УДК 511.9

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ СЕТКИ БИКВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ ДИРИХЛЕ [2)]

А.С. Герцог

Тульский государственный педагогических университет им. Л.Н. Толстого,
пр. Ленина, 125, Тула, 300026, Россия, e-mail: asg316@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос о приближенном интегрировании четырехкратных интегралов по методу К.К. Фролова. Предлагается использовать биквадратичные поля Дирихле. С этой целью построена параметризация четырехмерной сетки биквадратичного поля Дирихле.

Ключевые слова: биквадратичные поля, алгеблаические сетки, метод К.К. Фролова.

1. Введение

В работе рассматриваются вопросы приближенного интегрирования функции многих переменных по единичному s-мерному кубу по методу К.К. Фролова [3] для непрерывных периодических функций с периодом равным единице по каждой из переменных x_ν, $\nu = 1, ..., s$, принадлежащих классу $E_s^\alpha(C)$, который состоит из периодических функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

где

$$|C(\vec{m})| \le \frac{C}{(\overline{m}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{m}_s)^\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

и $\overline{m} = max\{1, |m|\}$ для любого вещественного m. Областью интегрирования является единичный s-мерный куб $\overline{G}_s$:

$$\overline{G}_s = \{\, \vec{x} \mid 0 \le x_\nu \le 1, \nu = 1, 2, ..., s \,\} = [0;1]^s,$$
$$G_s = \{\, \vec{x} \mid 0 \le x_\nu < 1, \nu = 1, 2, ..., s \,\} = [0;1)^s.$$

В работе [1] дано полное и подробное изложение метода К. К. Фролова (см.[2], [3]) с вычислением констант, входящих в оценки погрешности метода, и уточнением отдельных деталей метода. Для классов функций $E_s^\alpha(C)$, ($\alpha > 1$) получены неулучшаемые по порядку оценки сверху погрешности квадратурных формул для вычисления кратных интегралов с помощью алгебраических параллелепипедальных сеток, так как они совпадают с нижними оценками И.Ф. Шарыгина [4].

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №11-01-00751.

Обозначим через $\Pi_s(T)$, K_s, $E(x,t)$ и q, соответственно, параллелепипед

$$\Pi_s(T) = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, |t_{\nu\,1}x_1 + ... + t_{\nu\,s}x_s| \le \frac{1}{2},\ \nu = 1, ..., s \right\},$$

s-мерный куб

$$K_s = \{\vec{x} \mid |x_\nu| \le 1,\ \nu = 1, ..., s\},$$

характеристическую функцию $[0,t]$,

$$E(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0,t]\,; \\ 0, & \text{если } x \notin [0,t]\,. \end{cases}$$

и целое, положительное, нечетное число q.

Лемма 1. *Параллелепипед $\Pi_s(T)$ содержит куб K_s тогда и только тогда, когда $||T||_1 \le \frac{1}{2}$, где $||T||_1 = \max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant s} \sum\limits_{j=1}^{s} |t_{\nu\,j}|$.*

Если параллелепипед $\Pi_s(T)$ содержит куб K_s, то $|\det T| \le \frac{1}{2^s}$.

Теорема 1. *Пусть параллелепипед $\Pi_s(T)$ содержит куб K_s и зафиксирована сетка из $N = q^s$ узлов $\vec{\xi}(k_1, ..., k_s) = (\xi_1(\vec{k}), ..., \xi_s(\vec{k}))$ с весами $\rho(k_1, ..., k_s)$, определенными равенствами*

$$\vec{\xi}(\vec{k}) = (qT)^{-1}\vec{k}\,, \qquad |k_\nu| \le \frac{q-1}{2}\,, \quad \nu = 1, ..., s\,,$$

$$\rho(\vec{k}) = \prod_{\nu=1}^{s} (1 - |\xi_\nu(\vec{k})|) \cdot E(|\xi_\nu(\vec{k})|, 1)\,.$$

Тогда погрешность квадратурной формулы

$$\int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = \frac{|\det T|^{-1}}{N} \sum_{k_1=-\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}} ... \sum_{k_s=-\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}} \rho(\vec{k}) f(\vec{\xi}(\vec{k})) - R_N[f] \qquad (4.1)$$

на классе функций $E_s^\alpha(C)$, $(1 < \alpha \le 2)$ удовлетворяет оценке

$$R_N(E_s^\alpha(C)) = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} |R_N(f)| \le$$

$$\le C \cdot (2(1 + \zeta(\alpha))) + (1 + 2\zeta(\alpha))2^\alpha)^s\, \zeta_H(q \cdot \Lambda(T)|\alpha)\,,$$

где гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(q \cdot \Lambda(T)|\alpha)$ решетки $q \cdot \Lambda(T)$ при $\alpha > 1$ задается абсолютно сходящимся рядом

$$\zeta_H(q \cdot \Lambda(T)|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in q\cdot\Lambda(T)\setminus\{\vec{0}\}} (\overline{x}_1 \cdot ... \cdot \overline{x}_s)^{-\alpha}\,.$$

Особую роль в методе Фролова играют алгебраические сетки построенные с помощью чисто вещественных алгебраических полей степени s.

Пусть все коэффициенты многочлена

$$P_s(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{4.2}$$

целые рациональные, и он неприводим над полем рациональных чисел. Пусть, кроме того, все корни Θ_ν $(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (4.2) действительные.

Обозначим через $T = T(\vec{a})$, где $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ – вектор целочисленных коэффициентов многочлена $P_s(x)$, матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$ – корней многочлена $P_s(x)$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Если все корни Θ_ν, $\nu = 1, \ldots, s)$ неприводимого многочлена*

$$P_s(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s$$

с целыми коэффициентами действительны и $T = T(\vec{a})$ – матрица, порождаемая этим набором корней, α – фиксированное действительное число больше единицы, то для гиперболической дзета-функции решетки $\zeta_H(q\Lambda(T)|\alpha)$, связанной с матрицей $T = T(\vec{a})$ и числом α, справедлива оценка:

$$\zeta_H(q\Lambda(T)|\alpha) \leqslant$$
$$\leqslant q^{-s\alpha}\left(6^s \cdot (s+1)\left(\frac{s\alpha(s-1)\log_2 q}{\alpha-1} + s\log_2(\lambda_2(T)) + 2\right)^{s-1}\zeta(\alpha) + \right.$$
$$\left. + \frac{2^{s+\alpha-1}s\alpha}{(\alpha-1)\lambda(T)^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{1}{\lambda(T)}\right)^s\left(1 + \frac{\zeta(\alpha)}{q^\alpha}\right)^{s-1}\right).$$

Цель данной работы: предложить для реализации метода Фролова при $s = 4$ биквадратичные поля Дирихле и для поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ найти такую параметризацию точек алгебраической сетки, которая исключает «холостую работу» по проверки принадлежности точек области интегрирования, такую параметризацию сетки будем называть точной.

2. Использование биквадратичных полей Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})$

Таким образом, при $s=4$ в методе Фролова возникает необходимость использовать биквадратичные поля. Среди всего множества биквадратичных полей выделяются простотой задания биквадратичные поля Дирихле. Общим случаем биквадратичного поля Дирихле является поле вида

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})=\mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})=\{a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}+d\sqrt{pq}\,|\,a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}.$$

где $(p,q)=1$, $1<p<q$ — натуральные числа свободные от квадратов. Минимальным многочленом для примитивного элемента $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ является многочлен

$$P_{\vec{a}}(x)=x^4-2(p+q)x^2+(p-q)^2=$$
$$=(x^2-(q-p)-2x\sqrt{p})(x^2-(q-p)+2x\sqrt{p})=$$
$$=(x-\sqrt{p}-\sqrt{q})(x-\sqrt{p}-\sqrt{q})(x+\sqrt{p}-\sqrt{q})(x+\sqrt{p}+\sqrt{q}) \qquad (4.3)$$

с целыми рациональными коэффициентами, неприводимый над полем рациональных чисел, имеющим четыре действительных корня:

$$\Theta_1=\sqrt{p}+\sqrt{q}\,,\quad \Theta_2=\sqrt{p}-\sqrt{q}\,,\quad \Theta_3=-\sqrt{p}+\sqrt{q}\,,\quad \Theta_4=-\sqrt{p}-\sqrt{q}\,.$$

Вектором $\vec{a}$ целочисленных коэффициентов многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ является $\vec{a}=((p-q)^2,0,$ $-2(p+q),0)$. Матрицей $T=T(\vec{a})$ степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 – корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ является:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1\\
\sqrt{p}+\sqrt{q} & \sqrt{p}-\sqrt{q} & \sqrt{q}-\sqrt{p} & -\sqrt{p}-\sqrt{q}\\
2\sqrt{pq}+p+q & p+q-2\sqrt{pq} & p+q-2\sqrt{pq} & 2\sqrt{pq}+p+q\\
p_1\sqrt{p}+q_1\sqrt{q} & p_1\sqrt{p}-q_1\sqrt{r} & q_1\sqrt{q}-p_1\sqrt{p} & -p_1\sqrt{p}-q_1\sqrt{q}
\end{pmatrix}$$

с $\det T=64pq\cdot(p-q)$.

И, наконец,

$$\lambda_1(\vec{a})=||T(\vec{a})||_1=\max_{0\le k\le 3}\{|\Theta_1|^k+|\Theta_2|^k+|\Theta_3|^k+|\Theta_4|^k\}=$$
$$=\max\{4,\ 4\sqrt{q},\ 4(p+q),\ 4(3p+q)\sqrt{q}\}=4(3p+q)\sqrt{q},$$

$$\lambda_2(\vec{a})=||T(\vec{a})||_2=\max_{\nu=1,\ldots,4}\{1+|\Theta_\nu|+|\Theta_\nu^2|+|\Theta_\nu^3|\}=||T^T(\vec{a})||_1=$$
$$=1+|\Theta_1|+|\Theta_1^2|+|\Theta_1^3|=1+p+q+(1+p_1)\sqrt{p}+(1+q_1)\sqrt{q}+2\sqrt{pq}.$$

Таким образом, в случае $s = 4$, используя биквадратичное поле Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$, получаем матрицу

$$T^{-1} = \frac{1}{8\sqrt{pq}} \begin{pmatrix} -r_-^2 & -r_-^2 r_+^{-1} & 1 & r_+^{-1} \\ r_+^2 & r_+^2 r_-^{-1} & -1 & -r_-^{-1} \\ r_+^2 & -r_+^2 r_-^{-1} & -1 & r_-^{-1} \\ -r_-^2 & r_-^2 r_+^{-1} & 1 & -r_+^{-1} \end{pmatrix},$$

$r_\pm = \sqrt{p}\pm\sqrt{q}$, и все необходимое для вычисления четырехкратных интегралов по методу Фролова имеется.

Квадратурные формулы Фролова с алгебраическими сетками имеют точный порядок погрешности. Анализируя квадратурную формулу (2) видим, что реально в приближенном вычислении кратного интеграла участвуют не все $N = (2q+1)^s$ точек сетки, а меньшее число — только те, которые попадают в s-мерный куб $[-1;1]^s$.

Таким образом, возникает проблема сокращения работы по генерации точек сетки, реально используемых в квадратурной формуле по методу Фролова.

3. Ограничение области изменения параметров сетки

Для численного эксперимента была выбрана функция $h(\vec{x}) = 3^s(1-2\{x_1\})^2\ldots(1-2\{x_s\})^2$, которая является граничной функцией для параллепипедальных сеток на классе $E_s^2(1,6/\pi^2)$ и используется как основа для количественной меры качества наборов оптимальных коэффициентов.

В качестве биквадратичного поля Дирихле было взято поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Для этого поля сопряженными биквадратичными иррациональностями для примитивного элемента $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ являются:[3)]

$$\alpha1 := \sqrt{2}+\sqrt{3}\,, \quad \alpha2 := \sqrt{2}-\sqrt{3}\,, \quad \alpha3 := \sqrt{3}-\sqrt{2}\,, \quad \alpha4 := -\sqrt{2}-\sqrt{3}\,.$$

При этом степенная матрица

$$MT := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha1 & \alpha2 & \alpha3 & \alpha4 \\ \alpha1^2 & \alpha2^2 & \alpha3^2 & \alpha4^2 \\ \alpha1^3 & \alpha2^2 & \alpha3^3 & \alpha4^3 \end{pmatrix}$$

в числовом выражении принимает вид

$$MT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3.1462643699 & -0.3178372452 & 0.3178372452 & -3.1462643699 \\ 9.8989794856 & 0.1010205144 & 0.1010205144 & 9.8989794856 \\ 31.1448064542 & -0.032108082 & 0.032108082 & -31.1448064542 \end{pmatrix}.$$

[3]Здесь и далее используется знак := из системы MATHCAD, означающий определение того или иного объекта.

Следующая константа

$$\lambda := \max\left\{4,\ |\alpha 1|+|\alpha 2|+|\alpha 3|+|\alpha 4|,\ \alpha 1^2+\alpha 2^2+\alpha 3^2+\alpha 4^2,\right.$$
$$\left.|\alpha 1|^3+|\alpha 2|^3+|\alpha 3|^3+|\alpha 4|^3\right\}$$

позволяет задать основную матрицу для вычисления сетки

$$T1 := \frac{1}{2\lambda}\cdot MT, \quad T1 = \begin{pmatrix} 0.00802 & 0.00802 & 0.00802 & 0.00802 \\ 0.02523 & -0.00255 & 0.00255 & -0.02523 \\ 0.07938 & 0.00081 & 0.00081 & 0.07938 \\ 0.24974 & -0.00026 & 0.00026 & -0.24974 \end{pmatrix}.$$

Непосредственная реализация квадратурной формулы (2) в виде программ-функций, написанных в системе MATHCAD, для случая s=4 показала существенный рост временных затрат, связанных со значительной холостой работы программы, затраченной на проверку принадлежности точек сетки области интегрирования.

Рассмотрим равномерную сетку

$$M_s(q) = \left\{\left(\frac{k_1}{2q+1},\dots,\frac{k_s}{2q+1}\right)\middle| -q\leqslant k_1,\dots,k_s\leqslant q\right\}$$

из $N=(2q+1)^s$ точек, лежащих в s-мерном кубе $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^s$. Сетка Фролова $M(T1,2q+1)$ является образом равномерной сетки $M_s(q)$ при линейном преобразовании с матрицей $T1^{-1}$: $M(T1,2q+1)=T1^{-1}\cdot M_s(q)$. Для матрицы $T1=\frac{1}{2\|T\|_1}\cdot T$ выполнено $\|T1\|_1=\frac{1}{2}$, поэтому по лемме 1 параллелепипед

$$\Pi_s(T1) = \left\{\vec{x}\,\middle|\,|t_{\nu 1}x_1+\ldots+t_{\nu s}x_s|\leqslant\frac{1}{2}, \quad \nu=1,\dots,s\right\},$$

содержит куб

$$K_s = \{\vec{x}\,|\,|x_\nu|\leqslant 1, \quad \nu=1,\dots,s\}.$$

Из определения параллелепипеда $\Pi_s(T1)$ следует, что он является образом s-мерного куба $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^s$ при линейном преобразовании с матрицей $T1^{-1}$

$$\Pi_s(T1) = T1^{-1}\cdot\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^s.$$

Положим

$$M_1(T1,2q+1) = M(T1,2q+1)\bigcap K_s$$

и

$$M_s^*(q,T1) = T1\cdot M_1(T1,2q+1)\,.$$

Тогда квадратурная формула

$$\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = \frac{|\det T1|^{-1}}{N}\sum_{k_1=-q}^{q}\dots\sum_{k_s=-q}^{q}\rho(\vec{k})\,f(\vec{\xi}(\vec{k}))-R_N[f] \qquad (4.4)$$

с $N=(2q+1)^s$ узлами и весами

$$\vec{\xi}(\vec{k})=\frac{1}{2q+1}T1^{-1}\,\vec{k},\quad (|k_\nu|\leqslant q,\quad \nu=1,\ldots,s;\,),$$
$$\rho(\vec{k})=\prod_{\nu=1}^{s}\left(\left(1-|\xi_\nu(\vec{k})|\right)E\left(|\xi_\nu(\vec{k})|,1\right)\right)$$

перепишется в виде

$$\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x}=\frac{|\det T1|^{-1}}{N}\sum_{\vec{k}\in M_s^*(q,T1)}\rho_1(\vec{k})\,f(\vec{\xi}\,(\vec{k}))-R_N[f]\,, \tag{4.5}$$

где

$$\rho_1(\vec{k})=\prod_{\nu=1}^{s}\left(1-|\xi_\nu(\vec{k})|\right).$$

Лемма 2. *Целочисленная сетка $(2q+1)M_s^*(q,T1)$ содержится в прямоугольном параллелепипеде $\prod_{\nu=1}^{s}[-q_\nu;q_\nu]$, где*[4)]

$$q_\nu=\left[(2q+1)\sum_{j=1}^{s}|t_{\nu,j}|\right],\quad \nu=1,\ldots,s.$$

□ Так как

$$M_s^*(q,T1)=T1\cdot\left(M(T1,2q+1)\bigcap K_s\right)=M_s(q)\bigcap(T1\cdot K_s),$$

то для любого $\vec{k}\in(2q+1)M_s^*(q,T1)$ найдется единственный $\vec{x}$ с $\|\vec{x}\|_1\leqslant 1$ такой, что $\vec{k}=(2q+1)T1\cdot\vec{x}$. Отсюда следует, что

$$|k_\nu|=(2q+1)\left|\sum_{j=1}^{s}t_{\nu,j}x_j\right|\leqslant(2q+1)\sum_{j=1}^{s}|t_{\nu,j}|\,.$$

Переходя к целым частям, получим утверждение леммы, так как

$$q_\nu=\left[(2q+1)\sum_{j=1}^{s}|t_{\nu,j}|\right]\leqslant\left[(2q+1)\frac{1}{2}\right]=q\,,\quad \nu=1,\ldots,s\,.\ \blacksquare$$

Утверждение леммы 2 было использовано при составлении новой усовершенствованной версии программы-функции на MATHCAD, которая позволила ускорить время

---
[4]В выражении для q_ν квадратные скобки означают знак целой части.

работы приблизительно в 500 раз. С использованием леммы 2 была написана более эффективная программа-функция, которая вычисляла узлы сетки и подсчитывала число точек сетки, имеющих нулевые веса.

Использование леммы 2 оказалось не достаточно, так как анализ результатов работы программы показал, что большинство точек имеет нулевой вес. С целью ликвидации холостой работы пришлось предпринять дополнительные теоретические исследования для поиска точной параметризации сетки.

4. Точная параметризация сетки

Введем следующие обозначения:

$$a=\frac{\sqrt{3}}{216}\,,\quad b=\frac{\sqrt{6}}{216}+\frac{1}{72}\,,\quad c=\frac{1}{72}-\frac{\sqrt{6}}{216}\,,\quad d=\frac{\sqrt{2}}{36}+\frac{5\sqrt{3}}{216},$$

$$f=\frac{5\sqrt{3}}{216}-\frac{\sqrt{2}}{36}\,,\quad g=\frac{11\sqrt{6}}{216}+\frac{1}{8}\,,\quad h=\frac{1}{8}-\frac{11\sqrt{6}}{216}\,,\quad Q=2q+1.$$

Тогда в новых обозначениях имеем:

$$T1=\begin{pmatrix} a & a & a & a\\ b & -c & c & -b\\ d & f & f & d\\ g & -h & h & -g\end{pmatrix}$$

и нас интересует область $\Pi Z(T_1)$ изменения целочисленных параметров k_1, k_2, k_3, k_4, заданных соотношениями

$$\left\{\begin{array}{l} k_1=Q\cdot a\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4),\\ k_2=Q\cdot(b\cdot(x_1-x_4)+c\cdot(x_3-x_2)),\\ k_3=Q\cdot(d\cdot(x_1+x_4)+f\cdot(x_3+x_2)),\\ k_4=Q\cdot(g\cdot(x_1-x_4)+h\cdot(x_3-x_2))\end{array}\right|\left.|x_1|,|x_2|,|x_3|,|x_4|\leqslant 1\right\}.$$

Определим величины

$$k=\frac{c}{b}=5-2\sqrt{6},\quad m=\frac{f}{d}=49-20\sqrt{6},\quad n=\frac{h}{g}=485-198\sqrt{6}.$$

Вычисления в MATHCAD дают следующие значения:

$$k=0.101,\quad m=0.01021,\quad n=0.00103.$$

Ясно, что справедливо матричное равенство $T1=D\cdot M$, где

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -k & k & -1\\ 1 & m & m & 1\\ 1 & -n & n & -1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & g\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим образ $\Pi(M_0)$ четырехмерного куба $[-1;1]^4$, заданный матрицей:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m & 1 \\ 1 & -k & k & -1 \\ 1 & -n & n & -1 \end{pmatrix}$$

и

$$\Pi(M_0) = \left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ z_2 = (x_1 + x_4) + m \cdot (x_3 + x_2), \\ z_3 = (x_1 - x_4) + k \cdot (x_3 - x_2), \\ z_4 = (x_1 - x_4) + n \cdot (x_3 - x_2) \end{array} \right| \left. |x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4| \leqslant 1. \right\}$$

Сразу видно, что $k_1 = Q \cdot a \cdot z_1$, $k_2 = Q \cdot b \cdot z_3$, $k_3 = Q \cdot d \cdot z_2$, $k_4 = Q \cdot g \cdot z_4$. Введем новые переменные $y_1 = x_1 + x_4$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_1 - x_4$, $y_4 = x_3 - x_2$. Тогда в этих новых переменных получим:

$$\Pi(M_0) = \left\{ \begin{array}{l} z_1 = y_1 + y_2, \\ z_3 = y_3 + k \cdot y_4, \\ z_2 = y_1 + m \cdot y_2, \\ z_4 = y_3 + n \cdot y_4 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} |y_1|, |y_2|, |y_3|, |y_4| \leqslant 2; \\ |y_1 + y_3|, |y_1 - y_3| \leqslant 2; \\ |y_2 + y_4|, |y_2 - y_4| \leqslant 2, \end{array} \right\}.$$

Последняя система неравенств может быть переписана эквивалентным образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} |y_1|, |y_2| \leqslant 2 \\ \max\{-2, -y_1 - 2, y_1 - 2\} \leqslant y_3 \leqslant \min\{2, -y_1 + 2, y_1 + 2\} \\ \max\{-2, -y_2 - 2, y_2 - 2\} \leqslant y_4 \leqslant \min\{2, -y_2 + 2, y_2 + 2\} \end{array} \right. .$$

Рассмотрим при $-2 \leqslant y \leqslant 2$ функции $m_1(y) = \max\{-2, -y - 2, y - 2\}$ и $m_2(y) = \min\{2, -y + 2, y + 2\}$. Нетрудно видеть,что

$$m_1(y) = \left\{ \begin{array}{lll} -2 - y & \text{при} & -2 \leqslant y \leqslant 0, \\ -2 + y & \text{при} & 0 \leqslant y \leqslant 2 \end{array} \right\} = -2 + |y|,$$

$$m_2(y) = \left\{ \begin{array}{lll} y + 2 & \text{при} & -2 \leqslant y \leqslant 0, \\ -y + 2 & \text{при} & 0 \leqslant y \leqslant 2 \end{array} \right\} = 2 - |y| .$$

Следовательно, необходимые и достаточные условия на параметры y_1, y_2, y_3, y_4 переписываются в более простом виде

$$\left\{ \begin{array}{c} |y_1|, |y_2| \leqslant 2, \\ -2 + |y_1| \leqslant y_3 \leqslant 2 - |y_1|, \\ -2 + |y_2| \leqslant y_4 \leqslant 2 - |y_2|. \end{array} \right.$$

Определим две матрицы:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & n \end{pmatrix}$$

и области

$$\Pi^*(M_1) = \left\{ \begin{array}{l} z_1 = y_1 + y_2, \\ z_2 = y_1 + m \cdot y_2 \end{array} \middle| \; |y_1|, |y_2| \leqslant 2 \right\},$$

$$\Pi^*(M_2, \vec{y}) = \left\{ \begin{array}{l} z_3 = y_3 + k \cdot y_4, \\ z_4 = y_3 + n \cdot y_4 \end{array} \middle| \begin{array}{l} -2 + |y_1| \leqslant y_3 \leqslant 2 - |y_1|, \\ -2 + |y_2| \leqslant y_4 \leqslant 2 - |y_2| \end{array} \right\}$$

Ясно, что

$$\Pi(M_0) = \bigcup_{\vec{z} \in \Pi^*(M_1)} \vec{z} \times \Pi^*(M_2, M_1^{-1}\vec{z}).$$

Для области $\Pi^*(M_1)$, исключая переменные y_1, y_2, имеем:

$$\Pi^*(M_1) = \left\{ z_1, z_2 \middle| \begin{array}{l} -4 \leqslant z_1 \leqslant 4, \\ -2 \leqslant (1-m)^{-1}(z_1 - z_2) \leqslant 2, \\ -2 \leqslant (1-m)^{-1}(z_2 - m \cdot z_1) \leqslant 2 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ z_1, z_2 \middle| \begin{array}{l} -4 \leqslant z_1 \leqslant 4, \\ z_2 \geqslant -2(1-m) + \max\{z_1, m \cdot z_1\}, \\ z_2 \leqslant \quad 2(1-m) + \min\{z_1, m \cdot z_1\} \end{array} \right\}.$$

Отсюда следует, что $\Pi^*(M_1) = \Pi_1^*(M_1) \bigcup \Pi_2^*(M_1)$, где

$$\Pi_1^*(M_1) = \left\{ z_1, z_2 \middle| \begin{array}{l} -4 \leqslant z_1 \leqslant 0\,, \\ -2(1-m) + m \cdot z_1 \leqslant z_2 \leqslant 2(1-m) + z_1 \end{array} \right\},$$

$$\Pi_2^*(M_1) = \left\{ z_1, z_2 \middle| \begin{array}{l} 0 < z_1 \leqslant 4, \\ -2(1-m) + z_1 \leqslant z_2 \leqslant 2(1-m) + m \cdot z_1 \end{array} \right\}.$$

Так как справедливы формулы перехода от $\vec{z}$ к $\vec{y}$:

$$y_1 = \frac{z_2 - m \cdot z_1}{1-m}\,, \quad y_2 = \frac{z_1 - z_2}{1-m}\,, \quad y_3 = \frac{k \cdot z_4 - n \cdot z_3}{k-n}\,, \quad y_4 = \frac{z_3 - z_4}{k-n}\,,$$

то область $\Pi^*(M_2, M_1^{-1}\vec{z})$ запишется следующим образом

$$\Pi^*(M_2, M_1^{-1}\vec{z}) = \left\{ z_1, z_2 \middle| \begin{array}{ccccc} -2 + \left|\frac{z_2 - m \cdot z_1}{1-m}\right| & \leqslant & \frac{k \cdot z_4 - n \cdot z_3}{k-n} & \leqslant & 2 - \left|\frac{z_2 - m \cdot z_1}{1-m}\right| \\ -2 + \left|\frac{z_1 - z_2}{1-m}\right| & \leqslant & \frac{z_3 - z_4}{k-n} & \leqslant & 2 - \left|\frac{z_1 - z_2}{1-m}\right| \end{array} \right\}.$$

Преобразуем запись соотношений, задающих область $\Pi^*(M_2, M_1^{-1}\vec{z})$, получим:

$$\Pi^*(M_2, M_1^{-1}\vec{z}) =$$

$$\left\{ z_1, z_2 \middle| \begin{array}{lll} \frac{n}{k} \cdot z_3 - \left(1 - \frac{n}{k}\right)\left(2 - \left|\frac{z_2 - m \cdot z_1}{1-m}\right|\right) & \leqslant & z_4 \leqslant \frac{n}{k} \cdot z_3 + \left(1 - \frac{n}{k}\right)\left(2 - \left|\frac{z_2 - m \cdot z_1}{1-m}\right|\right) \\ z_3 - (k-n)\left(2 - \left|\frac{z_1 - z_2}{1-m}\right|\right) & \leqslant & z_4 \leqslant z_3 + (k-n)\left(2 - \left|\frac{z_1 - z_2}{1-m}\right|\right) \end{array} \right\}.$$

Требование непустоты множества $\Pi^*(M_2, M_1^{-1}\vec{z})$ позволяет выписать неравенство для концов, пересекающихся промежутков, получим:

$$\Pi^*(M_2, M_1^{-1}\vec{z}) =$$

$$\left\{ z_1, z_2, z_3, z_4 \;\middle|\; \begin{array}{lcl} \frac{n}{k}\cdot z_3 - \left(1-\frac{n}{k}\right)\left(2-\left|\frac{z_2-m\cdot z_1}{1-m}\right|\right) & \leqslant & z_3 + (k-n)\left(2-\left|\frac{z_1-z_2}{1-m}\right|\right) \\ z_3 - (k-n)\left(2-\left|\frac{z_1-z_2}{1-m}\right|\right) & \leqslant & \frac{n}{k}\cdot z_3 + \left(1-\frac{n}{k}\right)\left(2-\left|\frac{z_2-m\cdot z_1}{1-m}\right|\right) \\ \frac{n}{k}\cdot z_3 - \left(1-\frac{n}{k}\right)\left(2-\left|\frac{z_2-m\cdot z_1}{1-m}\right|\right) & \leqslant & z_4 \leqslant \frac{n}{k}\cdot z_3 + \left(1-\frac{n}{k}\right)\left(2-\left|\frac{z_2-m\cdot z_1}{1-m}\right|\right) \\ z_3 - (k-n)\left(2-\left|\frac{z_1-z_2}{1-m}\right|\right) & \leqslant & z_4 \leqslant z_3 + (k-n)\left(2-\left|\frac{z_1-z_2}{1-m}\right|\right) \end{array} \right\};$$

$$\Pi^*(M_2, M_1^{-1}\vec{z}) =$$

$$\left\{ z_1, z_2, z_3, z_4 \;\middle|\; \begin{array}{l} |z_3| \leqslant k\left(2-\left|\frac{z_1-z_2}{1-m}\right|\right) + \left(2-\left|\frac{z_2-m\cdot z_1}{1-m}\right|\right) \\ \max\left\{\frac{n}{k}\cdot z_3 - \left(1-\frac{n}{k}\right)\left(2-\left|\frac{z_2-m\cdot z_1}{1-m}\right|\right), z_3 - (k-n)\left(2-\left|\frac{z_1-z_2}{1-m}\right|\right)\right\} \leqslant z_4 \\ z_4 \leqslant \min\left\{\frac{n}{k}\cdot z_3 + \left(1-\frac{n}{k}\right)\left(2-\left|\frac{z_2-m\cdot z_1}{1-m}\right|\right), z_3 + (k-n)\left(2-\left|\frac{z_1-z_2}{1-m}\right|\right)\right\} \end{array} \right\}.$$

Для перехода к целочисленным точкам удобно использовать модифицированную функцию целой части $[\cdot]_1$, определяемую следующим образом:

$$[x]_1 = \begin{cases} x & \text{при } x \in \mathbb{Z}, \\ [x]+1, & \text{при } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Если дан произвольный промежуток $[A; B]$, то перечисление всех его целых точек задается равенством $k = [A]_1, \ldots, [B]$. Из всего выше изложенного следует, что область $\Pi(M_0)$ можно записать следующим образом:

$$\Pi(M_0) =$$

$$\left\{ z_1, z_2, z_3, z_4 \;\middle|\; \begin{array}{l} |z_1| \leqslant 4, \\ -2(1-m) + \max\{z_1, m\cdot z_1\} \leqslant z_2 \leqslant 2(1-m) + \min\{z_1, m\cdot z_1\}, \\ |z_3| \leqslant k\left(2-\left|\frac{z_1-z_2}{1-m}\right|\right) + \left(2-\left|\frac{z_2-m\cdot z_1}{1-m}\right|\right), \\ \max\left\{\frac{n}{k}\cdot z_3 - \left(1-\frac{n}{k}\right)\left(2-\left|\frac{z_2-m\cdot z_1}{1-m}\right|\right), z_3 - (k-n)\left(2-\left|\frac{z_1-z_2}{1-m}\right|\right)\right\} \leqslant z_4, \\ z_4 \leqslant \min\left\{\frac{n}{k}\cdot z_3 + \left(1-\frac{n}{k}\right)\left(2-\left|\frac{z_2-m\cdot z_1}{1-m}\right|\right), z_3 + (k-n)\left(2-\left|\frac{z_1-z_2}{1-m}\right|\right)\right\} \end{array} \right\}.$$

Переходя к целочисленным параметрам k_1, k_2, k_3, k_4, получим, что область $\Pi Z(T_1)$ задается соотношениями

$$\Pi Z(T_1) =$$

$$\left\{ k_1, k_2, k_3, k_4 \;\middle|\; \begin{array}{l} |k_1| \leqslant 4aQ\,, \\ -2(d-f)Q + \max\left\{\frac{d\cdot k_1}{a}, \frac{f\cdot k_1}{a}\right\} \leqslant k_3 \leqslant 2(d-f)Q + \min\left\{\frac{d\cdot k_1}{a}, \frac{f\cdot k_1}{a}\right\}\,, \\ |k_2| \leqslant c\cdot\left(2Q - \left|\frac{d\cdot k_1 - a\cdot k_3}{a\cdot(d-f)}\right|\right) + b\cdot\left(2Q - \left|\frac{a\cdot k_3 - f\cdot k_1}{a\cdot(d-f)}\right|\right)\,, \\ \max\left\{\frac{h}{c}\cdot k_2 - \left(g - \frac{h\cdot b}{c}\right)\left(2Q - \left|\frac{a\cdot k_3 - f\cdot k_1}{a\cdot(d-f)}\right|\right), \right. \\ \qquad \left. \frac{g\cdot k_2}{b} - \left(\frac{g\cdot c}{b} - h\right)\left(2Q - \left|\frac{d\cdot k_1 - a\cdot k_3}{a\cdot(d-f)}\right|\right)\right\} \leqslant k_4\,, \\ k_4 \leqslant \min\left\{\frac{h}{c}\cdot k_2 + \left(g - \frac{h\cdot b}{c}\right)\left(2Q - \left|\frac{a\cdot k_3 - f\cdot k_1}{a\cdot(d-f)}\right|\right), \right. \\ \qquad \left. \frac{g\cdot k_2}{b} + \left(\frac{g\cdot c}{b} - h\right)\left(2Q - \left|\frac{d\cdot k_1 - a\cdot k_3}{a\cdot(d-f)}\right|\right)\right\} \end{array} \right\}.$$

Положим

$$q_1 = [4aQ], \quad q_2(k1) = \left[-2(d-f)Q + \max\left(\frac{d\cdot k_1}{a}, \frac{f\cdot k_1}{a}\right)\right]_1,$$

$$q_3(k_1) = \left[2(d-f)Q + \min\left(\frac{d\cdot k_1}{a}, \frac{f\cdot k_1}{a}\right)\right],$$

$$q_4(k_1,k_3) = \left[c\cdot\left(2Q - \left|\frac{d\cdot k_1 - a\cdot k_3}{a\cdot(d-f)}\right|\right) + b\cdot\left(2Q - \left|\frac{a\cdot k_3 - f\cdot k_1}{a\cdot(d-f)}\right|\right)\right],$$

$$q_5(k_1,k_3,k_2) = \left[\max\left(\frac{h}{c}\cdot k_2 - \left(g - \frac{h\cdot b}{c}\right)\left(2Q - \left|\frac{a\cdot k_3 - f\cdot k_1}{a\cdot(d-f)}\right|\right),\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{g\cdot k_2}{b} - \left(\frac{g\cdot c}{b} - h\right)\left(2Q - \left|\frac{d\cdot k_1 - a\cdot k_3}{a\cdot(d-f)}\right|\right)\right)\right]_1,$$

$$q_6(k_1,k_3,k_2) = \left[\min\left(\frac{h}{c}\cdot k_2 + \left(g - \frac{h\cdot b}{c}\right)\left(2Q - \left|\frac{a\cdot k_3 - f\cdot k_1}{a\cdot(d-f)}\right|\right),\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{g\cdot k_2}{b} + \left(\frac{g\cdot c}{b} - h\right)\left(2Q - \left|\frac{d\cdot k_1 - a\cdot k_3}{a\cdot(d-f)}\right|\right)\right)\right].$$

Теперь перечисление целых точек из $\Pi Z(T_1)$ задается равенствами

$$\begin{aligned}
k_1 &= - \quad q_1, \ \ldots, \ q_1 \,, \\
k_3 &= \quad\ \ q_2(k_1), \ \ldots, \ q_3(k_1) \,, \\
k_2 &= - \quad q_4(k_1, k_3), \ \ldots, \ q_4(k_1, k_3) \,, \\
k_4 &= \quad\ \ q_5(k_1, k_3, k_2), \ \ldots, \ q_6(k_1, k_3, k_2) \,.
\end{aligned}$$

5. Заключение

Из вышеизложенного можно сделать вывод, что для численного вычисления четырехкратных интегралов по методу К.К. Фролова можно использовать биквадратичные поля Дирихе. Для алгебраических сеток, соответствующих биквадратичному полю Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, существует точная параметризация, которая позволяет исключить холостую работу по проверки точки сетки области интегрирования.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезные советы и внимание к работе.

Литература

1. Герцог А.С., Ребров Е.Д., Триколич Е.В. О методе К.К. Фролова в теории квадратурных формул // Чебышевский сборник. 10;2(30) / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2009. – С.10-54.

2. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2-е изд. / М.: МЦНМО, 2004.

3. Фролов К.К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. – 1976. – 231;4. – С.818-821.

4. Шарыгин И.Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 1963. – №№2,3. – С.370-376.

PARAMETRIZATION OF FOUR-DIMENSIONAL GRID OF DIRICHLET's BIQUADRATIC FIELD

A.S. Gertsog

Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University,
Lenin Av., 125, Tula, 300026, Russia, e-mail: asg316@rambler.ru

Abstract. Approximate integration of four-fold integrals by K.K. Frolov's method is under consideration. It is proposed to use Dirichlet's biquadratic fields for the problem solution. For this aim, the parametrization of four-dimensional grid of the Dirichlet biquadratic field is constructed.

Key words: Dirichlet's biquadratic field, algebraic grids, K.K.Frolov's method.