УДК 621.391:519.72

АППРОКСИМАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СУБПОЛОСНЫХ ЯДЕР ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ КАНАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Д. В. УРСОЛ

Белгородский государственный университет

В статье рассматривается новый метод формирования канальных сигналов, которые обладают высоким уровнем помехоустойчивости и имеют максимальную концентрацию энергии в заданном интервале частот. Рассматривается аппроксимация собственных векторов субполосной матрицы, исследуются помехоустойчивость и доля энергии за пределами выделенной полосы частот.

Ключевые слова: аппроксимация, методы передачи данных, цифровая связь, мобильные системы, частотное уплотнение.

Формирование канальных сигналов с максимальной концентрацией энергии в заданной частотной полосе является одной из самых важных проблем передачи информации в режиме частотного уплотнения [1]. Известные в настоящее время методы формирования канальных сигналов в системах мобильной связи и радиодоступа не являются оптимальными в этом смысле, так как в их основе используется принцип обеспечения, прежде всего определённого уровня верности передачи.

В работе рассматривается формирование оптимального канального сигнала с минимальной долей энергии за пределами заданной полосы частот на основе собственных векторов субполосных матриц. В работе [2] показано, что вектор с минимальным уровнем просачивания энергии представляет собой сумму вида:

$$\vec{x} = Q_1 \cdot \vec{e} = \left(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots \vec{q}_J\right) \cdot \vec{e} = \sum_{i=1}^{J} e_i \vec{q}_i \,, \tag{1}$$

где $\vec{e} = (e_1, .., e_J)^T$ информационный вектор размерностью J, компоненты которого состоят из биполярных бит, которые подлежат передаче по каналу связи;

$\vec{q}_i$ собственные векторы так называемых субполосных матриц для выделенной частотной полосы, соответствующие собственные числа которых близки или равны единице.

Свойство ортогональности собственных векторов позволяет записать равенство:

$$Q^T \cdot Q = 1,$$

где матрица $Q_1 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots \vec{q}_J\}$ имеет размерность $\left[N \times J\right]$.

Поэтому восстановление передаваемой информации может быть осуществлено на основе операции:

$$\vec{e} = Q^T \cdot \vec{x} = Q^T \cdot Q \cdot \vec{e} = 1 \cdot \vec{e} \,. \tag{2}$$

В работе [3] исследовано влияние помех на результаты восстановления согласно (2), когда обработке подвергается вектор:

$$\hat{\vec{x}} = \vec{x} + \vec{\varepsilon} \,,$$

где $\vec{\varepsilon}$ – вектор помех в канале связи, а решающая процедура отнесения символа e_i к 1 или к 0, на основе скалярных произведений $\vec{z}_i = \left(\hat{\vec{x}}_i \hat{\vec{q}}_i\right) = \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k q_{ki}$, имеет вид $e_i = 1$, при $z_i \succ 0$, и наоборот $e_i = -1$, при $z_i \prec 0$.

Показано, что при отношении шум/сигнал $d = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^2} \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{N}x_i^2}$ меньше 2 вероятность правильного решения будет не меньше 0,9.

В реальных условиях, однако, необходимо формировать непрерывные сигналы, а не дискретные. Для этого естественно воспользоваться аналогией вида:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{J} e_i q_i(t), t \in [0, T], \tag{3}$$

где $q_i(t)$ – собственные функции субполосного ядра [2] вида:

$$A(t-t_1) = \left(\sin\left[\Omega_2(t-t_1)\right] - \sin\left[\Omega_1(t-t_1)\right]\right)/\pi(t-t_1), \tag{4}$$

так что по определению должно выполняться равенство:

$$\lambda_i q_i(t) = \int_0^T A(t-t_1) q_i(t_1) dt_1 . \tag{5}$$

Здесь Ω_1 и Ω_2 границы частотного интервала в Герцах.

Для вычисления собственных функций согласно соотношению (5) следует использовать квадратурную формулу, например прямоугольников:

$$\lambda_i q_i(k\Delta t) = \Delta t \sum_{n=0}^{N} A\left(\Delta t(k-n)\right) q_i(n\Delta t), \tag{6}$$

выбрав достаточно малый шаг дискретизации

$$\Delta t = T/N . \tag{7}$$

Вычисления показывают, что одному и тому же собственному числу соответствуют две ортогональных собственных функции, модули трансформант Фурье которых не отличаются. Поэтому представляется целесообразным использовать аппроксимации:

$$\hat{q}_{2k-1}(t) = u_{2k-1}(t)\cos\left(\Omega_c t\right), \tag{8}$$

$$\hat{q}_{2k}(t) = u_{2k}(t)\sin\left(\Omega_c t\right), \tag{9}$$

где $k = 1, 2, \ldots, J/2$;

$$\Omega_c = \left(\Omega_2 + \Omega_1\right)/2, \tag{10}$$

$$J = \left(\Omega_2 - \Omega_1\right)T/2\pi, \tag{11}$$

причем предполагается выполнение условия

$$\left(\Omega_2 - \Omega_1\right)T/2\pi \succ 8, \tag{12}$$

так как, только в этом случае будет порядка $J/2$ собственных чисел мало отличающихся от единицы.

Целью дальнейшего является исследование, с точки зрения эффективности формирования канальных сигналов, свойств предлагаемых аппроксимаций, а именно:

– возможность построения на этой основе ортогонального базиса;

– оценивание вероятностей ошибочных решений при приеме сигналов на основе правила

$$z_i = \int_0^T \hat{x}(t)\hat{q}_i(t)dt \succ 0 \Rightarrow e_i = 1 \tag{13}$$

и наоборот.

Здесь $\hat{\vec{x}} = \vec{x} + \vec{\varepsilon}$.

Естественно, что как при формировании так и при обработке канальных сигналов интегралы заменяются суммами, что означает дискретизацию в том числе и огибающих. Поэтому собственные функции выполняются в дискретном наборе точек согласно (6).

В таблице 1 приведены результаты вычислений при выполнении неравенства (12) скалярных произведений аппроксимаций вида (8) и (9). Легко понять, что получаемый таким образом базис будет ортогональным.

Таблица 1

Матрица скалярных произведений собственных функций

$\hat{\hat{q}}$	$\hat{\hat{q}}_1$	$\hat{\hat{q}}_2$	$\hat{\hat{q}}_3$	$\hat{\hat{q}}_4$	$\hat{\hat{q}}_5$	$\hat{\hat{q}}_6$	$\hat{\hat{q}}_7$	$\hat{\hat{q}}_8$
$\hat{\hat{q}}_1$	0,99999	-3,73e-015	6,37e-014	4,86e-015	4,09e-006	-7,08e-016	-3,03e-015	-1,77e-015
$\hat{\hat{q}}_2$	-3,72e-015	0,99999	-4,67e-015	-6,57e-014	-1,07e-015	4,09e-006	-1,70e-015	-6,11e-016
$\hat{\hat{q}}_3$	6,37e-014	-4,67e-015	0,99999	2,39e-015	-2,55e-015	3,80e-015	0,00012098	5,71e-016
$\hat{\hat{q}}_4$	4,86e-015	-6,57e-014	2,39e-015	0,99999	-3,57e-015	1,57e-015	-1,33e-016	-0,00012098
$\hat{\hat{q}}_5$	4,08e-006	-1,07e-015	-2,55e-015	-3,57e-015	0,99927	-3,44e-015	4,72e-016	-3,79e-015
$\hat{\hat{q}}_6$	-7,08e-016	4,09e-006	3,80e-015	1,57e-015	-3,44e-015	0,99927	-3,50e-015	9,44e-016
$\hat{\hat{q}}_7$	-3,03e-015	-1,70e-015	0,00012098	-1,33e-016	4,72e-016	-3,50e-015	0,99551	-2,04e-015
$\hat{\hat{q}}_8$	-1,77e-015	-6,11e-016	5,71e-016	-0,000121	-3,79e-015	9,44e-016	-2,04e-015	0,99551

В таблице 2 приведены оценки среднеквадратических погрешностей аппроксимаций соответствующих собственных функций с помощью соотношения:

$$\theta_i = \int_0^T \left[q_i(t) - \hat{q}_i(t)\right]^2 dt \ .$$

Таблица 2

Среднеквадратическая погрешность аппроксимации

θ_1	1,3723e-005
θ_2	1,3723e-005
θ_3	7,2382e-007
θ_4	7,2382e-007
θ_5	0,00055305
θ_6	0,00055305
θ_7	0,002099
θ_8	0,002099

Ясно, что за исключением $i = 7$ и $i = 8$ (при меньших значениях собственных чисел) погрешности невелики.

Вычислительные эксперименты аппроксимации собственных векторов субполосной матрицы по оцениванию среднеквадратической погрешности, помехоустойчивости и доли энергии за пределами заданного частотного диапазона выполнялись с помощью математического пакета MatLab.

Для сравнительных исследований с оптимальным канальным сигналом были выбраны два вида манипуляции: наиболее помехоустойчивая BPSK и с минимальной занимаемой полосой частот GMSK (Gaussian Minimum Shift Keying – это гауссовская двухпозиционная частотная манипуляция с минимальным сдвигом, обладающая двумя особенностями, одна из которых – "минимальный сдвиг", другая – гауссовская фильтрация). Все особенности по формированию GMSK-сигнала направлены на сужение занимаемой полосы частот. BPSK (Binary Phase-Shift Keying) – двоичная фазовая манипуляция со скачкообразным переключением фазы синусоидального сигнала на 180° при неизменной амплитуде, при фазе 0° ставится в соответствие логический ноль, а 180° – логическая единица. Для проведения вычислительных экспериментов в модели задается произвольная последовательность бит длительностью $\tau_0 = 3.36 \cdot 10^{-6} c$ (GSM).

В таблице 3 приведены результаты экспериментов по расчету доли энергии в заданном интервале частот для различных методов формирования канальных сигналов.

Таблица 3

Доля энергии за пределами частотного диапазона различных методов передачи

ОМ	0,0016729
ОМ (аппроксимация)	0,0017651
GMSK	0,042633
BPSK	0,36028

Из таблицы видно, что оптимальный канальный сигнал в 25 раз имеет меньшую долю энергии в заданной полосе частот (200 кГц) по сравнению с наиболее узкополосным сигналом известным на сегодняшний день. Канальный сигнал, сформированных на аппроксимации субполосных функций, имеет долю энергии за пределами частотного диапазона близкую к оптимальному методу.

Оценивание помехоустойчивости моделируемых методов на воздействие белого шума осуществлялось следующим образом: выбирались различные уровни энергии белого шума по отношению к уровню энергии канального сигнала, на приемной стороне проводилась демодуляция и сравнение с исходной передаваемой информацией.

В таблице 4 приведены результаты эксперимента по проверке помехоустойчивости моделируемых методов, при различных соотношениях шум/сигнал.

Как видно из таблицы вероятность правильного приема при передаче информации оптимальным методом сравнима с двоичной фазовой манипуляцией, которая обладает наиболее высокой помехоустойчивостью среди существующих методов. Метод формирования на основе аппроксимаций собственных векторов субполосных матриц обладает помехоустойчивостью сравнимой с двоичной фазовой манипуляцией

Таблица 4

Вероятность ошибки при различных уровнях белого шума

Отношение шум/сигнал (d)	ОМ	ОМ (аппроксимация)	BPSK
0.9	0	0	2.5e-006
1	7.5e-006	7.5e-006	5e-006
1.1	3e-005	3.25e-005	2.75e-005
1.25	1.8e-004	1.825e-004	1.425e-004
1.43	8.225e-004	8.325e-004	8.75e-004
1.6	3.623e-003	3.633e-003	3.728e-003
2	1.280e-002	1.276e-002	1.253e-002
2.5	3.68275e-002	3.68525e-002	3.6975e-002
3.3	8.985e-002	8.98225e-002	9.0055e-002
5	1.86315e-001	1.86365e-001	1.8543e-001
10	3.27335e-001	3.274075e-001	3.258425e-001
20	4.11095e-001	4.11095e-001	4.120525e-001
100	4.82e-001	4.819025e-001	4.820425e-001

Разработанный метод позволяет существенно повысить эффективность использования частотных ресурсов путем минимизации доли энергии за переделами заданного частотного интервала, при этом существенно понизить интерференцию между соседними каналами. На основе собственных функций субполосного ядра возможно сформировать непрерывный канальный сигнал, упростив при этом аппаратную реализацию. Сформированный канальный сигнал обладает помехоустойчивостью сравнимой с наиболее помехоустойчивой двоичной фазовой манипуляцией, без потерь в скорости передачи информации, и даже обладает преимуществами при различных уровнях помех, не теряя при этом скорости передачи полезной информации.

Литература

1. Кузнецов М.А. GPRS – технология пакетной передачи данных в сетях GSM / Кузнецов М.А., Абатуров П.С., Никодимов И.Ю., Певцов Н.В., Рыжков А.Е., Сиверс М.А. СПб: Судостроение, 2002. – 144 с.

2. Жиляков Е.Г. Вариационные методы анализа и построения функций по эмпирическим данным: моногр. / Е.Г. Жиляков. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.

3. Жиляков, Е.Г. Оптимальные канальные сигналы при цифровой передаче с частотным уплотнением [Текст] / Е.Г. Жиляков, С.П. Белов, Д.В. Урсол // Научные ведомости БелГУ Серия: Информатика, Белгород: Изд-во БелГУ, № 7(62), Вып. 10/1 2009. – с. 166 – 172.

Научно-исследовательская работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы. (ГК П2038 от 2 ноября 2009 г.)

APPROXIMATION OF EIGEN FUNCTIONS SUBSTRIP CORE FOR FORMING OPTIMAL CHANNEL SIGNALS

D. V. URSOL

Belgorod State University

e-mail: Ursol@bsu.edu.ru

This article describes a new method of formation of channel signals, which have a high level of noise immunity and have a maximum concentration of energy at a given frequency range. The approximation of the eigenvectors substrip matrix investigated noise immunity and the fraction of energy outside the selected frequency band.

Key words: approximation, methods of data transmission, digital communications, mobile systems, frequency-division multiplexing.