УДК 517.956

ЗАДАЧИ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СОПРЯЖЁННЫЕ ИМ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С.А. Алдашев, Р.Б. Сеилханова

Институт прикладной математики и информатики при АГУ имени К.Жубанова,,
ул. Бр.Жубановых, 263, 030000, Актобе, Казахстан, e-mail:aldash51@mail.ru

Аннотация. В работе для одного класса гиперболических уравнений исследованы задачи с отходом от характеристики и сопряженные им задачи. Доказаны корректности рассмотренных задач.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, характеристика, сопряжённая задача.

В работе [1], для уравнения колебания струны изучались задачи Дарбу с отходом от характеристики, где обращено внимание на изучение этих задач для гиперболических уравнений. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены в [2]. С использованием изложенного в [3] метода, в данной работе для одного класса многомерных гиперболических уравнений исследованы задачи с отходом от характеристики, а также сопряженные им задачи.

1. Постановка задач и основные результаты. Пусть D_β – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная конусами $\beta|x| = t$, $|x| = 1-t$ и плоскостью $t = 0$ где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β обозначим через S_β, S^1 и S соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимно-сопряженные многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0\,, \tag{1}$$

$$L^*v \equiv \Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i v_{x_i} - bv_t + dv = 0\,, \tag{1*}$$

где Δ_x– оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geqslant 2$, $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

В качестве многомерного анолога задачи с отходом от характеристики рассмотрим следующую

Задача 1. *Найти в области* D_β *решение уравнения* (1) *из класса* $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\Big|_S = \tau(x), \quad u\Big|_{S_\beta} = \sigma(x), \tag{2}$$

или

$$u_t\Big|_S = \nu(x), \quad u\Big|_{S_\beta} = \sigma(x), \tag{3}$$

а также рассмотрим сопряженную ей задачи Дирихле и Пуанкаре.

Задача 2. *Найти в области D_β решение уравнения (1^*) из класса $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$v\Big|_S = \tau(x), \quad v\Big|_{S_\beta} = \sigma(x), \; v\Big|_{S_1} = \varphi(x)\,, \tag{4}$$

или

$$v_t\Big|_S = \nu(x), \quad v\Big|_{S_\beta} = \sigma(x), v\Big|_{S_1} = \varphi(x)\,. \tag{5}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, ...$ – пространства Соболева, а $\tilde{S}_\beta = \{(r, \theta) \in S,\, 0 < r < \frac{1}{1+\beta}\}$.

Имеет место ([4])

Лемма. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geqslant m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\,, \tag{6}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$, $\bar{\sigma}_n^k(r)$, $\varphi_n^k(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (6), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i x_i \rho/r$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, ..., m$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$, $\varphi(r,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(\Gamma)$, Γ – единичная сфера в E_m.

Введем множество функций

$$B^l(S) = \left\{ f(r,\theta) : f \in W_2^l(S)\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \left(||f_n^k(r)||^2_{C^2((0,1))} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \; ||f_n^k(r)||^2_{C^1([0,1])} \right) \exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty, \; l > \frac{3m}{2} \right\}.$$

Пусть $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in W_2^l(D_\beta) \subset C(\bar{D}_\beta)$, $i = 1, ..., m$, $l \geq m+1$ и $\tau(r,\theta) = r\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) = r\nu^*(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta) = r\sigma^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $\nu^*(r,\theta) \in B^l(S)$, $\sigma^*(r,\theta) \in B^l(\tilde{S}_\beta)$, $\varphi(r,\theta) \in B^l(S \setminus \tilde{S}_\beta)$. Тогда справедливы:

Теорема 1. *Задача 1 однозначно разрешима.*

Теорема 2. *Задача 2 имеет единственное решение.*

Теорема 3. *Решение задачи 1 единственна, тогда и только, тогда, когда выполняется условие* (5).

2. Разрешимость задачи 1. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_{tt}+\sum_{i=1}^{m}a_i(r,\theta,t)u_{x_i}+b(r,\theta,t)u_t+c(r,\theta,t)u=0\,, \tag{7}$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)\,,\quad g_1=1\,,\quad g_j=(\sin\theta_1...\sin\theta_{j-1})^2\,,\quad j>1\,.$$

При этом известно ([4]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-2)$, $n=0,1,\ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C^1(\bar D_\beta)\cap C^2(D_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar u^k_n(r,t)Y^k_{n,m}(\theta)\,, \tag{8}$$

где $\bar u^k_n(r,t)$ – функции, которые будут определены ниже.

Подставим (8) в (7), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta)\neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере Γ, для $\bar u^k_n$ получим ([3])

$$\rho^1_0\bar u^1_{0rr}-\rho^1_0\bar u^1_{0tt}+\left(\frac{m-1}{r}\rho^1_0+\sum_{i=1}^{m}a^1_{i0}\right)\bar u^1_{0r}+\tilde b^1_0\bar u^1_{0t}+\tilde c^1_0\bar u^1_0+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho^k_n\bar u^k_{nrr}-\rho^k_n\bar u^k_{ntt}+\left(\frac{m-1}{r}\rho^k_n+\sum_{i=1}^{m}a^k_{in}\right)\bar u^k_{nr}+\tilde b^k_n\bar u^k_{nt}+\right.$$

$$\left.+\left[\tilde c^k_n-\lambda_n\frac{\rho^k_n}{r^2}+\sum_{i=1}^{m}(\tilde a^k_{in-1}-na^k_{in})\right]\bar u^k_n\right\}=0\,. \tag{9}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho^1_0\bar u^1_{0rr}-\rho^1_0\bar u^1_{0tt}+\frac{m-1}{r}\rho^1_0\bar u^1_{0r}=0\,, \tag{10}$$

$$\rho^k_1\bar u^k_{1rr}-\rho^k_1\bar u^k_{1tt}+\frac{m-1}{r}\rho^k_1\bar u^k_{1r}-\frac{\lambda_1}{r^2}\rho^k_1\bar u^k_1=$$

$$=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m}a^1_{i0}\bar u^1_{0r}+\tilde b^1_0\bar u^1_{0t}+\tilde c^1_0\bar u^1_0\right)\,,\quad n=1\,,\quad k=\overline{1,k_1}\,,$$

$$\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \right.$$
$$\left. + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m} (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3 \ldots . \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ – решение системы (10)-(11), то оно является решением уравнения (9).

Далее, учитывая ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([4]), из краевого условия (2), в силу (8), будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, 0) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(r, \beta r) = \bar{\sigma}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1 \ldots . \tag{12}$$

Таким образом, задача(1), (2) сведена к системе задач для уравнений (10)-(11). Теперь будем находить решение этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (10)-(11) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \tag{13}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r,t) \equiv \equiv 0$. Произведя в (13) замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}} u_n^k(r,t)$ и полагая $\xi = \frac{r+t}{2}$, $\eta = \frac{r-t}{2}$, получим

$$u_{n\xi\eta}^k + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2} u_n^k = f_n^k(\xi, \eta), \tag{14}$$

$f_n^k(\xi,\eta) = (\xi+\eta)^{\frac{m-1}{2}} \bar{f}_n^k(\xi+\eta, \ \xi-\eta)$, при этом краевое условие (12) запишется в виде

$$u_n^k(\xi, \xi) = \tau_n^k(\xi), \quad u_n^k(\xi, \alpha\xi) = \sigma_n^k(\xi), \quad 0 \le \xi \le \frac{1}{2}, \tag{15}$$

$$\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{m-1}{2}} \bar{\tau}_n^k(2\xi), \quad \sigma_n^k(\xi) = ((1+\alpha)\xi)^{\frac{m-1}{2}} \bar{\sigma}_n^k((1+\alpha)\xi), \quad 0 < \alpha = \frac{1-\beta}{1+\beta} < 1,$$
$$k = \overline{1, k_n}, \qquad n = 0, 1 \ldots .$$

Используя общее решение уравнения (14) (см.[1,5]), нетрудно показать, что решение задачи Коши для уравнения (14) имеет вид

$$u_n^k(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \tau_n^k(\eta) R(\eta, \eta; \xi, \eta) + \frac{1}{2} \tau_n^k(\xi) R(\xi, \xi; \xi, \eta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\eta}^{\xi} [\nu_n^k(\xi_1) R(\xi_1, \xi_1; \xi, \eta) -$$
$$-\tau_n^k(\xi_1) \frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)|_{\xi_1 = \eta_1}] d\xi_1 + \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} \int_{\alpha\xi}^{\eta} f_n^k(\xi_1, \eta_1) R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) d\xi_1 d\eta_1, \tag{16}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения (14)([6]), а $P_\mu(z)$– функция Лежандра, $\mu = n+\frac{m-3}{2}$,

$$m\nu_n^k(\xi_1) = \frac{\partial u_n^k}{\partial N}\Big|_{\xi_1=\eta_1} = \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial u_n^k}{\partial\eta_1} + \frac{\partial\eta_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial u_n^k}{\partial\xi_1}\right)\Big|_{\xi_1=\eta_1},$$

$N^\perp$ – нормаль к прямой в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta\le\xi$.

Из (16) при $\eta=\alpha\xi$, используя краевое условие (15), получим интегральное уравнение первого рода

$$g_n^k(\xi) = \int\limits_{\alpha\xi}^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right]d\xi_1\,,\quad 0\le\xi\le\frac12\,,$$

$$\sqrt2 g_n^k(\xi) = -\tau_n^k(\alpha\xi)-\tau_n^k(\xi)+\frac{(\alpha-1)}{(\alpha+1)}\int\limits_{\alpha\xi}^{\xi}\frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right]d\xi_1 + 2\sigma_n^k(\xi)\,,$$

которое дифференцированием сводится к следующему функционально-интегральному уравнению

$$\nu_n^k(\xi)-\alpha\nu_n^k(\alpha\xi) = \psi_n^k(\xi)\,,\quad 0\le\xi\le\frac12\,, \tag{17}$$

где

$$\psi_n^k(\xi) = \int\limits_{\alpha\xi}^{\xi}\frac{(\xi_1^2-\alpha\xi^2)}{(1+\alpha)\xi_1\xi^2}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right]\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1 + h_n^k(\xi)\quad h_n^k(\xi)=\frac{dg_n^k}{d\xi}\,,$$

В [7] показано, что функциональное уравнение (17) имеет единственное решение вида

$$\nu_n^k(\xi) = \frac{\psi_n^k(\xi)+\alpha\psi_n^k(\alpha\xi)}{1-\alpha^2} = \mu_n^k(\xi) + \int\limits_{\alpha^2\xi}^{\xi}G_n(\xi,\xi_1)\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1\,, \tag{18}$$

где

$$\mu_n^k(\xi) = \frac{h_n^k(\xi)+\alpha h_n^k(\alpha\xi)}{1-\alpha^2},\ \mu_n^k(\xi)\in C\left(\left[0,\frac12\right]\right),$$

$$G_n(\xi,\xi_1) = \begin{cases}\dfrac{\xi_1^2-\alpha^3\xi^2}{\alpha(1+\alpha)\xi_1\xi^2}P'_\mu\left[\dfrac{\xi_1^2+\alpha^3\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right], & \alpha^2\xi\le\xi_1\le\alpha\xi\,,\\[2ex] \dfrac{\xi_1^2-\alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi_1\xi^2}P'_\mu\left[\dfrac{\xi_1^2+\alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right], & \alpha\xi\le\xi_1\le\xi\,.\end{cases}$$

Так как $|P'_\mu(z)|\le C=\mathrm{const}$ ([8]), то ядро $G_n(\xi,\xi_1)$ (19) допускает оценку

$$|G_n(\xi,\xi_1)|\le\frac{C}{(1+\alpha)\xi} = M\,. \tag{20}$$

Решение интегрального уравнения (18) будем искать в виде ряда

$$\nu(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \nu_l(\xi), \tag{21}$$

$$\nu_0(\xi) = \mu_n^k(\xi), \quad \nu_l(\xi) = \int_{\alpha^2\xi}^{\xi} G_n(\xi, \xi_1)\nu_{l-1}(\xi_1)d\xi_1, \quad l = 1, 2\dots .$$

Из (20) получим следующие оценки

$$|\nu_0(\xi)| \le \max_{[0,\frac{1}{2}]} |\mu_n^k(\xi)| = m, \quad |\nu_1(\xi)| \le mM(1-\alpha)\xi,$$

$$|\nu_2(\xi)| \le mM^2\frac{\xi^2}{2}$$

и вообще

$$|\nu_l(\xi)| \le m\frac{(M\xi)^l}{l!}.$$

Тогда для ряда (21) будем иметь

$$|\nu(\xi)| \le \sum_{l=0}^{\infty} |\nu_l(\xi)| \le m\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}\left(\frac{C}{1+\alpha}\right)^l = m\exp\left(\frac{C}{1+\alpha}\right).$$

Таким образом, интегральное уравнение (18), а также (17), имеет единственное решение. Следовательно, сначала решив задачу (10), (12) $(n = 0)$, а затем (11), (12) $(n = 1)$ и т.д., найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$.

Итак, показано, что

$$\int_{\Gamma} \rho(\theta) Lu\, d\Gamma = 0. \tag{22}$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 – плотно в $L_2((\frac{t}{\beta}, 1-t))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(\Gamma)$– плотна в $L_2(\Gamma)$, а $T(t) \in V_1$, V_1– плотна в $L_2((0, \frac{\beta}{1+\beta}))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in \in V$, $V = V_0 \otimes \Gamma \otimes V_1$– плотна в $L_2(D_\beta)$ ([9]).

Отсюда и из (22), следует, что

$$\int_{D_\beta} f(r, \theta, t) Lu dD_\beta = 0$$

и

$$Lu = 0, \ \forall (r, \theta, t) \in D_\beta.$$

Таким образом, задача (1), (2) имеет решение вида

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{23}$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются из (16), в которой $\nu_n^k(\xi)$ находятся из (18). Следовательно, решение задачи (1),(2) построено.

Теперь рассмотрим задачу (1), (3) и ее решение также будем искать в виде (8). В этом случае условие (3) имеет вид

$$\left.\frac{\partial u_n^k}{\partial N}\right|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\xi),\ u_n^k(\xi, \alpha\xi) = \sigma_n^k(\xi)\,, \quad 0 \le \xi \le \frac{1}{2}\,, \tag{24}$$

$$\nu_n^k(\xi) = \sqrt{2}(2\xi)^{\frac{m-1}{2}}\bar{\nu}_n^k(2\xi)\,, \quad k = \overline{1, k_n}\,, \quad n = 0, 1, \ldots\ .$$

Далее, из (16), при $\eta = \alpha\xi$, с учетом (24), получим функционально-интегральное уравнение вида

$$\tau_n^k(\xi) + \tau_n^k(\alpha\xi) = g_n^k(\xi) + \int\limits_{\alpha\xi}^{\xi} \tau_n^k(\xi_1) G_n(\xi, \xi_1) d\xi_1\,, \tag{25}$$

где

$$g_n^k(\xi) = 2\sigma_n^k - \sqrt{2}\int\limits_{\alpha\xi}^{\xi} \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left[\frac{\alpha\xi^2 + \xi_1^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right] d\xi_1\,, \qquad g_n^k(\xi) \in C\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$$

$$G_n(\xi, \xi_1) = \frac{\alpha - 1}{(1+\alpha)\xi_1} P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right].$$

Так как интегральный оператор, стоящий в правой части равенства (25), вполне непрерывен, то, как показано в [7], функциональное уравнение (25) имеет единственное решение. Следовательно, функция (23) является решением задачи (1), (3), где $\bar{u}_n^k(r,t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ определяются из (16), при этом $\tau_n^k(\xi)$ находятся из (25).

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$, анологично [3], можно доказать, что полученное решение $u(r,\theta,t)$ в виде (23) принадлежит искомому классу.

Таким образом, разрешимость задачи 1 показана.

3. Единственность решения задачи 2. Сначала рассмотрим задачу (1*), (4). Для этого построим $u(r,\theta,t)$– решение уравнения(1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),\ u\big|_{S_\beta} = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots\,, \tag{26}$$

$\bar{\tau}_n^k(r) \in V$, где V– множество функций $\tau(r)$ из класса $C^2(0 < r < 1) \cap C^1(0 \le r < 1)$. Очевидно, что множество V плотно всюду в $L_2((0,1))$. Функцию $u(r,\theta,t)$ будем искать в виде (8). Тогда, для $u_n^k(\xi,\eta)$ получим уравнение (14) с краевыми условиями

$$u_n^k(\xi, \xi) = \tau_n^k(\xi)\,, \quad u_n^k(\xi, \alpha\xi) = 0\,, \quad 0 \le \xi \le \frac{1}{2}\,, \quad k = \overline{1, k_n}\,, \quad n = 0, 1, \ldots\ . \tag{27}$$

Как показано в п.2, задача (14), (27) имеет единственное решение.

Таким образом, решение задачи (1), (26) в виде (23) построено, где $u_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,...$ определяются из (16), в которой $\nu_n^k(\xi)$ находятся из (18).

Из определения сопряженных операторов ([10])

$$vLu - uL^*v = -vP(u) + uP(v) - uvQ\,,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m} u_{x_i}\cos\left(N^{\perp}, x_i\right) - u_t\cos\left(N^{\perp}, t\right),$$

$$Q = \sum_{i=1}^{m} a_i\cos\left(N^{\perp}, x_i\right) + b\cos\left(N^{\perp}, t\right),$$

а $N^{\perp}$– внутренняя нормаль к границе ∂D_β, по формуле Грина имеем

$$\int\limits_{\Omega_\beta}(vLu - uL^*v)dD_\beta = \int\limits_{\partial D_\beta}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial N'} - u\frac{\partial v}{\partial N'}\right)M + uvQ\right]ds\,, \qquad (28)$$

где $\frac{\partial}{\partial N'}$– конормаль к ∂D_β, а $M^2 = \sum\limits_{i=1}^{m}\cos^2\left(N^{\perp}, x_i\right) + \cos^2\left(N^{\perp}, t\right)$. Из (28), принимая во внимание однородные граничные условия (4) и тот факт, что на характеристическом конусе S^1 конормальная производная $\frac{\partial}{\partial N'}$ совпадает с производной по касательному направлению ([10]), получим $\int\limits_S \tau(r,\theta)v(r,\theta,0)ds = 0$. Отсюда, поскольку линейная оболочка система функций $\{\bar{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна ([9]) в $L_2(S)$, заключаем, что $v_t(r,\theta,0)=0$, $\forall(r,\theta)\in S$. Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши ([10]) : $L^*v=0$,
$v(x,0)=v_t(x,0)=0$, будем иметь $v(x,t)=0$, $\forall(x,t)\in D_\beta$.

Единственность решения задачи $(1^*), (4)$ показана. Аналогичным образом доказывается единственность решения задачи $(1^*), (5)$.

4. Разрешимость задачи 2. Сначала рассмотрим задачу $(1^*), (4)$. Ее решение будем искать в виде ряда (8). Тогда, как в случае задачи (1), (2) функции $\bar{v}_n^k(r,t)$ будут удовлетворять систему уравнений (10)-(11), где a_{in}^k, $\tilde{a}_{in}^k$, $\tilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-a_{in}^k$, $-\tilde{a}_{in}^k$, $-\tilde{b}_n^k$, а $\tilde{c}_n^k$ на $\tilde{d}_n^k$, $i=1,...,m$, $k=\overline{1,k_n}$, $\quad n=0,1,...$.

Из краевого условия (4) имеем

$$\begin{gathered}\bar{v}_n^k(r,0) = \bar{\tau}_n^k(r)\,, \quad 0\le r\le 1\,, \quad \bar{v}_n^k(r,\beta r) = \bar{\sigma}_n^k(r)\,, \quad 0\le r\le \frac{1}{1+\beta}\,,\\ \bar{v}_n^k(r,1-r) = \bar{\varphi}_n^k(r)\,, \quad \frac{1}{1+\beta}\le r\le 1\,, \quad k=\overline{1,k_n}\,, \quad n=0,1,...\,.\end{gathered} \qquad (29)$$

Далее, рассмотрим уравнение (14), к которому сводится каждое уравнение системы (10)-(11), при этом условие (29) запишется в виде

$$v_n^k(\eta,\eta) = \tau_n^k(\eta)\,, \quad 0\le\eta\le\frac{1}{2}\,, \quad v_n^k(\frac{\eta}{\alpha},\eta) = \sigma_n^k(\eta)\,, \quad 0\le\eta\le\eta_0\,,$$

$$\upsilon_n^k(\frac{1}{2},\eta)=\varphi_n^k(\eta)\,,\quad \eta_0\le\eta\le\frac{1}{2}\,,\quad \sigma_n^k(\eta)=\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta\right)^{\frac{m-1}{2}}\bar{\sigma}_n^k\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta\right)\,,\tag{30}$$

$$\varphi_n^k(\eta)=\left(\frac{1}{2}+\eta\right)^{\frac{m-1}{2}}\bar{\varphi}_n^k\left(\frac{1}{2}+\eta\right)\,,\quad \eta_0=\frac{1-\beta}{2(1+\beta)}>0\,,\quad k=\overline{1,k_n}\,,\quad n=0,1,\ldots\,.$$

Из решения Коши (16) при $\xi=\frac{1}{\alpha}\eta$ и $\xi=\frac{1}{2}$, используя краевые условия (30), получим интегральные уравнения первого рода

$$\psi_n^k(\eta)=\int\limits_{\eta}^{\frac{1}{2}}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\frac{\eta}{2}}{\xi_1\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}\right]d\xi_1\,,\quad \eta_0\le\eta\le\frac{1}{2}\,,$$

$$g_n^k(\eta)=\int\limits_{\eta}^{\frac{\eta}{\alpha}}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\frac{\eta^2}{\alpha}}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta\xi_1}\right]d\xi_1\,,\quad 0\le\eta\le\eta_0\,,$$

где

$$\sqrt{2}\psi_n^k(\eta)=2\varphi_n^k(\eta)-\tau_n^k(\eta)-\tau_n^k\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{(1-2\eta)}{(1+2\eta)}\int\limits_{\eta}^{\frac{1}{2}}\frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\frac{1}{2}\eta}{\xi_1\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}\right]d\xi_1\,,$$

$$\sqrt{2}g_n^k(\eta)=2\sigma_n^k(\eta)-\tau_n^k(\eta)-\tau_n^k\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)+\frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}\int\limits_{\eta}^{\frac{\eta}{\alpha}}\frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\frac{1}{\alpha}\eta^2}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\xi_1\eta}\right]d\xi_1\,,$$

которые дифференцированием сводятся соответственно к следующему интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\nu_n^k(\eta)=\int\limits_{\eta}^{\frac{1}{2}}\nu_n^k(\xi_1)\frac{(1-4\xi_1^2)}{\xi_1(1+2\eta)^2}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\frac{1}{2}\eta}{\xi_1\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}\right]d\xi_1-\sqrt{2}\frac{d\psi_n^k}{d\eta}\,,\quad \eta_0\le\eta\le\frac{1}{2}\,,\tag{31}$$

и функционально-интегральному уравнению

$$\nu_n^k(\eta)-\gamma\nu_n^k(\gamma\eta)=h_n^k(\eta)\,,\quad \gamma=\frac{1}{\alpha}\,,\quad 0\le\eta\le\eta_0\,,\tag{17'}$$

где

$$h_n^k(\eta)=\int\limits_{\eta}^{\gamma\eta}\nu_n^k(\xi_1)\frac{(\gamma\eta^2-\xi_1^2)}{(1+\gamma)\eta^2\xi_1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\gamma\eta^2}{(1+\gamma)\eta\xi_1}\right]d\xi_1-\sqrt{2}\,\frac{dg_n^k}{d\eta}\,.$$

Как показано в п.2, уравнение (17′) имеет единственное решение.

Следовательно, ряд (23) является решением задачи (1*), (4), где $\upsilon_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$ находятся из (16), в которой $\nu_n^k(\xi)$ определяются из уравнений (31) и (17′).

Теперь рассмотрим задачу $(1^*), (5)$ и ее решение также будем искать в виде (8). Тогда, как в случае задачи $(1^*), (4)$, функции будут удовлетворять уравнению (14), при этом условие (5) запишется в виде

$$\left.\frac{\partial \upsilon_n^k}{\partial N}\right|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\eta)\,, \quad 0 \le \eta \le \frac{1}{2}\,, \quad \upsilon_n^k\left(\frac{\eta}{\alpha}, \eta\right) = \sigma_n^k(\eta)\,, \quad 0 \le \eta \le \eta_0\,, \tag{32}$$

$$\upsilon_n^k\left(\frac{1}{2}, \eta\right) = \varphi_n^k(\eta)\,, \quad \eta_0 \le \eta \le \frac{1}{2}\,, \quad k = \overline{1, k_n}\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,.$$

Далее, из (16) при $\xi = \frac{\eta}{\alpha}$ и $\xi = \frac{1}{2}$, с учетом (32), получим следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tau_n^k(\eta) = \int\limits_\eta^{\frac{1}{2}} \tau_n^k(\xi_1)\frac{(1-2\eta)}{(1+2\eta)\xi_1} P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \frac{\eta}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\eta\right)\xi_1}\right] d\xi_1 - \psi_n^k(\eta)\,, \qquad \eta_0 \le \eta \le \frac{1}{2}\,, \tag{33}$$

и функционально-интегральное уравнение вида

$$\tau_n^k(\eta) + \tau_n^k(\gamma\eta) = g_n^k(\eta) + \int\limits_\eta^{\gamma\eta} \tau_n^k(\xi_1) G_n(\xi, \xi_1) d\xi_1\,, \quad 0 \le \eta \le \eta_0\,, \tag{25$'$}$$

где

$$\psi_n^k(\eta) = 2\varphi_n^k(\eta) - \varphi_n^k\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{2}\int\limits_\eta^{\frac{1}{2}} \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \frac{\eta}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\eta\right)\xi_1}\right] d\xi_1\,,$$

$$g_n^k(\eta) = 2\sigma_n^k(\eta) - \sqrt{2}\int\limits_\eta^{\gamma\eta} \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \gamma\eta^2}{(1+\gamma)\eta\xi_1}\right] d\xi_1\,,$$

$$G_n(\xi, \xi_1) = \frac{\gamma - 1}{(1+\gamma)\xi_1} P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \gamma\eta^2}{(1+\gamma)\eta\xi_1}\right]\,.$$

В п.2 показано, что уравнение $(25')$ имеет единственное решение.

Таким образом, ряд (23) является решением задачи $(1^*), (5)$, где $\upsilon_n^k(r,t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ находятся из (16), в которой $\tau_n^k(\xi)$ находятся из уравнений (33) и $(25')$.

Следовательно, решение задачи 2 построено.

5. Единственность решения задачи 1. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Для этого построим $\upsilon(r, \theta, t)$ – решение уравнения (1^*), удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon\big|_S = \tau(r,\theta) = \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\,, \quad \upsilon\big|_{S_\beta \cup S^1} = 0\,, \quad k = \overline{1, k_n}\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,, \tag{34}$$

$\bar{\tau}_n^k(r) \in V$. Функцию $v(r,\theta,t)$ будем искать в виде (8). Тогда, для $v_n^k(\xi,\eta)$ получим уравнение (14) с краевыми условиями

$$v_n^k(\eta,\eta) = \tau_n^k(\eta)\,, \quad 0 \le \eta \le \frac{1}{2}\,, \quad v_n^k\left(\frac{\eta}{\alpha},\eta\right) = 0\,, \quad 0 \le \eta \le \eta_0,$$
$$v_n^k\left(\frac{1}{2},\eta\right) = 0\,, \quad \eta_0 \le \eta \le \frac{1}{2}\,. \tag{35}$$

В п.4 доказано, что задача (14), (35) однозначно разрешима.

Таким образом, решение задачи (1*), (34) в виде (23) построено.

Далее, как показывалась единственность решения задачи (1*), (4) в п.3, завершается доказательство единственности решения задачи (1), (2). Аналогичным путем устанавливается единственность решения задачи (1), (3).

При $\beta = 1$ в [12] доказана

Теорема 3. *Задача 1 имеет бесчисленное множество решений.*

Пусть, теперь, $0 < \beta \le 1$. Тогда, из теорем 1 и 3 вытекает справедливость следующего критерия: задача 1 однозначно разрешима $\Longleftrightarrow \beta < 1$.

В заключение отметим, что для многомерного волнового уравнения задачи Дарбу и Дирихле изучались в [12-14].

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Protter M.H. New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type // J.Rath.Mech.Anal. – 1954. – 3;4. – P.435-446.

3. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений / С.А. Алдашев. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.

4. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С.Г. Михлин. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

5. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа / А.В. Бицадзе. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – 164 с.

6. Copson E.T.// J.Rath. Mech.and Anal. – 1958. – 1. – P.324-348.

7. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом / Г.С. Литвинчук. – М:Наука, 1977. – 448 с.

8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2 / Г. Бейтмен. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

10. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.4, ч.2 / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1981. – 550 с.

11. Алдашев С.А., Нуржанов Ш.Т. // Вестник КазГУ. сер.мат., мех.,инф.,Алматы. – 1997. – 8. С.6-16.

12. Алдашев С.А. // Известия НАН РК, сер.физ. -мат.наук. – 2010. – 3. – С.3-7.

13. Алдашев С.А. // Доклады НАН РК, Алматы. – 1995. – 1. – С.35-37.

14. Алдашев С.А. // Укр. матем. журнал. – 1996. –48;5. – С.701-705.

PROBLEMS WITH DEVIATION FROM CHARACTERISTICS AND CONJUGATE PROBLEMS FOR ONE CLASS OF MANY DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS

S.A. Aldashev, R.B. Seilkhanova

Institute of applied mathematics and informatics ASU K.Zhubanova,
Zhubanov br., str. 263, 030000, Aktobe, Kazakhstan, e-mail:aldash51@mail.ru

Abstract. Problems with deviation from characteristics and ones conjugate to them are investigated for the class of hyperbolic equations. The correctness of these problem are proved.

Key words: hyperbolic equations, characteristics, conjugate problem.