq\right) e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{22,-1}pqe^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad \left(\tau \in \overline{\mathbb{R}}\right),$$

и пусть λ_1, λ_2 *— корни уравнения*

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 = 0.$$

Если оба корня уравнения

$$a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 = 0$$

лежат внутри круга радиуса $\sqrt{p/q}p^{-s-1}$, *когда* $|\lambda_{1,2}| < \sqrt{p/q}q^{s+1}$, *и лежат вне его, когда* $|\lambda_{1,2}| > \sqrt{p/q}q^{s+1}$, *то существует ограниченный обратный оператор* A_R^{-1}.

В заключение остановимся на ситуации, когда в исходном уравнении либо все коэффициенты a_{ij1} одновременно обращаются в ноль, либо все коэффициенты $a_{ij,-1}$ одновременно обращаются в ноль, т. е. когда одна из функций θ_1 или θ_{-1} тождественно равна нулю. Без ограничения общности будем считать, что $\theta_1(\tau) \equiv 0$. Тогда решение уравнения сводится к обращению двучленного оператора

$$\beta w(\tau) = \gamma_0(\tau)w(\tau) + \gamma_1(\tau)w(\tau - h) : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}). \tag{59}$$

Следующий результат доказан в [2, теорема 11.1, параграф 11].

Теорема 6.3. *Пусть коэффициенты* γ_0, γ_1 *принадлежат* $L_\infty(\mathbb{R})$ *и существуют пределы* $\lim\limits_{\tau\to\pm\infty} \gamma_{0,1}(\tau) = \gamma_{0,1}(\pm\infty)$. *Тогда оператор* (59) *обратим в пространстве* $L_p(\mathbb{R}), 1 < p < \infty$, *в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:*

1. *существует номер* k_0 *такой, что* $|\gamma_{k_0}(\pm\infty)| > |\gamma_{1-k_0}(\pm\infty)|$;
2. *существует число* $\delta > 0$ *такое, что почти всюду* $|\gamma_{k_0}| > \delta$.

Замечание 6.3. *Поскольку условия теоремы 6.3. совпадают с условиями теоремы 5.2. в случае вырождения коэффициентов при одном из сдвигов, то мы можем говорить о близости полученных в статье достаточных условий обратимости разностного оператора* B_0 *к необходимым.*

Теперь рассмотрим решения уравнения (33), записанного в виде

$$A\tilde{u} = \tilde{f},$$

из пространства $H_{s+2}^k(\mathbb{R}^2)$, $k \in \mathbb{N}$. В этом случае, $\tilde{f} \in H_s^k\left(\mathbb{R}^2\right)$. Получим ниже алгебраические условия, при которых решения удовлетворяют априорной оценке

$$\|\tilde{u}\|_{H_{s+2}^k(\mathbb{R}^2)} \leq C\|\tilde{f}\|_{H_s^k(\mathbb{R}^2)}.$$

Эквивалентное утверждение состоит в наличии у оператора $A : H^k_{s+2}(\mathbb{R}^2) \to H^k_s(\mathbb{R}^2)$ тривиального ядра и замкнутого образа. Начнем со случая, когда $k = 1$,

$$\|\tilde{f}\|^2_{H^1_s(\mathbb{R}^2)} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(s-1)} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_i}\right|^2 d\xi < \infty.$$

Таким образом, $\tilde{f} \in H^0_{s-1}\left(\mathbb{R}^2\right)$ и $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_i} \in H^0_s\left(\mathbb{R}^2\right)$. Заменяя параметр s на $(s-1)$ в Теореме 6.1., получим условие, при котором существует единственное решение $\tilde{u} \in H^0_{s+1}\left(\mathbb{R}^2\right)$, и выполняется следующая оценка

$$\|\tilde{u}\|_{H^0_{s+1}(\mathbb{R}^2)} \leq C_0 \|\tilde{f}\|_{H^0_{s-1}(\mathbb{R}^2)}. \tag{60}$$

Предполагая, что $\tilde{u} \in H^1_{s+2}\left(\mathbb{R}^2\right)$, продифференцируем уравнение (33) по ξ_1 и по ξ_2. Используя предыдущие краткие обозначения, перепишем данные уравнения в следующем виде:

$$A_1 \tilde{u}_{\xi_1} = \tilde{f}_{\xi_1} + B_1 \tilde{u}, \tag{61}$$

$$A_2 \tilde{u}_{\xi_2} = \tilde{f}_{\xi_2} + B_2 \tilde{u}. \tag{62}$$

Поскольку $\tilde{u} \in H^0_{s+1}\left(\mathbb{R}^2\right)$, члены $\xi_i \tilde{u},\ i = 1, 2$, также принадлежат $H^0_s\left(\mathbb{R}^2\right)$, а операторы B_1, B_2 непрерывно отображают $H^0_{s+1}\left(\mathbb{R}^2\right)$ в $H^0_s\left(\mathbb{R}^2\right)$. Отсюда функции правой части уравнений (61), (62) принадлежат пространству $H^0_s\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Предположим, что для операторов $A_1, A_2 : H^0_{s+2}\left(\mathbb{R}^2\right) \to H^0_s\left(\mathbb{R}^2\right)$ выполняются условия, аналогичные условиям Теоремы 6.1. Тогда данные операторы непрерывно обратимы, и мы имеем

$$\|\tilde{u}_{\xi_i}\|_{H^0_{s+2}(\mathbb{R}^2)} \leq C_1 \|\tilde{f}_{\xi_i} + B_i \tilde{u}\|_{H^0_s(\mathbb{R}^2)} \leq C_1 \left(\|\tilde{f}_{\xi_i}\|_{H^0_s(\mathbb{R}^2)} + \|B_i \tilde{u}\|_{H^0_s(\mathbb{R}^2)}\right) \leq$$
$$C_2 \left(\|\tilde{f}_{\xi_i}\|_{H^0_s(\mathbb{R}^2)} + \|\tilde{u}\|_{H^0_{s+1}(\mathbb{R}^2)}\right) \leq C_2 \left(\|\tilde{f}_{\xi_i}\|_{H^0_s(\mathbb{R}^2)} + C_0 \|\tilde{f}\|_{H^0_{s-1}(\mathbb{R}^2)}\right) \leq C_3 \|\tilde{f}\|_{H^1_s(\mathbb{R}^2)}.$$

Совместно с (60) это дает, что

$$\|\tilde{u}\|_{H^1_{s+2}(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\tilde{f}\|_{H^1_s(\mathbb{R}^2)}. \tag{63}$$

Выразим вышеупомянутые условия на A, A_1 и A_2 в явном виде. Если мы начнем с выражения

$$a_{111} pq e^{2s_1\tau} \pm (a_{121} pq + a_{211})\, e^{(s_1 - s_2)\tau} + a_{221} e^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R})$$

общего для всех трех операторов, то необходимо дополнительно потребовать

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} q^s\right), \quad a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} p^{-s}\right)$$

для A,

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} q^s\right), \quad a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} p^{-(s+1)} q^{-1}\right)$$

для A_1 и

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} q^{s+1} p\right), \quad a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} p^{-s}\right)$$

для A_2. Поскольку $pq > 1$, пересечение данных условий выражается последними двумя выражениями. Альтернативные условия, связанные с выражением

$$a_{11,-1} e^{2s_1\tau} \pm \left(a_{12,-1} + a_{21,-1} pq\right) e^{(s_1 - s_2)\tau} + a_{22,-1} pq e^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

формулируются аналогично. Запишем ниже полученный результат.

Теорема 6.3. *Априорная оценка*

$$\|u\|_{H^{s+2}_1(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{H^s_1(\mathbb{R}^2)}$$

выполняется для решений уравнения (32), *если выполняется один из следующих двух блоков условий:*

(i)

$$a_{111} pq e^{2s_1\tau} \pm (a_{121} pq + a_{211})\, e^{(s_1 - s_2)\tau} + a_{221} e^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} q^{s+1} p\right), \quad a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} p^{-s}\right);$$

(ii)

$$a_{11,-1}e^{2s_1\tau} \pm \left(a_{12,-1} + a_{21,-1}pq\right) e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{22,-1}pqe^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \geq \sqrt{\frac{p}{q}}q^s\right), \quad a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \geq \sqrt{\frac{p}{q}}p^{-(s+1)}q^{-1}\right).$$

Сформулируем очевидное обобщение для натурального k.

Теорема 6.4. *Априорная оценка*

$$\|u\|_{H_k^{s+2}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{H_k^s(\mathbb{R}^2)}$$

выполняется для решений уравнения (32), *если выполняется один из следующих двух блоков условий:*

(i)

$$a_{111}pqe^{2s_1\tau} \pm (a_{121}pq + a_{211})\, e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{221}e^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}}q^{s+1}p^k\right), \quad a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}}p^{-(s+1-k)}\right);$$

(ii)

$$a_{11,-1}e^{2s_1\tau} \pm \left(a_{12,-1} + a_{21,-1}pq\right) e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{22,-1}pqe^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \geq \sqrt{\frac{p}{q}}q^{s+1-k}\right), \quad a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \geq \sqrt{\frac{p}{q}}p^{-(s+1)}q^{-k}\right).$$

Пример 6.1. *Исследуем разрешимость уравнения*

$$au_{x_1x_1}(x_1, x_2) + u_{x_1x_1}(x_1/2, 2x_2) + bu_{x_1x_2}(x_1/2, 2x_2) + u_{x_2x_2}(x_1/2, 2x_2) + cu_{x_2x_2}(2x_1, x_2/2) = f(x_1, x_2). \quad (64)$$

Здесь $p = q = 2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f \in H_0^s(\mathbb{R}^2)$, $s \notin \mathbb{Z}$. *Тогда* $a_{110} = a$, $a_{111} = 2$, $2a_{121} + a_{211}/2 = b$, $a_{221} = 1/2$, $a_{22,-1} = 2c$, *остальные коэффициенты нулевые. Воспользуемся теоремой 6.1. Условие* (56) *имеет вид*

$$4e^{2\tau} + \frac{1}{4}e^{-2\tau} \neq \pm b, \quad \forall\tau \in \overline{\mathbb{R}},$$

что возможно лишь когда $|b| < 2$. *Условия* (57) *и* (58) *выглядят следующим образом:*

$$2 + a\lambda = 0 \ \text{ только при } |\lambda| > 2^{s+1},$$

$$\frac{1}{2} + 2c\lambda^2 = 0 \ \text{ только при } |\lambda| > 2^{-s-1}.$$

Это значит, что при $|a| < 2^{-s}$, $|c| < 2^{2s}$ *и* $|b| < 2$ *уравнение* (64) *имеет единственное решение в* $H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2)$.

Благодарность. *Автор выражают благодарность А. Л. Скубачевскому и Л. Е. Россовскому за поддержку, внимание к работе, ценные замечания и советы.*

Список литературы

1. Агранович М. С., Селицкий А. М. 2013. Дробные степени операторов, отвечающих коэрцитивным задачам в липшицевых областях. Функциональный анализ и его приложения, 47(2): 2–17. DOI: 10.4213/faa3109

2. Антоневич А. Б. 1988. Линейные функциональные уравнения: Операторный подход. Мн.: Университетское, 232.

3. Антоневич А. Б., Ахматова А. А. 2012. Спектральные свойства дискретного оператора взвешенного сдвига. Труды Института математики, 20(1): 14–21.

4. Вишик М. И. 1951. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. Математический сборник, 29(71), 3: 615–676.

5. Лийко В. В., Скубачевский А. Л. 2019. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области. Современная математика. Фундаментальные направления, 65(4): 635–654. DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-635-654

6. Лийко В. В., Скубачевский А. Л. 2020. Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре. Математические заметки, 107(5): 693–716. DOI: 10.4213/mzm12597

7. Кондратьев В. А. 1967. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Труды Московского математического общества, 16: 209–292.

8. Пламеневский Б. А. 1986. Алгебры псевдодифференциальных операторов. М.: Наука, 256.
9. Полянин А. Д., Манжиров А. В. 1998. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. М.: Факториал, 432.
10. Россовский Л. Е. 1996. Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений. Математические заметки, 59(1): 103–113. DOI: 10.4213/mzm1698
11. Россовский Л. Е. 2001. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов. Труды Московского математического общества, 62: 199–228.
12. Россовский Л. Е. 2011. О спектральной устойчивости функционально-дифференциальных уравнений. Математические заметки, 90(6): 885–901. DOI: 10.4213/mzm8753
13. Россовский Л. Е. 2012. К вопросу о коэрцитивности функционально-дифференциальных уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления, 45: 122–131. DOI: 10.1007/s10958-014-2018-5
14. Россовский Л. Е. 2014. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции. Современная математика. Фундаментальные направления. 54: 3–138. DOI: 10.1007/s10958-017-3360-1
15. Россовский Л. Е., Тасевич А. Л. 2015. Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями. Математические заметки, 97(5): 733–748. DOI: 10.4213/mzm10654
16. Россовский Л. Е., Тасевич А. Л. 2017. Об однозначной разрешимости функционально-диффернциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах. Дифференциальные уравнения, 53(12): 1631–1644. DOI: 10.1134/S037406411712010X
17. Скубачевский А. Л. 1986. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы. Математический сборник, 129(171), 2: 279–302. DOI: 10.1070/SM1987v057n01ABEH003070
18. Скубачевский А. Л. 2016. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения. Успехи математических наук, 71, 5(431): 3–112. DOI: 10.4213/rm9739
19. Скубачевский А. Л. 2018. Гипотеза Като для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением в цилиндре. Доклады Российской академии наук, 478(2): 145–147. DOI: 10.7868/S0869565218020056
20. Скубачевский А. Л., Шамин Р. В. 2001. Параболические дифференциально-разностные уравнения второго порядка. Доклады Российской академии наук, 379(5): 595–598.
21. Auscher P., Hofmann S., McIntosh A., Tchamitchian P. 2001. The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on $\mathbb{R}^n$. Journal of Evolution Equations, 1: 361–385. DOI: 10.1007/PL00001377
22. Gårding L. 1953. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. Mathematica Scandinavica, 1: 55–72. DOI: 10.7146/math.scand.a-10364
23. Kato T. 1961. Fractional powers of dissipative operators. The Journal of Mathematical Society of Japan, 13(3): 264–274. DOI: 10.2969/jmsj/01330246
24. McIntosh A. 1972. On the comparability of $A^{1/2}$ and $A^{*1/2}$. Proceedings of the American Mathematical Society, 32(2): 430–434. DOI: 10.2307/2037834
25. Skubachevskii A. L. 1986. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations. Journal of Differential Equations. 63: 332–361. DOI: 10.1016/0022-0396(86)90060-4
26. Skubachevskii A. L. 1997. Elliptic functional differential equations and applications. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997. 294. DOI: 10.1007/978-3-0348-9033-5.
27. Tasevich A.L. 2017. Analysis of functional-differential equation with orthotropic contraction. Mathematical modelling of natural phenomena, 12(6): 240–248. DOI: 10.1051/mmnp/2017076

References

1. Agranovich M. S., Selitskii A. M. 2013. Fractional powers of operators corresponding to coercive problems in Lipschitz domains. Functional Analysis and Its Applications, 47(2): 83–95 (in Russian). DOI: 10.1007/s10688-013-0013-0
2. Antonevich A. B. 1996. Linear functional equations. Operator approach. Birkh, user, 183 (in Russian).
3. Antonevich A. B., Akhmatova A. A. 2012. Spectral properties of discrete weighted shift operators. Trudy Instituta Matematiki, 20(1): 14–21 (in Russian).
4. Vishik M. I. 1951. On strongly elliptic systems of differential equations. Matematicheskii Sbornik, 29(71), 3: 615–676 (in Russian).
5. Liiko V. V., Skubachevskii A. L. 2019. Strongly elliptic differential-difference equations with mixed boundary conditions in a cylindric domain. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, 65(4): 635–654 (in Russian). DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-635-654
6. Liiko V. V., Skubachevskii A. L. 2020. Mixed Problems for strongly elliptic differential-difference equations in a cylinder. Mathematical Notes, 107(5): 770–790 (in Russian). DOI: 10.1134/S0001434620050065
7. Kondrat'ev V. A. 1967. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva, 16: 209–292 (in Russian).
8. Plamenevskii B. A. 1989. Algebras of pseudodifferential operators. Springer Dordrecht, 292 (in Russian). DOI: 10.1007/978-94-009-2364-5
9. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. 1998. Handbook of integral equations.CRC Press LLC, 796 (in Russian).
10. Rossovskii L. E. 1996. Coerciveness of functional-differential equations. Mathematical Notes, 59(1): 75–82 (in Russian). DOI: 10.1007/BF02312468
11. Rossovskii L. E. 2001. Boundary vakue problems for elliptic functional-differential equations with extension and contraction of arguments. Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva, 62: 199–228 (in Russian).
12. Rossovskii L. E. 2011. On the spectral stability of functional-differential equations. Mathematical Notes, 90: 867–881 (in Russian). DOI: 10.1134/S0001434611110265
13. Rossovskii L. E. 2014. The coercivity of functional differential equations. Journal of Mathematical Sciences, 201: 663–672 (in Russian). DOI: 10.1007/s10958-014-2018-5
14. Rossovskii L. E. 2017. Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function. Journal of Mathematical Sciences. 223: 351–493 (in Russian). DOI: 10.1007/s10958-017-3360-1
15. Rossovskii L. E., Tasevich A.L. 2015. he first boundary-value problem for strongly elliptic functional-differential equations with orthotropic contractions. Mathematical Notes, 97: 745–758 (in Russian). DOI: 10.1134/S0001434615050090
16. Rossovskii L. E., Tasevich A.L. 2018. Unique solvability of a functional-differential equation with orthotropic contractions in weighted spaces. Differential Equations, 53: 1631–1644 (in Russian). DOI: 10.1134/S0012266117120102
17. Skubachevskii A. L. 1987. Elliptic problems with nonlocal conditions near the boundary. Math. USSR-Sb, 57(1): 293–316 (in Russian). DOI: 10.1070/SM1987v057n01ABEH003070
18. Skubachevskii A. L. 2016. Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications. Russian Mathematical Surveys, 71(5): 801–906 (in Russian). DOI: 10.1070/RM9739
19. Skubachevskii A. L. 2018. The Kato conjecture for elliptic differential-difference operators with degeneration in a cylinder. Doklady Mathematics , 97(1): 32–34 (in Russian). DOI: 10.1134/S1064562418010106
20. Skubachevskii A. L., Shamin R. V. 2001. Second-order parabolic differential-difference equations. Doklady Mathematics, 64(1): 98–101 (in Russian).
21. Auscher P., Hofmann S., McIntosh A., Tchamitchian P. 2001. The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on $\mathbb{R}^n$. Journal of Evolution Equations, 1: 361–385. DOI: 10.1007/PL00001377

22. Gårding L. 1953. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. Mathematica Scandinavica, 1: 55–72. DOI: 10.7146/math.scand.a-10364

23. Kato T. 1961. Fractional powers of dissipative operators. The Journal of Mathematical Society of Japan, 13(3): 264–274. DOI: 10.2969/jmsj/01330246

24. McIntosh A. 1972. On the comparability of $A^{1/2}$ and $A^{*1/2}$. Proceedings of the American Mathematical Society, 32(2): 430–434. DOI: 10.2307/2037834

25. Skubachevskii A. L. 1986. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations. Journal of Differential Equations. 63: 332–361. DOI: 10.1016/0022-0396(86)90060-4

26. Skubachevskii A. L. 1997. Elliptic functional differential equations and applications. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997. 294. DOI: 10.1007/978-3-0348-9033-5.

27. Tasevich A.L. 2017. Analysis of functional-differential equation with orthotropic contraction. Mathematical modelling of natural phenomena, 12(6): 240–248. DOI: 10.1051/mmnp/2017076

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.10.2022
Поступила после рецензирования 21.11.2022
Принята к публикации 26.11.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Тасевич Алла Львовна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, ассистент, Российский университет дружбы народов

ул. Вавилова, д. 40, Москва, 119333, Россия,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alla Tasevich – PhD, junior researcher, Federal research center "Computer Science and Control" of RAS, Moscow, Russia, assistant professor, RUDN University, Moscow, Russia