УДК 517.9

ЯВНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ СИСТЕМЫ ЛАМЕ ПЛОСКОЙ ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ [9]

Е.А. Абаполова, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail:soldatov@bsu.edu.ru

Аннотация. Установлено, что ядро обобщенного потенциала двойного слоя системы Ламе в плоской ортотропной среде зависит только от модулей упругости и найдено явное его выражение. Рассмотрен также и изотропный случай.

Ключевые слова: потенциал двойного слоя, ортотропная и изотропная среды, однородные матриц-функции, модули упругости.

Рассмотрим систему Ламе для плоской задачи в ортотропной упругой среде [1, 2]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (1)$$

с матричными коэффициентами

$$a_{11}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_3\end{pmatrix},\qquad a_{12}=\begin{pmatrix}0 & \alpha_4\\ \alpha_3 & 0\end{pmatrix},$$

$$a_{21}=\begin{pmatrix}0 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0\end{pmatrix},\qquad a_{22}=\begin{pmatrix}\alpha_3 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix},$$

где модули упругости $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ положительны и $\alpha_4^2<\alpha_1\alpha_2$. Введём матричный трехчлен $p(z)=a_{11}+(a_{12}+a_{21})z+a_{22}z^2$ этой системы. Он представляет собой симметричную матрицу

$$p=\begin{pmatrix}p_1 & p_3\\ p_3 & p_2\end{pmatrix},\qquad \begin{aligned}p_1(z)&=\alpha_1+\alpha_3z^2,\\ p_2(z)&=\alpha_3+\alpha_2z^2,\\ p_3(z)&=(\alpha_3+\alpha_4)z.\end{aligned} \qquad (2)$$

Очевидно, характеристическое уравнение $p_1p_2-p_3^2=0$ системы (1) биквадратно и его корни ν_1, ν_2 в верхней полуплоскости можно выразить явно через модули упругости. С этой целью введем положительные ρ и ρ_0 по формулам

$$\rho^2=\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}},\quad \rho_0^2=\frac{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4^2+2\alpha_3(\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4)}{\alpha_2\alpha_3}\,. \qquad (3)$$

[9]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракты № П693 и № 02.740.11.0613)

Тот факт, что выражение в правой части второго равенства положительно, следует из условия $\alpha_4^2 < \alpha_1\alpha_2$. Из этих же соображений величина

$$\rho_0^2 - 4\rho^2 = \frac{(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_3)^2 - (\alpha_3 + \alpha_4)^2}{\alpha_2\alpha_3} = \frac{(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4)(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4 - 2\alpha_3)}{\alpha_2\alpha_3}$$

имеет один и тот же знак с $\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4 - 2\alpha_3$. Как показано в [3], имеют место формулы

$$\nu_{1,2} = i\rho e^{\pm i\theta}\ , \quad 2\theta = \arccos\left[\frac{\rho_0^2 - 2\rho^2}{2\rho^2}\right], \text{ если } \rho_0 < 2\rho\ ,$$

$$\nu_{1,2} = i\rho e^{\pm t}\ , \quad 2t = \operatorname{arcch}\left[\frac{\rho_0^2 - 2\rho^2}{2\rho^2}\right], \text{ если } \rho_0 > 2\rho\ , \tag{4}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = i\rho\,, \text{ если } \rho_0 = 2\rho\,.$$

Легко видеть, что независимо от этих трех случаев для суммы $s = \nu_1 + \nu_2$ и произведения $t = \nu_1\nu_2$ этих корней имеем выражения

$$s = i\rho_0,\ t = -\rho^2. \tag{5}$$

Как видно из (4), корни ν_1 и ν_2 различны при $\rho_0 \neq 2\rho$ и имеется один кратный корень $\nu = i\rho_0$ при $\rho_0 = 2\rho$. Эти случаи далее мы отмечаем посредством обозначений (i) и (ii) соответственно. С каждым из этих случаев свяжем матрицу

$$\text{(i) } J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Следующая лемма установлена в [4].

Лемма 1. *Существует такая обратимая матрица $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, что $a_{11}b + (a_{12} + a_{21})bJ + a_{22}bJ^2 = 0$ и блочная матрица B с элементами $B_{11} = \overline{B_{12}} = b$, $B_{21} = \overline{B_{22}} = bJ$ обратима. При этом любая другая матрица b_1 с теми же свойствами связана с b соотношением $b_1 = bd$ с некоторой обратимой матрицей d, коммутирующей с J.*

Показано также, что при $\alpha_3 + \alpha_4 \neq 0$ условию леммы удовлетворяет матрица

$$b = \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_2\nu_1^2 & \alpha_3 + \alpha_2\nu_2^2 \\ -(\alpha_3 + \alpha_4)\nu_1 & -(\alpha_3 + \alpha_4)\nu_2 \end{pmatrix}, \tag{6i}$$

$$b = \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_2\nu^2 & 2\alpha_2\nu \\ -(\alpha_3 + \alpha_4)\nu & -(\alpha_3 + \alpha_4) \end{pmatrix}. \tag{6ii}$$

Если $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$, то (4) переходит в

$$\nu_1 = i\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}, \quad \nu_2 = i\sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}$$

и лемма 1 удовлетворяется с единичной матрицей $b = 1$. В дальнейшем этот случай исключаем из рассмотрений.

Из леммы видно, что однородная степени нуль матриц-функция

$$H(\xi) = \mathrm{Im}\,[b(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} b^{-1}] \tag{7}$$

не зависит от выбора b в лемме и целиком определяется модулями упругости.

Пусть область D ограничена ляпуновским контуром Γ и $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль. Как известно [5], классический потенциал двойного слоя для оператора Лапласа в этой области можно записать в форме

$$(P_0\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma p_0(t, t - z)\varphi(t)|dt| \quad z \in D\,,$$

где положено $p_0(t,\xi) = |\xi|^{-2}[n_1(t)\xi_1 + n_2(t)\xi_2]$.

Обобщенный потенциал двойного слоя для системы Ламе представляет собой интеграл [6]

$$(P\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma p_0(t, t - z)H(t - z)\varphi(t)|dt|\,, \quad z \in D\,,$$

для любой вектор- функции $\varphi \in C(\Gamma)$ он определяет функцию $u \in C(\overline{D})$, удовлетворяющей системе Ламе в области D.

Основная цель данной заметки – описать матрицу H, а, следовательно и потенциал $P\varphi$ явно в терминах модулей упругости. Параллельно двум случаям (i) и (ii) положим

$$(i)\quad \Delta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \nu_1 - \nu_2 & 0 \\ 0 & \nu_2 - \nu_1 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

и, в обозначениях (3), (5), положим

$$\begin{gathered}\omega(\xi) = (\xi_1 + \nu_1\xi_2)(\xi_1 + \nu_2\xi_2) = \xi_1^2 - \rho^2\xi_2^2 + i\rho_0\xi_1\xi_2\,, \\ \omega^1(\xi) = -2\rho^2\xi_1\xi_2 + i\rho_0(\xi_1^2 + \rho^2\xi_2^2)\,.\end{gathered} \tag{9}$$

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$2|\omega(\xi)|^2 H(\xi) = |\xi|^2 \mathrm{Im}[(\omega^1(\xi) + 2\bar{\omega}(\xi)(b\Delta b^{-1})]\,. \tag{10}$$

□ Доказательство для каждого из случаев (i) и (ii) проведем отдельно.

(i) Положим

$$h(\xi,\nu) = \frac{-\xi_2 + \nu\xi_1}{\xi_1 + \nu\xi_2}\,,$$

тогда $(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1}$ представляет собой диагональную матрицу с элементами $h(\xi, \nu_k)$ вдоль диагонали. По определению матрицы Δ отсюда

$$(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} = \frac{h(\xi,\nu_1) + h(\xi,\nu_2)}{2} + \frac{h(\xi,\nu_1) - h(\xi,\nu_2)}{\nu_1 - \nu_2}\Delta\,.$$

В обозначениях (6.2) имеем:

$$\frac{h(\xi,\nu_1)+h(\xi,\nu_2)}{2}=\frac{\omega^0(\xi)}{2\omega(\xi)}, \qquad \frac{h(\xi,\nu_1)-h(\xi,\nu_2)}{\nu_1-\nu_2}=\frac{|\xi|^2}{\omega(\xi)}\ , \tag{11}$$

Подставляя эти выражения в предыдущее равенство, в соответствии с определением (7) получим равенство

$$2|\omega(\xi)|^2H(\xi)=\mathrm{Im}[(\omega^0\bar{\omega})(\xi)+2|\xi|^2\bar{\omega}(\xi)(b\Delta b^{-1})]\ . \tag{12}$$

Таким образом, остается убедиться, что оно может быть записано в форме второго равенства (10). Другими словами, дело сводится к соотношению

$$\mathrm{Im}[(\omega^0\bar{\omega})(\xi)]=|\xi|^2\mathrm{Im}[\omega^1(\xi)] \tag{13}$$

для квадратичных форм (9).

Легко видеть, что

$$\mathrm{Im}h(\xi,\nu)=\frac{|\xi|^2\mathrm{Im}\nu}{|\xi_1+\nu\xi_2|^2}\ .$$

Подставляя это выражение в мнимую часть первого равенства (11), получим:

$$\mathrm{Im}\frac{\omega^0(\xi)}{|\xi|^2\omega(\xi)}=\frac{|\xi|^2\mathrm{Im}\nu_1}{|\xi_1+\nu_1\xi_2|^2}+\frac{|\xi|^2\mathrm{Im}\nu_2}{|\xi_1+\nu_2\xi_2|^2}=$$

$$=\frac{(\mathrm{Im}\nu_1)|\xi_1+\nu_2\xi_2|^2+(\mathrm{Im}\nu_2)|\xi_1+\nu_1\xi_2|^2}{|\omega(\xi)|^2}\ ,$$

что доказывает соотношение (13), а вместе с ним и равенство (10).

(ii) В этом случае

$$(-\xi_2+\xi_1J)(\xi_1+\xi_2J)^{-1}=h(\xi,\nu)+\frac{|\xi|^2}{(\xi_1+\nu\xi_2)^2}\Delta\ .$$

Полагая $\nu_k=\nu$ в (9) и (11), получим равенства

$$h(\xi,\nu)=\frac{\omega^0(\xi)}{2\omega(\xi)}, \quad (\xi_1+\nu\xi_2)^2=\omega(\xi)\ ,$$

которые вместе с предыдущим выражением как и в случае (i) приводят к (12). Остается заметить, что соотношение (13) справедливо и при $\nu_1=\nu_2$, так что как и выше равенство (12) переходит в (10).

Матрицы b и Δ даются формулами (6), (8) и прямые вычисления показывают, что

$$2b\Delta b^{-1}=-\frac{2(\alpha_3+\alpha_4)}{\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\begin{pmatrix}0&1\\ \rho^2&0\end{pmatrix}+i\rho_0\frac{\alpha_3-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

В частности, эта матрица не зависит от случаев (i) и (ii). Подставляя это выражение в (10), после элементарных преобразований приходим к формуле

$$H(\xi) = \frac{\rho_0}{\alpha_3 + \sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \frac{|\xi|^2}{(\xi_1^2 - \rho^2\xi_2^2)^2 + \rho_0^2\xi_1^2\xi_2^2} G_{11}(\xi) \ ,$$
$$G(\xi) = \begin{pmatrix} \rho^2(\alpha_2\xi_1^2 + \alpha_3\xi_2^2) & (\alpha_3 + \alpha_4)\xi_1\xi_2 \\ \rho^2(\alpha_3 + \alpha_4)\xi_1\xi_2 & \alpha_3\xi_1^2 + \alpha_1\xi_2^2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Соответственно потенциал двойного слоя примет вид

$$(P\varphi)(z) = k \int_\Gamma p(t, t-z) G(t-z)\varphi(t)|dt| \ , \tag{15}$$

где положено

$$k = \frac{\rho_0}{\pi(\alpha_3 + \sqrt{\alpha_1\alpha_2})} \ , \qquad p(t,\xi) = \frac{n_1(t)\xi_1 + n_2(t)\xi_2}{(\xi_1^2 - \rho^2\xi_2^2)^2 + \rho_0^2\xi_1^2\xi_2^2} \ .$$

В случае изотропной среды, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\alpha_3 + \alpha_4 \ ,$$

эти формулы получают дальнейшее упрощение. В этом случае в (3) можем положить $\rho = 1$, $\rho_0 = 2$ и для матрицы G в (14) имеем выражение

$$G(\xi) = \begin{pmatrix} \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_3\xi_2^2 & (\alpha_1 - \alpha_3)\xi_1\xi_2 \\ (\alpha_1 - \alpha_3)\xi_1\xi_2 & \alpha_3\xi_1^2 + \alpha_1\xi_2^2 \end{pmatrix}.$$

Соответственно в формуле (15) следует положить

$$k = \frac{2}{\alpha_1 + \alpha_3} \ , \qquad p(t,\xi) = \frac{n_1(t)\xi_1 + n_2(t)\xi_2}{|\xi|^4} \ .$$

Литература

1. Лехницкий Г.Г. Теория упругости анизотропного тела / Г.Г. Лехницкий. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

2. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости /В.Д. Купрадзе. – М.: Физматгиз, 1963.

3. Abapolova E.A, Soldatov A.P. Lame system of elasticity theory in a plane orthotropic medium // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 157;3. – P.387-394.

4. Солдатов А.П., О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения. – 2003. – 39;5. – С.674-686.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики (2 изд) / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982.

6. Soldatov A.P., To the theory of anisotropic plane elasticity // Analysis by Oldenbourg Wissenschaftsverlags. – 2010. – 30(2). – P.107-117.

EXPLICIT EXPRESSION OF DOUBLE LAYER GENERALIZED POTENTIAL OF PLANE ORTHOTROPIC ELASTICITY

E.A. Abapolova, A.P. Soldatov

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:soldatov@bsu.edu.ru

Abstract. It is shown that the kernel of generalized double layer potential for the Lame system in the plane orthotropic medium depends only on elasticity modulus and it is found its explicit expression. The isotropic case is studied also.

Key words: double layer potential, orthotropic and isotropic media, uniform matrix-functions, elasticity modulus.