

# ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ INFOCOMMUNICATION TECHNOLOGIES

УДК 621.39

DOI 10.52575/2687-0932-2022-49-4-833-853

## Анализ и аппроксимация функций по эмпирическим данным на основе субполосных представлений

<sup>1</sup> Жилияков Е.Г., <sup>2</sup> Лубков И.И., <sup>1</sup> Болгова Е.В.

<sup>1</sup> Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы, д. 85, г. Белгород, 308015, Россия

<sup>2</sup> ООО «Технопроект», ул. Корочанская, д. 132а, г. Белгород, 308009, Россия  
E-mail: zhilyakov@bsu.edu.ru

**Аннотация.** Эмпирические данные служат основным источником знаний о природных явлениях и процессах. Разработке методов анализа закономерностей их поведения в зависимости от конкретных условий посвящено большое количество работ, среди которых особое место занимают математические модели, описывающие исследуемые закономерности в количественном виде. В рамках данной работы показано, что многие общие аспекты анализа и аппроксимации функций по эмпирическим данным могут быть рассмотрены в рамках предложенного варианта субполосного анализа и синтеза с использованием основных понятий анализа Фурье.

**Ключевые слова:** математический аппарат субполосного анализа эмпирических данных, аппроксимация функций, прикладные задачи

**Для цитирования:** Жилияков Е.Г., Лубков И.И., Болгова Е.В. 2022. Анализ и аппроксимация функций по эмпирическим данным на основе субполосных представлений. Экономика. Информатика. 49(4): 833–853. DOI 10.52575/2687-0932-2022-49-4-833-853

## Analysis and Approximation of Functions from Empirical Data Based on Subband Representations

<sup>1</sup> Evgeniy G. Zhilyakov, <sup>2</sup> Ilya I. Lubkov, <sup>1</sup> Evgeniya V. Bolgova

<sup>1</sup> Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia

<sup>2</sup> Tehnoproekt LLC, 132a Korochanskaya St., Belgorod, 308009, Russia  
E-mail: zhilyakov@bsu.edu.ru

**Abstract.** Empirical data serve as the main source of knowledge about natural phenomena and processes. Many works are devoted to the development of methods for analyzing the patterns of their behavior depending on specific conditions, among which a special place is occupied by mathematical models that describe the patterns under study in a quantitative form. In the framework of this work, it is shown that many general aspects of the analysis and approximation of functions from empirical data can be considered within the framework of the proposed version of subband analysis and synthesis using the basic concepts of Fourier analysis.

**Keywords:** mathematical apparatus of subband analysis of empirical data, function approximation, applied problems



**For citation:** Zhilyakov E.G., Lubkov I.I., Bolgova E.V. 2022. Analysis and Approximation of Functions from Empirical Data Based on Subband Representations. Economics. Information technologies. 49(3): 833–853 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0932-2022-49-4-833-853

## Введение

Эмпирические данные (ЭД) – это результаты регистрации количественных значений некоторого параметра, характеризующего поведение исследуемого объекта (процесса) с интересующей исследователя точки зрения. Ниже в основном рассматривается ситуация пассивных экспериментов, когда на объект не оказывается специально организованных воздействий. Поэтому областью определения можно считать отрезки времени [Lanczos, 1959].

Регистрация ЭД осуществляется в дискретном наборе точек области определения параметра (физическая реализуемость процесса измерений).

Предполагается, что эмпирические данные отражают в общем случае неизвестное правило их генерации (функцию) в зависимости от некоторого аргумента (времени (временной ряд) или пространственных координат (изображение)).

Анализ этой функции предполагает описание её частных свойств, представляющих интерес с некоторых позиций литературный (энергетические проявления, скрытные периодичности, обнаружение разладок и т.д.).

В данной работе под аппроксимацией функций понимается построение представлений, позволяющих вычислить аппроксимации функциональных зависимостей без априорного постулирования их аналитического вида, что, как выразился Дж. Тьюки, равносильно навязыванию законов природе. При этом используются некоторые условия, определяющие качество аппроксимаций. [Методы компьютерной обработки..., 2001; González, Woods, 2008; Solomon, Breckon, 2010; Pratt, 2013].

Высокий интерес к этой проблематике обусловлен важностью ЭД, как источника научных знаний о природных явлениях и процессах. Поэтому существует большое количество работ, в которых описываются подходы к анализу и аппроксимации функций по ЭД, отражающие как специфику проводимых исследований, так и обосновывающие адекватность используемого при этом математического аппарата [González, Woods, 2008; Solomon, Breckon, 2010; Pratt, 2013]. В данной работе показано, что некоторые наиболее общие задачи анализа и аппроксимации функций по ЭД могут быть рассмотрены в рамках субполосных представлений, опирающихся на основные понятия Фурье – анализа последовательностей ЭД [Жиляков, Черноморец, 2009; Дворкович, Дворкович, 2012; Болгова, Черноморец, Черноморец, 2019; Заливин А и др., 2020; Жиляков Е. и др., 2022].

### Некоторые важные задачи анализа и аппроксимации функций по ЭД

В дальнейшем, как правило, предполагается, что совокупность вещественнозначных компонентов вектора  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)'$ , где штрих означает транспонирование, представляют собой соответствующее количество анализируемых ЭД.

Можно выделить некоторые направления их обработки, которые в настоящее время реализуются достаточно широко.

1. Декомпозиция векторов эмпирических данных (фильтрация) на заданное количество векторов такой же размерности

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)' = \sum_{r=1}^R \vec{y}_r, \quad (1)$$

например, при решении следующих содержательных задач:

- разделение сигналов, предназначенных разным абонентам при передаче информации;

- выделение скрытых периодичностей;
- отделение полезной с некоторой точки зрения компоненты

Пример (рис. 1): дендроряды и дендрохронология (дерево в качестве архива природных процессов).

Последовательности размеров годовых колец по оси абсцисс – годы.

Гладкая кривая-тренд характеризует ростовую функцию дерева (уровень восприятия внешних воздействий).

Красный график характеризует внешние условия роста (дерево как архив природных процессов-дендрохронология).

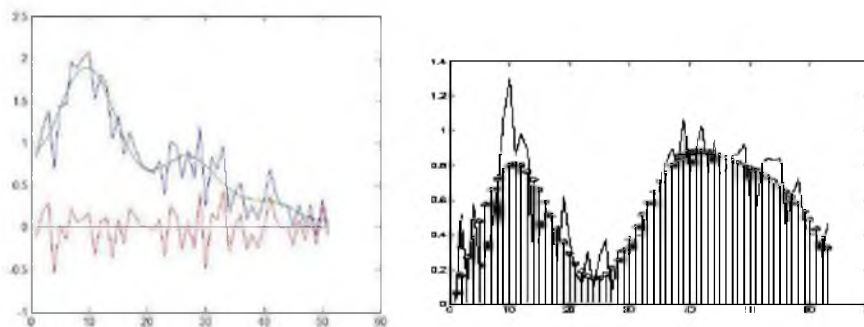


Рис. 1. Построение трендов дендрорядов  
 Fig. 1. Construction of dendror trends

2. Интерполяция и оценивание производных неизвестных функций по дискретным отсчетам при оценивании скорости изменений исследуемого параметра в задачах управления.

3. Обнаружение разладок – значимых изменений свойств, например, обнаружение сигналов на фоне шумов, сегментация речевых сигналов на словные отрезки (рис. 2) и т.д.

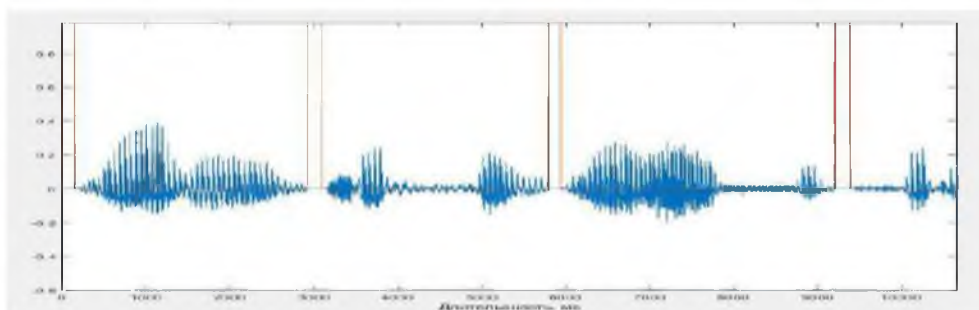


Рис. 2. Селекция пауз между словными отрезками речевого сигнала  
 Fig. 2. Selection of pauses between word segments of a speech signal

4. Сжатие данных (уменьшение объемов битовых представлений) при хранении и передаче [Радченко, 2002; Стрелков, Умняшкин, 2003; Артюшенко, Шелухин, Афонин, 2004; Авдеев, Чобану, 2006; Кряшев и др. 2011].

При этом достаточно часто используется прием представления функций с помощью ортогональных базисов

$$Q = (\vec{q}_1 \dots \vec{q}_N); Q'Q = QQ' = \text{diag}(1, \dots, 1)$$

Временные ряды

$$\vec{x} \approx \sum_{k=1}^M \alpha_k \vec{q}_k, M \ll N. \quad (2)$$

Изображения

$$F = \{f_{ik}\}, i, k = 1, \dots, N \approx \sum_{m,n=1}^R \alpha_{ik} \bar{q}_i \bar{h}_k, R \ll N. \quad (3)$$

$$H = (\bar{h}_1 \dots \bar{h}_N); H' H = H H' = \text{diag}(1, \dots, 1).$$

Пример: сжатие изображений (монохроматическое) земной поверхности.  
 Исходное изображение – посередине, сжатые почти в 100 раз – по краям.

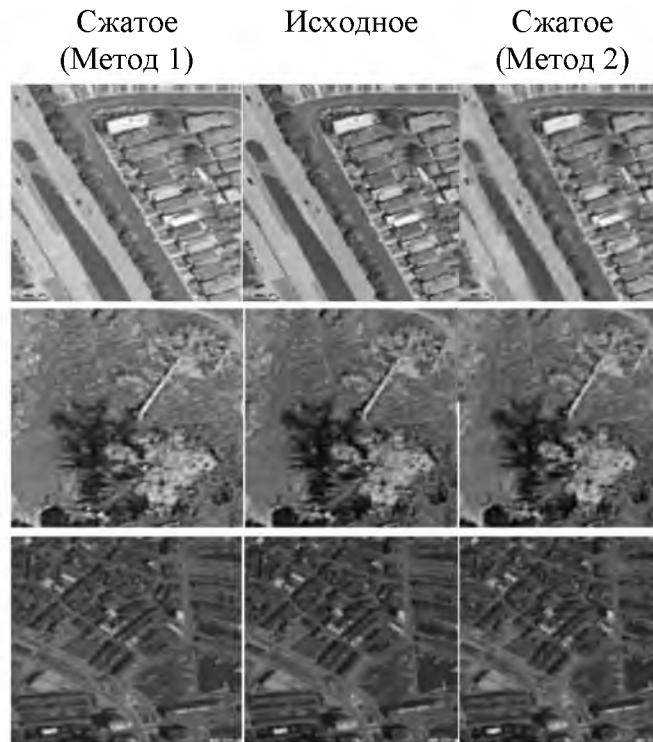


Рис. 3. Сжатие изображений (монохроматические) земной поверхности

Fig. 3. Compression of images (monochromatic) of the Earth's surface

Декларируемый в данной работе основной методологический принцип: при разработке средств анализа и аппроксимации функций по эмпирическим данным необходимо руководствоваться только самыми общими соображениями (гипотезами) о физических свойствах генерирующих их объектов.

Наиболее важным общим свойством физически реализуемых объектов является ограниченность их энергетических возможностей, следствием чего является непрерывность неизвестной функции и существование её производных, евклидовы нормы которых конечны

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty, \quad (4)$$

$$\|x^{(k)}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x^{(k)})^2(t) dt < \infty, k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Одним из следствий такого свойства является возможность использования представлений аппроксимируемых функций через комплексные функции с финитной областью определения (частотные представления) [Жилияков, Черноморец, 2009].

$$x(t) = \int_{z \in \Omega} X(z) \exp(jzt) dz / 2\pi, \quad (6)$$

где  $z$  – круговая частота  $z = 2\pi\nu$ , причем произведение  $\nu t$  является безразмерным числом;

$$\Omega = [-\Omega_2, -\Omega_1) \cup [\Omega_1, \Omega_2), \Omega = 2\pi\nu_0. \quad (7)$$

Справедливо дуальное соотношение

$$X(z) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-jzt) dt. \quad (8)$$

Интеграл в формуле (8) принято называть преобразованием Фурье, а результат интегрирования называется трансформантой Фурье.

Некоторые важные с позиций приложений элементы теории частотных представлений непрерывных функций с ограниченной евклидовой нормой (энергией)

Справедливо равенство Парсевалья

$$\|x\|^2 = \int_{z \in \Omega} |X(z)|^2 dz / 2\pi, \quad (9)$$

которое описывает распределение квадрата евклидовой нормы функции (энергии) в частотной области, что важно с физической точки зрения.

Особый интерес представляет то, что высокая концентрация энергии в окрестности некоторой точки частотной области может свидетельствовать о наличии специальных сигналов или квазициклических компонентов в исходной функции. Это обстоятельство является важным физическим обоснованием адекватности использования преобразований Фурье (частотных представлений) при анализе и аппроксимации функций по эмпирическим данным. Другие преобразования носят скорее формальный характер.

Интервал изменения аргумента при наблюдении за исследуемым объектом всегда имеет конечные размеры. Трансформанта Фурье конечного отрезка имеет вид

$$X_T(z) = \int_0^T x(t) \exp(-jzt) dt. \quad (10)$$

Подстановка сюда представления (6) дает

$$X_T(z) = \exp(jTz/2) \int_{u \in \Omega} X(u) \exp(-jTu/2) \sin(T(u-z)/2) / (\pi(u-z)) du. \quad (11)$$

Таким образом, областью определения трансформанты Фурье конечного отрезка функции служит вся числовая ось. Это необходимо учитывать при дискретизации аргумента в методах цифровой обработки эмпирических данных

### Роль частотных представлений при решении проблемы дискретизации аргумента

Проблема заключается в выборе шага эквидистантной дискретизации на основе разрешения противоречия между стремлением максимально сократить количество отсчетов  $N$  с приемлемым при этом искажением информации об исходной непрерывной функции

$$x_k = x(k\Delta t), k = 1, \dots, N; (N-1)\Delta t = T. \quad (12)$$

Для оценки уровня искаженности информации за счет дискретизации целесообразно использовать сопоставление характеристик исходной функции с характеристиками её интерполяционной функции, которая должна быть непосредственно связана с шагом дискретизации.



В основе построения такой сопоставляемой интерполяционной функции используется понятие трансформанты Фурье дискретизированной последовательности отсчетов

$$X_d(z) = \sum_{k=1}^N x_k \exp(-jz(k-1)\Delta t). \quad (13)$$

Легко показать, что эта трансформанта является периодической

$$X_d(z) = X_d(z + m2\pi / \Delta t), |m| = 0, 1, \dots \quad (14)$$

с периодом  $2\pi / \Delta t$ .

В виду свойства ортогональности комплексных экспонент на этом периоде

$$\int_u^{u+2\pi/\Delta t} \exp(-jz(k-i)\Delta t) dz = 0, i \neq k, \quad (15)$$

справедливо дуальное представление (обратное преобразование Фурье)

$$x_k = \Delta t \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} X_d(z) \exp(jz(k-1)\Delta t) dz / 2\pi. \quad (16)$$

Отсюда легко получить интерполяционную формулу, если произвести замену  $(k-1)\Delta t$  на  $t$  (формулой Котельникова-Шеннона-Уиттекера)

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^N x_k \sin(\pi(t/\Delta t - k + 1)) / \pi(t/\Delta t - k + 1). \quad (17)$$

В качестве меры искажения информации можно использовать евклидову норму разности между интерполяционной и исходной функцией, значения которой могут быть получены с меньшим интервалом дискретизации (прореживание ЭД).

Справедливо соотношение Найквиста, устанавливающее зависимость трансформанты Фурье отсчетов от трансформанты исходной функции

$$X_d(z) = X(z) + \sum_{m=1}^{\infty} [X(z + m2\pi / \Delta t) + X(z - m2\pi / \Delta t)].$$

Именно оно позволяет сделать и следующий более общий вывод, который имеет асимптотическую форму.

Предположим, что для исходной функции бесконечной длительности (асимптотика) при соответствующем выборе шага дискретизации может быть выполнено тождество (финитный спектр)

$$X(|u| > \pi / \Delta t) = 0, \quad (19)$$

Тогда из соотношения (18) следует равенство

$$X_d(z) = X(z), |z| < \pi / \Delta t, \quad (20)$$

так что интерполяционная формула (17) преобразуется в точную

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \sin(\pi(t/\Delta t - k + 1)) / \pi(t/\Delta t - k + 1), \quad (21)$$

Условие (20) возможности точной интерполяции на основе (21) и составляет суть так называемой теоремы отсчетов.

## Некоторые современные приемы анализа ЭД на основе частотных представлений

1. Спектральный анализ на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ)

$$X_d(2(m-1)\pi/N\Delta t) = \sum_{k=1}^N x_k \exp(-j2\pi(k-1)(m-1/N)), m=1, \dots, N. \quad (**)$$

Распространенность ДПФ обусловлена наличием быстрых алгоритмов его вычисления (БПФ), позволяющего сократить вычисления в  $N / \log_2(N)$  раз. В настоящее время выпускаются специальные процессоры, реализующие БПФ на аппаратном уровне.

2. Выделение компонент на основе цифровых свертков (КИХ-фильтры)

$$y_k = \sum_{m=0}^M w_m x_{k-m}, k=1, \dots, N. \quad (***)$$

Зависимость выходных последовательностей таких фильтров от спектра Фурье входных векторов имеет вид

$$y_k = \Delta t \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} W(z)X(z)dz / 2\pi. \quad (***)$$

Таким образом, в соответствии с формулой (11) нельзя обеспечить зависимость только от одной достаточно узкой субполосы области определения трансформанты Фурье входных данных.

Очевидно, что широкое применение ДПФ и КИХ-фильтрация свидетельствует о важности обработки ЭД на основе субполосной методологии.

Под субполосной методологией понимается анализ и аппроксимация функций с позиций разбиения частотной полосы на непрерывающиеся субполосы

$$V_r = [-v_{r2}, -v_{r1}) \cup [v_{r1}, v_{r2}), r=0, \dots, R, \quad (22)$$

где имеется в виду нормированная круговая частота  $v = z\Delta t$ ;

$$v_{R2} = \pi; v_{01} = 0; v_{r-1,2} = v_{r1}, r=1, \dots, R. \quad (23)$$

Важно отметить, что современная теория КИХ-фильтрации позволяет создать наборы взаимосвязанных фильтров для прямой фильтрации и восстановления после прореживания исходного входного воздействия. Именно на этой основе созданы методы так называемого кратномасштабного анализа, который принято называть вейвлет-анализом.

## Разработанные в БелГУ методы субполосного анализа и аппроксимации функций по ЭД

**Построение интерполяционной функции и аппроксимации её производной на основе вариационного условия в рамках субполосных представлений**

Воспользуемся соотношением между интерполирующей функцией и её производной  $f(t)$

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(0) + \int_0^t f(t)dt \quad (24)$$

При этом полагаем выполнение интерполяционных условий



$$\hat{x}(k\Delta t) = x(k\Delta t) = x_k, k = 0, \dots, N. \quad (25)$$

Решение задачи интерполяции ищем в классе функций, для производных которых справедливо частотное представление (финитный спектр)

$$f(t) = \int_{-V}^V F(z) \exp(jzt) dz / 2\pi, \quad (26)$$

а для однозначности отбора кроме выполнения равенств (23) введем вариационное условие минимизации евклидовой нормы

$$\|f\|^2 = \int_{-V}^V |F(z)|^2 dz / 2\pi = \min. \quad (27)$$

Подстановка представления (26) в (24) с учетом требований (25) дает систему уравнений

$$x_k - x_0 = r_k = \int_{-V}^V F(z) \exp(jzk\Delta t / 2) \sin(zk\Delta t / 2) dz / \pi z. \quad (28)$$

Очевидно, что эти уравнения и условие (27) формируют вариационную изопериметрическую задачу, решение которой имеет вид

$$F(z) = \sum_{n=0}^N b_n \exp(-jzn\Delta t / 2) \sin(zn\Delta t / 2) / \pi z \quad (29)$$

Подстановка этой формы в (28) дает систему уравнений

$$A\vec{b} = \vec{r} = (r_1, \dots, r_N)', \quad (30)$$

где  $A = \{a_{kn}\}, k, n = 1, \dots, N;$

$$a_{kn} = 2 \int_0^V \sin(zn\Delta t / 2) \sin(zk\Delta t / 2) \cos(z(k-n)\Delta t / 2) dz / (\pi z)^2. \quad (31)$$

Можно показать, что при выполнении условия

$$V = \pi / \Delta t, \quad (32)$$

матрица с элементами (31) является неособенной [Gantmakher, 1959; Horn, Johnson, 2013].

Дальнейшие построения оценки интерполирующей функции и её производной заключаются в численном интегрировании

$$\tilde{x}(t) = x_0 + 2 \sum_{n=1}^N b_n \int_0^V \sin(zt / 2) \sin(zn\Delta t / 2) \cos(z(t - n\Delta t / 2)) dz / (\pi z)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^N b_n \int_0^V \sin(zn\Delta t / 2) \cos(z(t - n\Delta t / 2)) dz / \pi z.$$

### Формулировка методологического принципа субполосного анализа и аппроксимации функций по ЭД

Очевидно, что при разбиении частотной области на субполосы (22) равенство Парсеваля для дискретных ЭД преобразуется к виду суммы этих частей

$$\|\tilde{x}\|^2 = \sum_{r=0}^R P_r(\tilde{x}). \quad (33)$$



Поэтому представляется естественным в качестве основного методологического принципа построения адекватных методов субполосного анализа и аппроксимации функций по ЭД использовать понятия части энергии (части квадрата евклидовой нормы), приходящейся на соответствующую субполосу (попадающей в субполосу)

$$P_r(\vec{x}) = \int_{v \in V_r} |X_d(v)|^2 dv / 2\pi. \quad (34)$$

Целесообразность использования этого принципа обусловлена возможностью построения на его основе методов (в том числе оптимальных) решения основных прикладных задач анализа и аппроксимации функций по ЭД с использованием адекватного математического аппарата [Жилияков, 2015].

### Математический аппарат субполосной обработки ЭД на основе сформулированного принципа

Подстановка в формулу (34) определения трансформанты Фурье дискретизованных данных (13) позволяет получить представление этой характеристики в виде квадратичной формы

$$P_r(\vec{x}) = \vec{x}' \vec{A}_r \vec{x} \quad (35)$$

с субполосными матрицами  $A_r = \{a_{ik}^r\}, i, k = 1, \dots, N$ , элементы которых определяются соотношениями

$$a_{ik}^r = \int_{v \in V_r} \exp(-jv(i-k)) dv / 2\pi = (\sin(v_{r2}(i-k)) - \sin(v_{r1}(i-k))) / \pi(i-k), \quad (36)$$

$$a_{ii}^r = (v_{r2} - v_{r1}) / \pi.$$

Таким образом, при анализе функций характеристику (34) можно вычислить непосредственно в области определения ЭД.

### Некоторые важные для дальнейшего свойства субполосных матриц

1. Непосредственно из (34) и (35) следует положительная определенность субполосных матриц, а соотношения (36) показывают, что они являются симметричными.

2. В виду симметрии и положительной определенности они обладают полной системой ортонормальных собственных векторов (являются матрицами простой структуры), соответствующими неотрицательным собственным числам

$$A_r = Q_r L_r Q_r' Q_r = (\vec{q}_1^r \dots \vec{q}_N^r), \quad (37)$$

$$A_r Q_r = Q_r L_r Q_r Q_r' = Q_r' Q_r = \text{diag}(1, \dots, 1); \quad (38)$$

$$L_r = \text{diag}(\lambda_1^r, \dots, \lambda_N^r), \lambda_1^r > \lambda_2^r > \dots > \lambda_N^r > 0;$$

Набор собственных векторов любой субполосной матрицы может служить полным ортонормальным базисом линейного пространства векторов соответствующей размерности

$$\vec{x} = Q_r \vec{\alpha}_r, \vec{\alpha}_r = (\alpha_{1r}, \dots, \alpha_{Nr})', \quad (39)$$

$$\alpha_{ir} = (\vec{x}, \vec{q}_i^r) = \int_{v \in V_r} X(v) G_i^r(-v) dv / 2\pi + \int_{v \in V_r} X(v) G_i^r(v) dv / 2\pi. \quad (40)$$



$$G_i^r(v) = \sum_{k=1}^N q_{ki}^r \exp(-j(k-1)v).$$

Очевидно, что подстановка представлений (39) в (35) дает соотношение, позволяющее оценить вклад проекций исходного вектора на собственные векторы

$$P_r(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N \lambda_k^r \alpha_{kr}^2, \quad (41)$$

### Субполосные свойства собственных чисел и векторов (базисов)

$$0 < \lambda_{\bar{v}}^r = \int_{v \in V_r} |G_i^r(v)|^2 dv / 2\pi \leq 1; \quad (42)$$

$$\lambda_{J_r}^r \approx 0, J_r = [Na_{ii}^r] + 4. \quad (43)$$

С другой стороны, если выполняется неравенство

$$K_r = [Na_{ii}^r] - 6 > 0, \quad (44)$$

то с высокой точностью выполняются равенства

$$\lambda_1^r \approx \dots \approx \lambda_{K_r}^r \approx 1. \quad (45)$$

Квадратные скобки означают целую часть числа.

Сопоставление формул (42) и (43) с (40) показывает, что только проекции на собственные векторы, соответствующие единичным собственным числам, полностью определяются отрезком трансформанты из заданной субполосы.

### Построение оптимальных векторных аппроксимаций последовательностей ЭД на основе субполосных мер погрешностей (критериев)

Под векторной аппроксимацией последовательностей ЭД имеются в виду удовлетворяющие некоторым условиям векторы, размерность которых совпадают с количеством анализируемых данных. Отметим, что такие аппроксимации можно считать функциями отсчетов соответствующего аргумента.

В качестве меры взвешенной погрешности субполосной аппроксимации исходного вектора некоторым вектором  $\vec{y}$  такой же размерности и трансформантой Фурье  $Y(v)$  предлагается использовать функционал следующего вида

$$G_r(\vec{x}, \vec{y}, b) = (1-b)P_r(\vec{x} - \vec{y}) + b(\|\vec{y}\|^2 - P_r(\vec{y})), 0 \leq b < 1. \quad (46)$$

Отметим, что здесь первое слагаемое в правой части характеризует величину отклонения отрезков трансформанта Фурье в рассматриваемой субполосе, а второе, согласно равенству Парсеваля, служит мерой невыполнения тождества

$$Y(v) \equiv 0, v \notin V_r. \quad (47)$$

Нетрудно показать справедливость следующего утверждения

$$G(\vec{x}, B_r^b \vec{x}, b) = \min G(\vec{x}, \vec{z}, b), \forall \vec{z} \in R^N. \quad (48)$$

где

$$B_r^b = (1-b)(bI + (1-2b)A_r)^{-1} A_r, I - \text{diag}(1, \dots, 1). \quad (48')$$

Таким образом, соотношение

$$\vec{y}_r^b = B_r^b \vec{x} \quad (49)$$

определяет оптимальную в смысле минимума критерия (46) субполосную аппроксимацию исходной функции. Очевидно, что её использование можно интерпретировать как оптимальную фильтрацию с прямоугольной частотной характеристикой [Жиляков, 2015].

Важным частным случаем является выбор  $b=0.5$ , так что формула (49) принимает вид

$$\vec{y}_r = A_r \vec{x} \quad (50)$$

Имея в виду формулу (36), легко показать, что компоненты аппроксимирующего вектора зависят только от отрезка трансформанты Фурье исходного вектора в заданной субполосе, то есть имеет место представление

$$y_{kr} = \int_{v \in V_r} X(v) \exp(jv(k-1)) dv / 2\pi. \quad (50')$$

Важность этого отличия от КИХ-фильтрации (\*\*\*\*) проявляется при вычислении аппроксимирующих векторов, когда в соседней субполосе содержится большая доля энергии.

Пример. Сопоставление КИХ-фильтрации и использования (50).

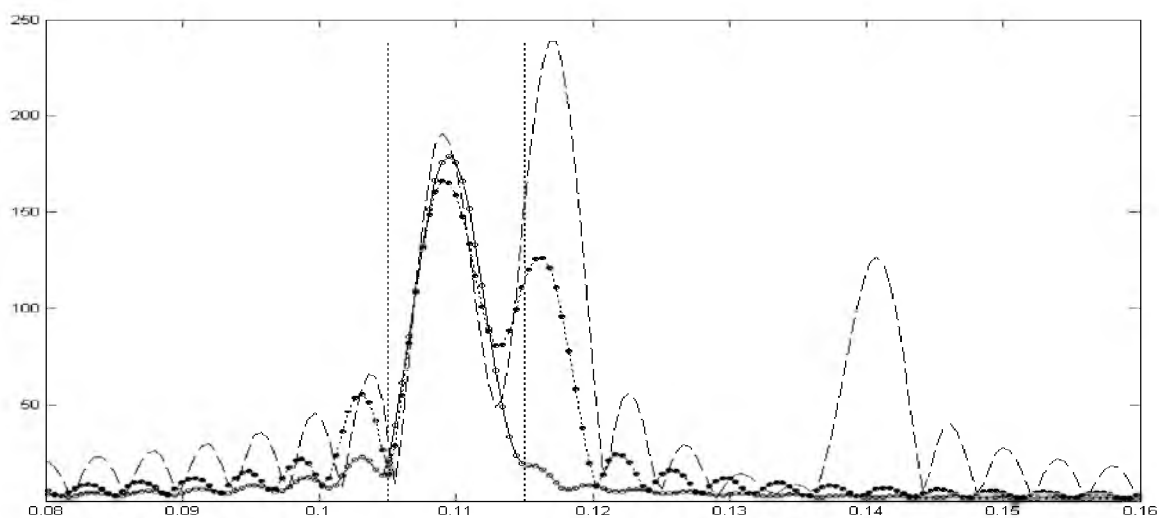


Рис. 4. Зависимости модулей трансформант Фурье (ось ординат): исходного сигнала (пунктир) и выходных последовательностей КИХ- фильтра (линия с маркером «точка»), оптимального фильтра (линия с маркером «кружок») от нормированной частоты (ось абсцисс) в диапазоне частот ( $v_1 = 0,105\pi$ ,  $v_2 = 0,115\pi$ ) (вертикальные пунктирные линии)

Fig. 4. Dependences of the modules of the Fourier transformants (ordinate axis): the source signal (dotted line) and the output sequences of the FIR filter (line with marker "dot") and the optimal filter (line with marker "circle") on the normalized frequency (abscissa axis) in the frequency range ( $v_1 = 0,105\pi$ ,  $v_2 = 0,115\pi$ ) (vertical dotted lines)

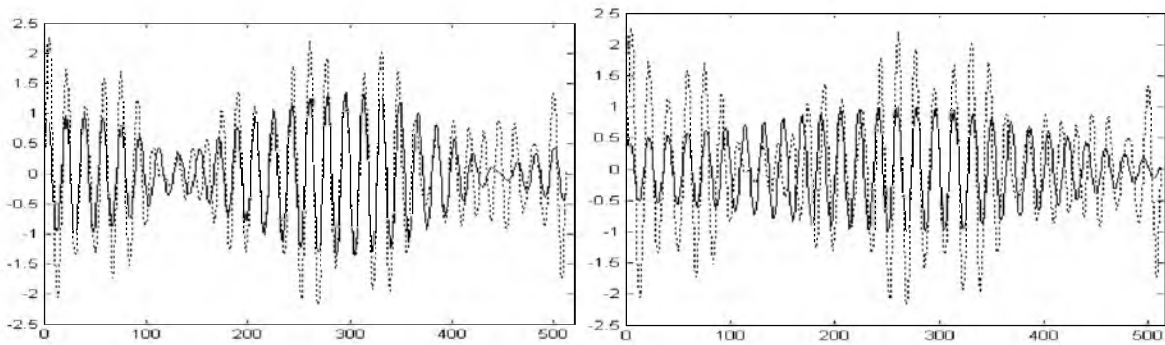


Рис. 5. Зависимости (ось ординат): исходного сигнала (пунктирная линия) и выходных последовательностей (сплошная линия) а– КИХ- фильтра; б– оптимального фильтра от номеров отсчетов (ось абсцисс) для границ частотного интервала ( $\nu_1 = 0,105\pi$ ;  $\nu_2 = 0,115\pi$ )

Fig. 5. Dependences (ordinate axis) of: the source signal (dotted line) and output sequences (solid line) of the a-filter; b- optimal filter on the sample numbers (abscissa axis) for the boundaries of the frequency interval ( $\nu_1 = 0,105\pi$ ;  $\nu_2 = 0,115\pi$ )

### Свойство аддитивности полного набора аппроксимаций вида (50)

Так как при разбиении формул (22) и (23) на субполосы имеет место равенство

$$\sum_{r=0}^R A_r = \text{diag}(1, \dots, 1) = I, \quad (51)$$

то для векторов вида (50) будет выполняться аддитивное свойство

$$\sum_{r=0}^R \bar{y}_r = \bar{x}. \quad (52)$$

Другие способы фильтрации таким важным свойством не обладают.

Свойство (52) зависимости выходных последовательностей фильтров вида (50) только от отрезков трансформанты Фурье в соответствующих субполосах было использовано при синтезе в слуховых аппаратах акустических воздействий на слуховую систему в виде линейной формы

$$\hat{\bar{x}}_w = \sum_{r=0}^R w_r \bar{y}_r, w_r > 0. \quad (53)$$

Весомости  $w_r > 0$  определяются при настройке слухового аппарата на этапе анализа ослабления реакции слуха на воздействие акустического колебания, возбуждаемого синусоидальными сигналами в соответствующей субполосе.

С учетом правой части (50) соотношение (53) нетрудно преобразовать к виду удобному для вычислений

$$\hat{\bar{x}}_w = \sum_{r=0}^R w_r A_r \bar{x} = A_w \bar{x}, \quad (53')$$

так как суммарную матрицу и её собственные векторы можно вычислить заранее.

### Субполосная аппроксимация с сохранением отрезка трансформанты Фурье исходного вектора

Использование равенства  $b=0$  равносильно отказу в контроле за трансформантой Фурье аппроксимирующего вектора вне субполосы (см. соотношение (47)). В этом случае

возникает возможность почти точного совпадения отрезков трансформант Фурье исходного и аппроксимирующего векторов в рассматриваемой субполосе.

В самом деле, для любого искомого вектора справедливо представление

$$\vec{y} = Q_r \vec{\beta}_r, \quad (54)$$

подстановка которого в функционал (46) при  $b=0$  дает

$$G_r(\vec{x}, \vec{y}, 0) = P_r(\vec{x} - \vec{y}) = \sum_{k=1}^N \lambda_k^r (\bar{\alpha}_k^r - \beta_k^r)^2. \quad (54')$$

Очевидно, что при выполнении (43), когда количество значимо отличающихся от нуля собственных чисел конечно, а также выборе коэффициентов в формуле (54) из условий

$$\beta_k^r = \alpha_k^r, k = 1, \dots, J_r + m; \beta_k^r = 0, k > J_r + m; 0 \leq m \leq N - J_r \quad (55)$$

для отрезков трансформант Фурье с высокой точностью выполняется следующее тождество (оптимальность)

$$Y(v) \equiv X(v), v \in V_r. \quad (55')$$

Таким образом, условие (55) определяет множество векторов, для которых выполняется тождество (55'), причем выбор

$$m = 0$$

дает вектор с минимальной евклидовой нормой.

Именно использование базиса собственных векторов и свойство близости к нулю части собственных чисел субполосных матриц позволяет реализовать требование (55').

### Субполосные решающие функции при некогерентном обнаружении неизвестных узкополосных сигналов на фоне широкополосного шума

Начальная гипотеза формулируются следующим образом:

$H_0$ : наблюдаемые ЭД определяются некоторым фоновым шумом

$$\vec{x} = \vec{u}, \quad (+)$$

а альтернатива предполагает, что наблюдаемые данные представляют собой аддитивную смесь шума и некоторого неизвестного сигнала

$$H_1: \vec{x} = \vec{u} + \vec{s}. \quad (++)$$

В качестве основания для признания несправедливости нулевой гипотезы предлагается использовать выполнение неравенства

$$\max P_r(\vec{x}) / \hat{P}_r(\vec{u}) > h_r, 1 \leq r \leq R. \quad (+++)$$

При этом предполагается, что пороги  $h_r$  и средние значения субполосных частей энергий фонового шума  $\bar{P}_r(\vec{u})$  могут быть получены на этапе обучения при наличии необходимого количества отрезков (векторов) стационарного шума.

Очевидно, что при справедливости альтернативы (++) имеет место

$$P_r(\vec{x}) = P_r(\vec{s}) + 2\vec{s}' \hat{u}_r + P_r(\vec{u}), \quad (++++)$$

где

$$\hat{u}_r = A_r \vec{u}.$$



В соответствии с формулой (50') этот вектор и последнее слагаемое в правой части (++++) полностью определяется отрезком трансформанты Фурье мешающего шума из рассматриваемой субполосы, то есть именно этот отрезок трансформанты шума и влияет на значения решающей функции (+++).

Высокая вероятность обнаружения сигналов достигается тогда, когда энергия сигнала практически полностью содержится в одной из частотных субполос. В этом случае энергия сигнала используется в полной мере и при равномерном распределении энергии шума в частотной области достигается максимальное отношение сигнал/шум

$$P_k(\vec{x})/P_r(\vec{u}) \approx \|\vec{s}\|^2 / P_r(\vec{u}) + 1. \quad (56)$$

Рисунок 2 иллюстрирует применение такого подхода к обнаружению пауз в междусловными отрезками речевых сигналов.

### Концепция информационных субполос наблюдаемой последовательности ЭД и её применение для анализа и аппроксимации функций

Правая часть следующего соотношения

$$D_r^2 = \|\vec{x}\|^2 (v_{r2} - v_{r1}) / \pi = \|\vec{x}\|^2 a_{ii}^r \quad (57)$$

определяет приходящуюся на субполосу часть энергии вектора  $\vec{y}$ , модуль трансформанты Фурье которого постоянен в частотной области, а полная энергия совпадает с полной энергией исследуемого вектора

$$\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2. \quad (58)$$

Ясно, что исходный набор субполос можно разбить на два подмножества:  $R_+$ , для которых выполняются неравенства

$$S_r = P_r(\vec{x}) / \|\vec{x}\|^2 - a_{ii}^r \geq 0, r \in R_+ \quad (59)$$

и  $R_-$ , для которых они не справедливы.

Субполосы, для которых выполняются неравенства (59) представляется естественным считать более важными и именовать информационными. Их совокупность (множество) определяет соответствующую информационную субполосную матрицу

$$A_+ = \sum_{r \in R_+} A_r. \quad (60)$$

Собственные векторы этой матрицы

$$A_+ Q_+ = Q_+ L_+ \quad (61)$$

могут служить базисом векторного пространства, причем условия вида (55) также определяют вектор, удовлетворяющий требованию (55') для объединённого частотного интервала

$$V_+ = \bigcup_{r \in R_+} V_r. \quad (62)$$

Для вычисления компонентов аппроксимации исходного вектора оптимальной в смысле минимизации критерия (46) при  $b=0$ , естественно использовать соотношение (аналогично (50))

$$\vec{y}_+ = A_+ \vec{x}. \quad (63)$$

С учетом (41), полноты базиса собственных векторов и соотношения между следами подобных матриц неравенства (59) можно привести к следующему виду

$$\bar{\lambda}_r - \lambda_{\text{mean}}^r \geq 0, \quad (64)$$

где

$$\bar{\lambda}_r = \sum_{k=1}^N \lambda_k^r w_k^r; \quad (65)$$

$$\lambda_{\text{mean}}^r = \sum_{k=1}^N \lambda_k^r / N; \quad (66)$$

$$w_i^r = \alpha_{ri}^2 / \sum_{k=1}^N \alpha_{ri}^2. \quad (67)$$

Таким образом, левая часть (64) определяет разность между результатом усреднения с весами (67) собственных чисел субполосной матрицы и их средним значением.

Непосредственно из способа определения информационного частотного интервала следует справедливость следующего утверждения.

Каждому вектору ЭД соответствует единственный информационный частотный интервал, удовлетворяющий требованию

$$\bar{\lambda}_+ - \sum_{k=1}^N \lambda_k^+ / N = \max. \quad (68)$$

Входящие сюда переменные определяются очевидным образом.

### Примеры некоторых применений концепции информационных субполос

1. Оптимальные информационные аппроксимации. Графики на рисунке 1 иллюстрируют применение понятия информационной субполосной матрицы к построению трендов на основе представления

$$\bar{d}_+ = \sum_{k=1}^{J_+} \alpha_k^+ \bar{q}_k^+ \quad (68')$$

оптимальных в смысле условия (55') информационных аппроксимаций гипотетических функций (гладкие кривые), характеризующих реакцию деревьев на внешние воздействия, графики которых представляют собой изрезанные кривые.

Отметим, что для аппроксимации в виде гладкой кривой очень трудно подобрать аналитические зависимости.

2. Разложение по базису собственных векторов информационной субполосной матрицы вида (68') позволяет достаточно эффективно сжать данные с сохранением возможности точного воспроизведения отрезка трансформанты Фурье в информационном частотном интервале это свойство можно считать критерием качества восстановления исходных данных после сжатия.

Вычислительные эксперименты показывают, что на этой основе можно при сохранении разборчивости речи достичь сжатия речевых данных до скорости потока порядка 2 килобит в секунду.

3. В качестве важного применения концепции информационных субполос можно указать стеганографию, то есть скрытое внедрение в исходный вектор некоторого вектора, который может быть использован в разных целях, в том числе для контроля за правомерностью использованием, например, аудиоданных. В качестве примера такого внедрения укажем соотношение для модификации исходного вектора

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x} + (c - \alpha_k^+) \bar{q}_k^+, \quad (68)$$



где  $\vec{q}_k^+$  – собственный вектор информационной субполосной матрицы, соответствующий равному нулю собственному числу,  $\alpha_i^+$  – проекция исходного вектора на него, а  $d$  – некоторое число, позволяющее определить факт внедрения информации при контрольной проверке.

### Обработка двумерных эмпирических данных на основе субполосных представлений

Для определенности двумерные эмпирические данные будем именовать изображениями.

Формальное определение двумерной трансформанты Фурье для изображения

$$F = \{f_{ik}\}, i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, M \quad (69)$$

имеет вид

$$\Phi(z, u) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M f_{ik} \exp(-jz(i-1)) \exp(-ju(k-1)), -\pi \leq z, u < \pi. \quad (70)$$

В качестве основной характеристики предлагаемого варианта субполосного анализа и аппроксимации двумерных функций по двумерным эмпирическим данным предлагается использовать часть энергии, попадающей в двумерные подобласти области определения трансформанты Фурье (70), имеющие следующую конфигурацию.

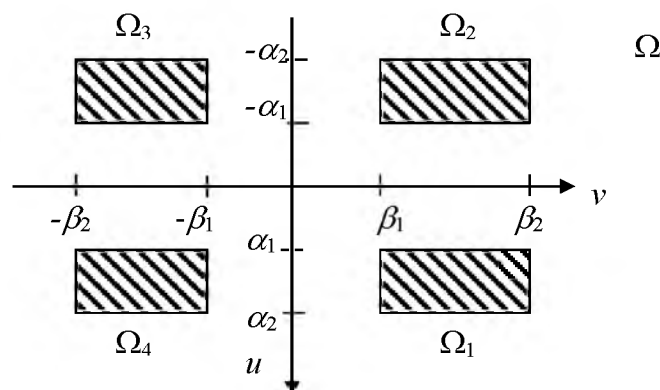


Рис. 6. Конфигурация двумерной субполосы  
 Fig. 6. Configuration of a two-dimensional subband

Математическое определение этой характеристики имеет следующий вид

$$P_{\Omega}(F) = \int_{z \cap u \in \Omega} |\Phi(z, u)|^2 dz du / 4\pi^2 = \text{tr}(A_{\Omega} F B_{\Omega} F^*), \quad (71)$$

где  $\text{tr}$  означает след матрицы, а элементы субполосных матриц  $A_{\Omega}$  и  $B_{\Omega}$  определяются соотношениями

$$a_{ik}^{\Omega} = (\sin(\alpha_2(i-k)) - \sin(\alpha_1(i-k))) / (\pi(i-k)), i, k = 1, \dots, N; \quad (72)$$

$$b_{ik}^{\Omega} = (\sin(\beta_2(i-k)) - \sin(\beta_1(i-k))) / (\pi(i-k)), i, k = 1, \dots, M. \quad (73)$$

Оптимальная аппроксимация в смысле минимума двумерного обобщения

$$G_{\Omega}(F, D) = P_{\Omega}(F - D) + \|D\|^2 - P_{\Omega}(D) \quad (\%)$$

критерия (46) определяется соотношением



$$D_{\Omega} = A_{\Omega} F B_{\Omega}. \quad (66)$$

Для нее также выполняется аддитивное свойство вида (56).

Положим

$$\hat{F}_{\Omega} = \sum_{r=1}^{J_A} \sum_{t=1}^{J_B} \gamma_{rt}^{\Omega} \bar{q}_r^{\Omega} \bar{h}_t^{\Omega}, \quad (74)$$

где

$$\gamma_{rt}^{\Omega} = \bar{q}_r^{\Omega} F \bar{h}_t^{\Omega}; \quad (75)$$

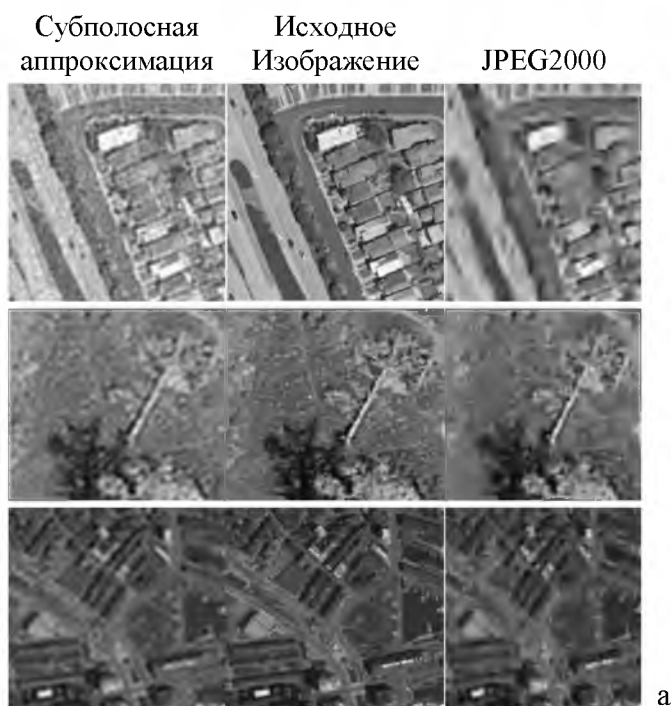
$\bar{q}_r^{\Omega}$  и  $\bar{h}_t^{\Omega}$  – собственные векторы матриц с элементами (72) и (73) соответственно.

Можно показать, что эта двумерная субполосная аппроксимация исходного изображения является наилучшей в смысле выполнения тождества для двумерных отрезков трансформант Фурье в рассматриваемой двумерной подобласти, то есть

$$\hat{\Phi}(z, u) \equiv \Phi(z, u), (z \cap u) \in \Omega. \quad (76)$$

На основе использования аппроксимации (74), когда двумерная подобласть представляет собой квадрат вокруг начала координат, построена процедура уменьшения объемов битовых представлений изображений с сохранением информации о низкочастотных компонентах. На рисунках ниже приведены результаты вычислительных экспериментов по сжатию данных в сравнении с наиболее эффективным из применяемых ныне методов JPEG2000. В основе JPEG2000 используется идеология крупномасштабного анализа в частотной области (вейвлет-анализ) с помощью КИХ-фильтров. Программная реализация метода в рамках пакета МАТЛАБ доступна в сети Интернет. Её применение не позволило достичь сжатия более чем 1000 раз. При этом на восстановленных изображениях достаточно узнаваемые объекты сохраняются только для сжатия в 250 раз. При использовании предлагаемой субполосной аппроксимации узнаваемость объектов сохраняется до степеней сжатия в 500 раз и иногда более.

Время реализации предлагаемых алгоритмов субполосной аппроксимации в 7-9 раз меньше, чем для JPEG2000, что важно со многих точек зрения.



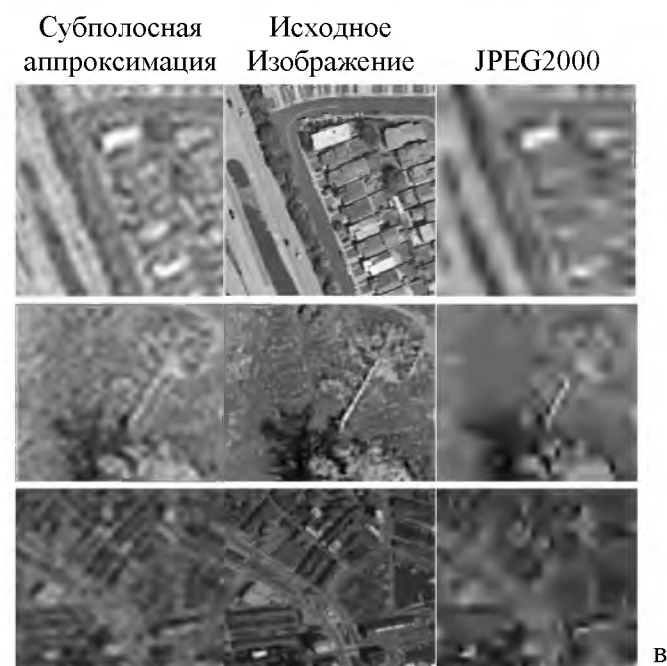
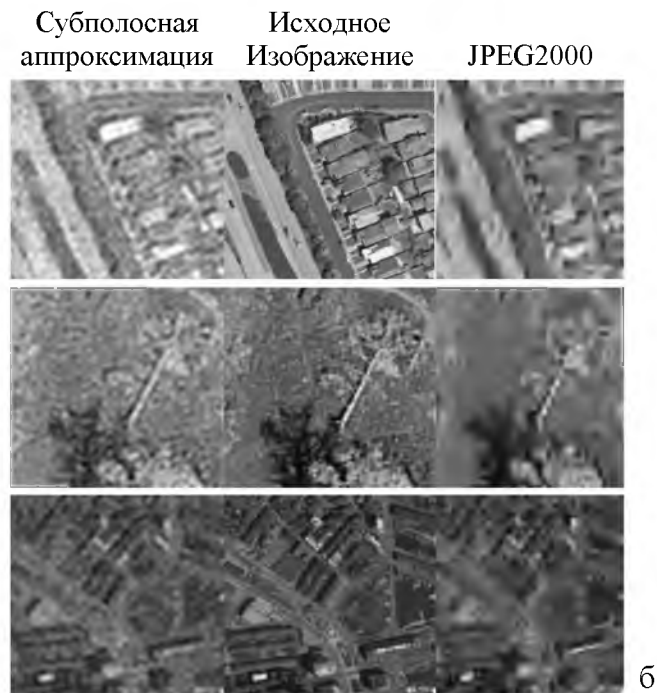


Рис. 7. Аппроксимация изображений по сжатым битовым представлениям:  
а – степень сжатия 250, б – степень сжатия 500, в – степень сжатия 1000  
Fig. 7. Approximation of images by compressed bit representations:  
a – compression ratio 250, b – compression ratio 500, c – compression ratio 1000

### Использование субполосных представлений для решения некоторых других прикладных задач анализа и аппроксимации функций по эмпирическим данным

1. Идентификация словных отрезков речевых сигналов по заданному прецеденту (отрезку той же записи)

**Формулировка задачи:** в записи речевого сигнала оператором на слух определяется словный сегмент, содержащий заданную словоформу. Необходимо в остальной части записи в автоматическом режиме найти идентичные словные сегменты, в том смысле, что они порождены при произнесении такой же словоформы одним и тем же лицом.

Одна из трудностей – обучение по одному прецеденту, что приводит к необходимости аугментации (размножения). Для этого и использовалось искажение информационной компоненты образца. Решающая процедура при идентификации строилась на основе субполосных представлений.

2. Поиск нечетких дубликатов в сканированных изображениях рукописного текста.

Задача формулируется аналогично поиску идентичных фрагментов в записях речевых сигналов, имеются те же трудности обучения по прецеденту и в построении решающей функции, для которой использовались двумерные субполосные представления.

3. Прецедентное распознавание объектов на изображениях земной поверхности.

4. Синтез сигнально- кодовых конструкций (СКК) при передаче ЭД по каналам связи с минимальным уровнем межканальной интерференции и возможностью восстановления искаженных фрагментов.

Форма СКК

$$\vec{s} = QI_{\Omega}\vec{x}, \quad (76)$$

где столбцы матрицы представляет собой собственные векторы субполосной матрицы, соответствующие единичным собственным числам. Таким образом, независимо от свойств ЭД для трансформанты Фурье СКК обеспечивается условие малости энергии вне субполосы (мера межканальной интерференции), то есть

$$1 - \vec{s}' A_{\Omega} \vec{s} / \|\vec{s}\|^2 \ll 1. \quad (77)$$

Восстановление искаженных фрагментов СКК.

Ясно, что в рассматриваемых условиях формирования СКК будет выполняться равенство

$$\vec{s} = A_{\Omega} \vec{s}, \quad (78)$$

то есть СКК также будет собственным вектором с единичным собственным числом субполосной матрицы. Это позволяет рассмотреть задачу восстановления одной части СКК по другой.

Для определенности положим

$$\vec{s} = (\vec{s}'_1, \vec{s}'_2)'. \quad (79)$$

Тогда из (78) для составляющих вектора СКК нетрудно получить уравнение

$$(I - A_{11})\vec{s}'_1 = A_{12}\vec{s}'_2, \quad (80)$$

где имеются в виду блоки субполосной матрицы соответствующей размерности, причем слева стоит квадратная матрица, в формировании которой участвует единичная.

Очевидно, что при существовании  $(I - A_{11})^{-1}$  уравнение (80) можно разрешить относительно компоненты СКК  $\vec{s}'_1$ , то есть восстановить её по второй части СКК. Таким образом, появляется возможность компенсации кратковременных искажений, например, при многолучевом распространении сигнала в условиях городской застройки.

Этот подход также целесообразно использовать в системах интернет-вещей с неконтролируемыми временами передачи данных.

5. Адаптивный синтез СКК в системах когнитивного радио.

На основе субполосной решающей функции

$$\max P_r(\vec{x}) / \hat{P}_r(\vec{u}) > h_r, 1 \leq r \leq R$$

Можно, с одной стороны, определить субполосы эфира, свободные от передаваемых сигналов, а, с другой, – сформировать на основе (76) соответствующую СКК. Таким образом,



решается проблема конкуренции за частотно-временные ресурсы каналов беспроводной передачи информации.

6. Формирование СКК для избирательного подавления посторонних СКК.  
Речь идет о возможности использования для сигналов подавления СКК

$$\bar{u} = Q_{2\Omega} \bar{x} \quad (81)$$

с матрицей собственных векторов, которые соответствуют нулевым (очень малым) собственным числам. В этом случае обеспечивается выполнение неравенства

$$\bar{u}^T A_{\Omega} \bar{u} / \|\bar{u}\|^2 \ll 1, \quad (82)$$

то есть исходная субполоса остается свободной для передачи соответствующих СКК.

### Список литературы

- Gantmakher, F.R. 1959. Theory of matrices. Publisher New York: Chelsea Pub. Co. 298 p.  
González R.C., Woods R.E. 2008. Digital image processing, 3rd Edition. 976 p.  
Horn R.A., Johnson Ch.R. 2013. Matrix analysis. 2nd ed. 662 p.  
Lanczos C. 1959. Applied analysis. Prentice Hall, 539 p.  
Pratt W.K. 2013. Introduction to Digital Image Processing. CRC Press. 756 p.  
Solomon, C.J., Breckon, T.P. 2010. Fundamentals of Digital Image Processing: A Practical Approach with Examples in Matlab. Wiley-Blackwell. 328 p.  
Авдеев О.В., Чобану М.К., 2006. Сжатие изображений с помощью частичной сортировки вейвлет-коэффициентов. Цифровая обработка сигналов, №2.  
Артюшенко В.М., Шелухин О.И., Афонин М.Ю., 2004. Цифровое сжатие видеоинформации и звука. М.: Дашков и К.  
Болгова Е.В., Черноморец А.А., Черноморец Д.А. 2019. О субполосном анализе изображений в области определения косинус-преобразования. Информационные системы и технологии. 6(116): 5-11.  
Дворкович В.П., Дворкович А.В., 2012. Цифровые видеоинформационные системы (теория и практика). М.: Техносфера.  
Жилияков Е.Г., 2015. Оптимальные субполосные методы анализа и синтеза сигналов конечной длительности. Автоматика и телемеханика, выпуск 4, С. 51–66.  
Жилияков Е.Г., Коськин А.В., Лубков И.И., Черноморец А.А. 2022. Субполосная аппроксимация изображений при сжатии объемов битовых представлений. Экономика. Информатика. 49(3): 607-615.  
Жилияков Е.Г., Черноморец А.А., 2009. Вариационные алгоритмы анализа и обработки изображений на основе частотных представлений»: Белгород: Изд-во ГИК. – 146 с.  
Заливин А.Н., Черноморец А.А., Жилияков Е.Г., Белов С.П. 2020. Анализ изображений на основе субполосных представлений в области пространственных частот. Инфокоммуникационные технологии. 18(1): 7-12.  
Крящев В.В., Бекренев В.А., Соловьев В.Е., Никитин А.Е. 2011. Улучшение качества JPEG2000-изображений на основе модифицированного билатерального фильтра. Цифровая обработка сигналов, №3.  
Методы компьютерной обработки изображений. Под ред. В.А. Сойфера. Москва: Физматлит, 2001. 784 с.  
Радченко Ю.С. 2002. Алгоритм сжатия изображений на основе полиномиальных преобразований (алгоритм GDCT). Цифровая обработка сигналов, №1.  
Стрелков Ф.В., Умняшкин С.В. 2003. Контекстное кодирование коэффициентов дискретного косинусного преобразования (ДКП) в JPEG-подобной схеме компрессии. Цифровая обработка сигналов, №2.

### References

- Gantmakher, F.R. 1959. Theory of matrices. Publisher New York: Chelsea Pub. Co. 298 p.  
González R.C., Woods R.E. 2008. Digital image processing, 3rd Edition. 976 p.  
Horn R.A., Johnson Ch.R. 2013. Matrix analysis. 2nd ed. 662 p.

- Lanczos C. 1959. Applied analysis. Prentice Hall, 539 p.
- Pratt W.K. 2013. Introduction to Digital Image Processing. CRC Press. 756 p.
- Solomon, C.J., Breckon, T.P. 2010. Fundamentals of Digital Image Processing: A Practical Approach with Examples in Matlab. Wiley-Blackwell. 328 p.
- Avdeev O.V., Chobanu M.K., 2006. Image compression using partial sorting of wavelet coefficients. Digital signal processing, No. 2.
- Artyushenko V.M., Shelukhin O.I., Afonin M.Yu., 2004. Digital compression of video information and sound. M.:Dashkov and K.
- Bolgova E.V., Chernomorets A.A., Chernomorets D.A. 2019. Subband image analysis in the cosine transform definition domain. Information systems and technologies. 6(116): 5-11.
- Dvorkovich V.P., Dvorkovich A.V., 2012. Digital video information systems (theory and practice). Moscow: Technosphere.
- Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., 2009. Variational algorithms for image analysis and processing based on frequency representations: Belgorod: Publishing House of GaK. 146 p.
- Zhilyakov E.G., Koskin A.V., Lubkov I.I., Chernomorets A.A 2022. Images subband approximation in the task of bit representations volumes compression. Economics. Information technologies. 49(3): 607-615.
- Zhilyakov E.G., 2015. Optimal subband methods of analysis and synthesis of signals of finite duration. Automatic. and Telemekh., issue 4, pp. 51-66.
- Zalivin A.N., Chernomorets A.A., Zhilyakov E.G., Belov S.P. 2020. Sub-band representation image analysis in the field of spatial frequencies. Infocommunication technologies. 18(1): 7-12.
- Kryashchev V.V., Bekrenev V.A., Soloviev V.E., Nikitin A.E., 2011. Improving the quality of JPEG2000 images based on a modified bilateral filter. Digital signal processing, No. 3.
- Metody komp'yuternoy obrabotki izobrazheniy [Methods of computer image processing]. Edited by V.A. Soifer. Moscow: Fizmatlit, 2001. 784 p.
- Radchenko Y.S., 2002. Image compression algorithm based on polynomial transformations (GDCT algorithm). Digital signal processing, No. 1.
- Strelkov F.V., Umnyashkin S.V., 2003. Contextual encoding of discrete cosine transform (DCT) coefficients in a JPEG-like compression scheme. Digital Signal processing, No. 2.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Жиляков Евгений Георгиевич**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационно-телекоммуникационных систем и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

**Evgeniy G. Zhilyakov**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Information and Telecommunication Systems and Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Лубков Илья Игоревич**, директор ООО «Технопроект», Белгород, Россия

**Ilya I. Lubkov**, Director Technoprojekt LLC, Belgorod, Russia

**Болгова Евгения Витальевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики и информационных технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

**Evgeniya V. Bolgova**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Informatics and Information Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia