УДК 517.955.4

ПРОСТРАНСТВО НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ[9)]

А.М. Селицкий

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: selitsky@mail.ru

Аннотация. Рассматривается вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения ($n > 1$). Получено описание пространства начальных данных в терминах пространств Соболева при предположении гладкости решений в некоторых подобластях исходной области, получено, что сильное решение будет существовать при начальных функциях из $W_2^1(Q)$. Тем самым выявлен новый класс операторов, для которых верна гипотеза Т. Като о корне квадратном из оператора. Используемые методы основаны на теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и теории интерполяции пространств Соболева с краевыми условиями.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, теория полугрупп, теория интерполяции.

1. Введение

Первая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения со сдвигами по пространственным переменным рассматривалась в работах [?]-[?]. В работе [?] была установлена связь такого рода задач с нелокальными задачами. Вопрос сильной разрешимости в терминах интерполяционных пространств изучался в работах [?], [?] и др., точное описание этих пространств в терминах пространств Соболева получено в [?]. Оказывается, что возникающие при этом пространства начальных данных связаны с известной проблемой Т. Като о корне квадратном из оператора, построенного по секториальной форме (замечание 2.29 в [?], гл. VI, §2). В работе [?] были указаны широкие классы функционально-дифференциальных операторов, удовлетворяющих гипотезе Т. Като.

Вторая и третья краевые задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения рассматривались в работах [?], [?]. В этих работах рассматривались области размерности $n > 1$. Но вопрос о явном описании пространств начальных данных оставался открытым. Третья краевая задача в случае $n = 1$ изучалась в работе [?], там вопрос о прастранстве начальных данных решался путем сведения к системе уравнений.

---

[9] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00837), Программы ОМН РАН «Современные проблемы теоретической математики», проект «Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики» и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

В перечисленных работах было показано, что в отличии от параболических уравнений гладкость решений может сохраняться, а может и нарушаться внутри области даже при бесконечно дифференцируемой начальной функции, что и создает сложности в описании интерполяционных пространств.

В данной работе получено описание пространства начальных данных для второй краевой задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения ($n > 1$) в терминах пространств Соболева при предположении гладкости решений в некоторых подобластях исходной области. Используемые методы основаны на теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений [?], [?] и теории интерполяции пространств Соболева с краевыми условиями [?].

Заметим, что краевые задачи для параболических функционально-дифференциальных уравнений возникают в теории нелинейных оптических систем с двумерной обратной связью (см., например, [?] – [?]).

Параболические функционально-дифференциальные уравнения с запаздываниями по времени изучались многими авторами, наиболее общий случай таких уравнений, содержащих переменные запаздывания в старших производных, рассматривался в работах [?], [?].

Автор выражает благодарность А. Л. Скубачевскому за постановку задачи, а также М. С. Аграновичу за указание на работы Р. Сили.

2. Постановка задачи

1. Пусть Q – ограниченная область в R^n ($n \geq 2$) с кусочно гладкой границей

$$\partial Q = \bigcup_{i=1}^{N_0} \overline{M_i},$$

где M_i – $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞ открытые и связные в топологии ∂Q. Предположим, что в окрестности каждой точки $x \in K = \partial Q \setminus \bigcup_i M_i$ область Q удовлетворяет условию конуса, в частности, она диффеоморфна плоскому углу, если $n = 2$.

Введем ограниченные разностные операторы R_{ij}, $R_i : L_2(R^n) \to L_2(R^n)$ по формулам

$$\begin{aligned}(R_{ij}u)(x) &= \sum_{h\in M} a_{ijh}u(x+h) \quad (i, j = 1, \dots, n),\\ (R_i u)(x) &= \sum_{h\in M} a_{ih}u(x+h) \quad (i = 0, 1, \dots, n).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь a_{ijh}, a_{ih} – комплексные числа, множество M состоит из конечного числа векторов с целочисленными координатами.

Введем линейные операторы I_Q, P_Q, R_{ijQ} и R_{iQ}. Оператор $I_Q : L_2(Q) \to L_2(R^n)$ является оператором продолжения функций нулем вне Q; оператор $P_Q : L_2(R^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функций на Q; операторы R_{ijQ}, $R_{iQ} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ определены по формулам $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q$, $R_{iQ} = P_Q R_i I_Q$.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$u_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} \left(R_{ijQ} u_{x_j}(x,t)\right)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} R_{iQ} u_{x_i}(x,t) + R_{0Q} u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.2}$$

с краевым условием

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_{ijQ} u_{x_j} \cos(\nu, x_i) = 0, \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{2.3}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in Q, \tag{2.4}$$

где $Q_T = Q \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, $\Gamma_T = (\partial Q \setminus K) \times (0,T)$, ν – единичный вектор внешней нормали к Γ_T, $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$.

2. Пусть $W_2^k(Q)$ – пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$ с нормой

$$\|v\|_{W_2^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \le k} \int_Q |D^\alpha v(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2}.$$

Введем полуторалинейную форму $a_R[v,w]$ в $L_2(Q)$ с областью определения $W_2^1(Q)$ по формуле

$$a_R[v,w] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(R_{ijQ} v_{x_j}, w_{x_i}\right)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n} \left(R_{iQ} v_{x_i}, w\right)_{L_2(Q)} + \left(R_{0Q} v, w\right)_{L_2(Q)}. \tag{2.5}$$

Разностные операторы R_{ijQ}, R_{iQ}, $R_{0Q} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ – ограниченные. Поэтому существует число $c_0 > 0$ такое, что

$$|a_R[v,w]| \le c_0 \|v\|_{W_2^1(Q)} \|w\|_{W_2^1(Q)} \qquad (v, w \in W_2^1(Q)). \tag{2.6}$$

Поскольку полуторалинейная форма $a_R[v,w]$ непрерывна по w в $W_2^1(Q)$, существует линейный ограниченный оператор $A_R : W_2^1(Q) \to [W_2^1(Q)]^*$ такой, что

$$\langle A_R v, w \rangle = a_R[v,w] \qquad (v, w \in W_2^1(Q)), \tag{2.7}$$

где $[W_2^1(Q)]^*$ – сопряженное пространство к $W_2^1(Q)$.

Определение 2.1. Оператор A_R называется сильно эллиптическим, если существуют числа $c_1 > 0$ и $c_2 \ge 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} \langle A_R v, v \rangle \ge c_1 \|v\|^2_{W_2^1(Q)} - c_2 \|v\|^2_{L_2(Q)} \qquad (v \in W_2^1(Q)). \tag{2.8}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что оператор A_R, соответствующий уравнению (2.2), сильно эллиптический. Необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности оператора A_R в алгебраической форме сформулированы в работе [?] (леммы 2.2 и 2.3). В этом случае естественно назвать задачу (2.2) – (2.4) второй краевой задачей для параболического дифференциально-разностного уравнения.

Далее мы будем предполагать, что в неравенстве (2.8) $c_2 = 0$. В противном случае положим $u = z\, e^{c_2 t}$.

3. Сильные решения

1. Обозначим через $W_2^{k,0}(Q_T)$ пространство функций $u \in L_2(Q_T)$, имеющих все обобщенные производные по x вплоть до k-го порядка из $L_2(Q_T)$, с нормой

$$\|v\|_{W_2^{k,0}(Q_T)} = \left\{ \sum_{|\alpha|\le k} \int_{Q_T} |D_x^\alpha v(x,t)|^2\, dx\, dt \right\}^{1/2}.$$

Определение 3.1. Функция $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ называется слабым решением задачи (2.1) – (2.4), если

$$\int_{Q_T} \left(-u\bar v_t + \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ} u_{x_j}) \bar v_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} (R_{iQ} u_{x_i}) \bar v + (R_{0Q} u) \bar v \right) dx\, dt =$$

$$= \int_{Q_T} f \bar v\, dx\, dt + \int_Q \varphi \bar v|_{t=0}\, dx \quad (3.1)$$

для всех $v \in W_2^1(Q_T)$ таких, что $v|_{t=T} = 0$.

Тождество (3.1) можно получить из уравнения (2.2), используя формальное интегрирование по частям.

Введем гильбертово пространство

$$W = \left\{ v \in L_2\big(0, T;\ W_2^1(Q)\big) :\ v_t \in L_2\big(0, T;\ (W_2^1(Q))'\big) \right\}$$

с нормой

$$\|v\|_W = \left(\int_0^T \|v\|^2_{W_2^1(Q)}\, dt + \int_0^T \|v_t\|^2_{[W_2^1(Q)]'}\, dt \right)^{1/2}.$$

Здесь производные понимаются в смысле распределений на Q_T.

Теорема 3.1. Пусть оператор A_R сильно эллиптический. Тогда задача (2.1) – (2.4) имеет единственное слабое решение $u \in W$ для всех $f \in L_2\big(0, T;\ [W_2^1(Q)]'\big)$ и $\varphi \in L_2(Q)$.

Доказательство см. в [?] (теорема 3.1).

2. Для того, чтобы сформулировать определение сильного решения задачи (2.2) – (2.4), введем понятие m-секториального оператора.

Определение 3.2. Полуторалинейная форма $a[v, w]$ называется секториальной формой с вершиной γ, если ее числовая область значений является подмножеством угла вида

$$\{\zeta \in C : |\arg(\zeta - \gamma)| \le \theta\}, \qquad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad \gamma \in R.$$

Лемма 3.1. Пусть оператор A_R сильно эллиптический и $c_2 = 0$. Тогда форма $a_R[v, w]$ является секториальной с вершиной 0.

Доказательство см. в [?] (лемма 4.1).

Определение 3.3. Линейный оператор A называется m-секториальным с вершиной γ, если оператор $B = A + \alpha I$ для некоторого $\alpha \in R$ удовлетворяет условиям:

1) существует ограниченный оператор $(B + \lambda I)^{-1}$ при $\mathrm{Re}\lambda > 0$,
2) $(B + \lambda I)^{-1} \le (\mathrm{Re}\lambda)^{-1}$, при $\mathrm{Re}\lambda > 0$,

и числовая область значений оператора A является подмножеством некоторого угла вида

$$|\arg(\zeta - \gamma)| \le \theta, \qquad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку $W_2^1(Q)$ – полное пространство, форма $a_R[v, w]$ замкнута. Из леммы 3.1 данной работы и первой теоремы о представлении (см. [?], гл. VI, §2, теорема 2.1) следует существование m-секториального оператора $A_R : D(A_R) \to L_2(Q)$, $D(A_R) \subset L_2(Q)$, с вершиной 0 такого, что

$$a_R[v, w] = (A_R v, w)_{L_2(Q)} \qquad (v \in D(A_R),\ w \in W_2^1(Q)); \tag{3.2}$$

более того, $D(A_R)$ плотно в $W_2^1(Q)$. Заметим, что в силу (2.7) соотношение (3.2) можно записать в виде

$$A_R v = A_R v \qquad (v \in D(A_R)). \tag{3.3}$$

В пространстве $D(A_R)$ введем скалярное произведение по формуле

$$(v, w)_{D(A_R)} = (A_R v, A_R w)_{L_2(Q)} + (v, w)_{L_2(Q)}.$$

Поскольку оператор A_R замкнутый, пространство $D(A_R)$ является гильбертовым.

Введем гильбертово пространство

$$W(A_R) = \{ w \in L_2(0, T; D(A_R)) : w_t \in L_2(Q_T) \}$$

со скалярным произведением

$$(v, w)_{W(A_R)} = \int_0^T (A_R v, A_R w)_{L_2(Q)}\, dt + \int_0^T (v, w)_{L_2(Q)} dt + \int_0^T (v_t, w_t)_{L_2(Q)}\, dt.$$

Определение 3.4. Слабое решение $u(x, t)$ задачи (2.2) – (2.4) называется сильным решением, если $u \in W(A_R)$.

3. Для доказательства существования сильного решения мы используем теорию полугрупп.

Определение 3.5. Сильно непрерывная полугруппа операторов $\{T_t\}$ $(t \geq 0)$ в гильбертовом пространстве H называется сжимающей, если $T_t \quad \leq 1$ $(t \geq 0)$.

Обозначим $\Delta_\omega = \{z \in C : |\arg z| < \omega\}$, где $0 < \omega < \pi$.

Определение 3.6. Семейство линейных ограниченных операторов $\{T_z\}$ $(z \in \Delta_\omega)$ в H называется аналитической полугруппой в Δ_ω, если 1) функция $z \to T_z$ аналитическая в Δ_ω, 2) $T_0 = I$ и $\lim\limits_{z \to 0,\, z \in \Delta_\omega} T_z x = x$ $(x \in H)$, 3) $T_{z_1+z_2} = T_{z_1} T_{z_2}$ $(z_1, z_2 \in \Delta_\omega)$. Полугруппа $\{T_t\}$ $(t \geq 0)$ называется аналитической, если существует аналитическое продолжение T_z оператор-функции T_t в некоторый сектор Δ_ω.

Теорема 3.2. Оператор $(-A_R)$ является генератором аналитической сжимающей полугруппы.

П Оператор A_R – m-секториальный с вершиной 0. Из теоремы 1.24 в работе [?], гл. IX, §1, следует, что оператор $(-A_R)$ является генератором аналитической сжимающей полугруппы. И

Пусть X_0 и X_1 – банаховы пространства и $X_1 \subset X_0$ линейно и непрерывно. Обозначим через S полосу

$$S = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}.$$

Через $H(X_1, X_0)$ обозначим пространство непрерывных ограниченных функций $f : \overline{S} \to X_0$ аналитических в S, таких что $f(j + iy) \in X_j$ и $f(j + iy)$ непрерывна как X_j-значная функция от y, $j = 0, 1$, $-\infty < y < +\infty$, с нормой

$$f \quad _{H(X_1, X_0)} = \max_{j=0,\, 1} \sup_{-\infty < y < +\infty} \quad f(j + iy) \quad _{X_j}.$$

В дальнейшем нам понадобится интерполяционное пространство

$$[X_1, X_0]_\theta = \{a \in X_0 : \exists f(z) \in H(X_1, X_0) \text{ с } f(\theta) = a\}$$

с нормой

$$a \quad _{[X_1, X_0]_\theta} = \inf_{f(\theta)=a} \quad f \quad _{H(X_1, X_0)}.$$

Также нам понадобится неравенство

$$f(\theta + iy) \quad _{[X_1, X_0]_\theta} \leq \quad f \quad _{H(X_1, X_0)}, \tag{3.4}$$

справедливое при всех действительных y (см. неравенство (1.4) в [?]).

Теорема 3.3. Задача (2.2) – (2.4) для любых $f \in L_2(Q_T)$ и $\varphi \in [D(A_R),\ L_2(Q)]_{1/2}$ имеет единственное решение, которое определяется по формуле

$$u(x,t) = T_t\varphi(x) + \int_0^t T_{t-s}f(x,s)\,ds, \tag{3.5}$$

где $\{T_t\}$ $(t \geq 0)$ – аналитическая полугруппа с генератором $(-A_R)$.

Доказательство см. в [?] (теорема 4.2).

4. Пространство начальных данных

1. В теореме 3.3 принадлежность начальной функции пространству $[D(A_R),\ L_2(Q)]_{1/2}$ является необходимым и достаточным условием существования сильного решения. Таким образом, возникает проблема описания этого интерполяционного пространства. В случае первой краевой задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений в работе [?] при некоторых предположениях относительно области Q и сильно эллиптического оператора A_R было доказано, что выполняется равенство

$$[D(A_R),\ L_2(Q)]_{1/2} = \mathring{W}_2^1(Q).$$

В [?] этот результат был обобщен на более широкий класс сильно эллиптических функционально-дифференциальных операторов, в частности, были сняты предположения, наложенные в [?], при этом использовался тот факт, что разностный оператор отображает $\mathring{W}_2^1(Q)$ в $W_2^1(Q)$, что не верно в случае второго краевого условия. В данной работе получен результат аналогичный [?], только для описания интерполяционного пространства использовался не только метод следов, как в [?], но и комплексный метод.

2. Для того, чтобы сформулировать условия, накладываемые на область Q и сильно эллиптический оператор A_R, введем некоторые обозначения. Обозначим через G аддитивную группу, порожденную множеством M. Обозначим через Q_r открытые связные компоненты множества $Q \setminus \bigcup_{h\in G}(\partial Q + h)$.

Определение 4.1. Множество Q_r называется подобластью. Множество R всех подобластей Q_r называется разбиением области Q.

Разбиение R естественным образом распадается на непересекающиеся классы. А именно, подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in R$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in G$ такой, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти через Q_{sl}, где s – номер класса $(s = 1, 2, \ldots)$, а l – номер подобласти в s-ом классе. В силу ограниченности области Q каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \leq (\mathrm{diam}\ Q + 1)^n$. Вообще говоря, множество классов счетно. Обозначим через h_{sl} вектор $h \in G$ такой, что $Q_{s1} + h = Q_{sl}$. Очевидно, $h_{s1} = 0$.

Рассмотрим следующее множества:

$$K = \mathop{}\limits_{h_1, h_2 \in G} \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \ .$$

Для простоты доказательств будем предполагать, что $K \subset \mathbf{K}$.

Приведем вспомогательные результаты лемм 7.3 – 7.5 работы [?], §7.

Лемма 4.1. А) Пусть $x^0 \in \partial Q_{sl} \cap \partial Q$. Предположим, что существует последовательность точек $\{x^k\}$ таких, что $x^k \to x^0$ при $k \to \infty$ и $x^k \in \overline{Q}_{s_k l_k}$, $(s_k, l_k) = (s, l)$. Тогда $x^0 \in \mathbf{K}$.

Б) Пусть $x^0 \in Q \cap \partial Q_{pl} \cap \partial Q_{qm}$, $(p, l) = (q, m)$. Предположим, что существует последовательность точек $\{x^k\}$ таких, что $x^k \to x^0$ при $k \to \infty$ и $x^k \in \overline{Q}_{s_k l_k}$, $(s_k, l_k) = (p, l), (q, m)$. Тогда $x^0 \in \mathbf{K}$.

Обозначим через Γ_p открытые связные (в топологии ∂Q) компоненты множества $\partial Q \setminus K$. Очевидно, $\Gamma_p \in C^\infty$.

Лемма 4.2. Пусть $(\Gamma_p + h) \cap \overline{Q} = \varnothing$ для некоторого $h \in G$. Тогда либо $\Gamma_p + h \subset Q$, либо существует $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus K$ такое, что $\Gamma_p + h = \Gamma_r$.

В силу леммы 4.1 мы можем разбить множество $\{\Gamma_p + h \ : \ \Gamma_p + h \subset \overline{Q}, \ p = 1, 2, \dots; \ h \in G\}$ на классы следующим образом. Множества $\Gamma_{p_1} + h_1$ и $\Gamma_{p_2} + h_2$ принадлежат одному и тому же классу, если 1) существует $h \in G$ такой, что $\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h$ и 2) в случае $\Gamma_{p_1} + h_1, \ \Gamma_{p_2} + h_2 \subset \partial Q$ направления внутренних нормалей к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{p_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$ совпадают. Множество $\Gamma_p \subset \partial Q$ может принадлежать только одному классу, а множество $\Gamma_p + h \subset Q$ — не более, чем двум классам. Обозначим множество $\Gamma_p + h$ через Γ_{rj}, где r — номер класса, а j — номер элемента в данном классе $(1 \le j \le J = J(r))$. Без ограничения общности будем предполагать, что $\Gamma_{r1}, \dots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{r, J_0+1}, \dots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ $(0 \le J_0 = J_0(r) < J(r))$.

Теорема 4.1. Пусть $\mu_{n-1}(K \cap \partial Q) = 0$ и $\mathbf{K} \subset K$, числа S_0 и r_0 различных классов подобластей S_{sl} и поверхностей Γ_{rm} конечны, и каждая подобласть Q_{sl} $(s = 1, \dots, S_0;$ $l = 1, \dots, N(s))$ липшицева. Пусть также оператор A_R сильно эллиптический с $c_2 = 0$ и решение задачи $A_R = f$ принадлежит $W_2^2(Q_{sl})$. Тогда

$$[D(A_R), \ L_2(Q)]_{1/2} = W_2^1(Q). \qquad (3.6)$$

П 1. Опишем пространство $D(A_R)$. По условию теоремы $D(A_R) \subset W_2^1(Q) \cap W_2^2(Q_{sl})$. Очевидно, что $R_Q u_{x_i} \in W_2^1(Q_{sl})$. Проинтегрируем по частям следующее выражение по области Q_{sl}:

$$\int_{Q_{sl}}\left(\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ijQ}u_{x_j})\bar v_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}(R_{iQ}u_{x_i})\bar v+(R_{0Q}u)\bar v\right)dx=$$

$$=\int_{Q_{sl}}\left(-\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ijQ}u_{x_j})_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}(R_{iQ}u_{x_i})+(R_{0Q}u)\right)\bar v\,dx+$$

$$+\int_{\partial Q_{sl}\setminus K}\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ijQ}u_{x_j})\bar v\big|_{\partial Q_{sl}\setminus K}\cos(\nu,\ x_i)\,dx \qquad (3.7)$$

для всех $v\in W_2^1(Q)$. После суммирования по всем s и l получаем

$$\int_{Q}\left(\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ijQ}u_{x_j})\bar v_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}(R_{iQ}u_{x_i})\bar v+(R_{0Q}u)\bar v\right)dx=$$

$$=\int_{Q}f\bar v\,dx+\sum_{s,l}\int_{\partial Q_{sl}\setminus K}\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ijQ}u_{x_j})\bar v\big|_{\partial Q_{sl}\setminus K}\cos(\nu,\ x_i)\,dx\,, \qquad (3.8)$$

где $f\in L_2(Q)$ определена по формуле $f(x)=-\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ijQ}u_{x_j})_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}(R_{iQ}u_{x_i})+(R_{0Q}u)$ при $x\in Q_{sl}$. Тогда, так как u удовлетворяет тождеству $(A_Ru,\ v)_{L_2(Q)}=(f,\ v)_{L_2(Q)}$, то

$$\sum_{s,l}\int_{\partial Q_{sl}\setminus K}\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ijQ}u_{x_j})\bar v\big|_{\partial Q_{sl}\setminus K}\cos(\nu,\ x_i)\,dx=0\,. \qquad (3.9)$$

Таким образом, функция $u\in W_2^1(Q)\cap W_2^2(Q_{sl})$ принадлежит $D(A_R)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (4.4). Условия (4.4) определяют замкнутое линейное подпространство в $W_2^1(Q)\cap W_2^2(Q_{sl})$ (более подробно см. [?]). Обозначим через $W_2^{2,R}(Q)$ пространство функций, принадлежащих $W_2^1(Q)\cap W_2^2(Q_{sl})$, и удовлетворяющих условиям (4.4). Так как $0\in\sigma(A_R)$, и оператор $A_R: W_2^{2,R}(Q)\to L_2(Q)$ ограниченный, по теореме Банаха об обратном операторе нормы $\|u\|_{D(A_R)}$ и $\|u\|_{W_2^{2,R}(Q)}$ эквивалентны в $D(A_R)$.

Так как необходимым и достаточным условием принадлежности функции $u\in W_2^1(Q_{sl})$ пространству $W_2^1(Q)$ является совпадение следов на смежных границах, то пространство $W_2^{2,R}(Q)$ — это подпространство пространства $W_2^2(Q_{sl})$ с условиями (4.4) и условием совпадения следов на смежных границах подобластей Q_{sl}.

2. Докажем теперь, что $[W_2^{2,R}(Q),\ L_2(Q)]_{1/2}=W_2^{1,R}(Q)$, где $W_2^{1,R}(Q)$ — это пространство $W_2^1(Q_{sl})$ с условием совпадения следов на смежных границах подобластей Q_{sl}, т. е. пространство $W_2^1(Q)$. Для доказательства воспользуемся комплексным методом интерполяции, см. [?]. Пусть $u\in[W_2^{2,R}(Q),\ L_2(Q)]_{1/2}$ и $f\in H\left(W_2^{2,R}(Q),\ L_2(Q)\right)$

такая, что $f(1/2) = u$. Так как $W_2^{2,R}(Q) \subset W_2^2(Q_{sl})$. Из неравенства (3.4) и того, что $W_2^2(Q_{sl}), L_2(Q)\ _\theta = W_2^{2\theta}(Q_{sl})$ (в силу интерполяционных теорем 7.1, 9.1 и 9.2 в [?] и теоремы 5 в [2], гл. VI, §3 о продолжении функций для областей с липшицевой границей), следует, что сужение функции f на $\frac{1}{2} \le \operatorname{Re} z \le 1$ — непрерывное отображение в $W_2^1(Q_{sl})$ аналитическое в $\frac{1}{2} \le \operatorname{Re} z < 1$. Если обозначить T оператор взятия следа, то отображение $z \to Tf(z)$ непрерывно в $L_2(\partial Q_{sl})$ при $\theta \le \operatorname{Re} z \le 1$ и аналитическое при $\theta \le \operatorname{Re} z < 1$. Таким образом, функция $f(z)$ пинадлежит $W_2^{\frac{1}{2}}(Q_{sl})$ и удовлетворяет условию совпадения следов на смежных границах подобластей Q_{sl} при $\operatorname{Re} z \ge \theta$, а значит $u \in W_2^{1,R}(Q)$. И

Литература

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения / М.: Мир, 1971.

2. Stein E.M. Singular integrals and differentiability properties of functions // Math. Series. –

№30 / Princeton: Princeton Univ. Press, 1970.

INITIAL DATE SPACE FOR SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM OF PARABOLIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATION

A. M. Selitskii

Dorodnitcyn Computing Centre of RAS,

Vavilova St., 40, Moscow, 119333, Russia, e-mail: selitsky@mail.ru

Abstract. The second mixed problem for parabolic differential-difference equation ($n > 1$) is studied. The description of initial data space is obtained in the terms of Sobolev's spaces in the case when the solution is smooths in some subdomains of original domain. It is obtained also that the strong solution exists if the initial function belongs to $W^1_2(Q)$. So, the new class of operators satisfying the Kato hypothesis relative to the operator square root is found. We have used the theory of functional differential equations and the theory of interpolation of Sobolev's spaces with boundary conditions.

Key words: functional differential equations, theory of semigroups, interpolation theory.