УДК 517.9

ОЦЕНКИ СМЕШАННЫХ В-ПРОИЗВОДНЫХ ВЕСОВОГО ЯДРА БЕССЕЛЯ-МАКДОНАЛЬДА

Л.Н. Ляхов*, **А.А. Феоктистова****

*Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail:lyakhov@box.vsi.ru;
**Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398050, Россия, e-mail: alek-feoktistova@yandex.ru

Аннотация. Смешанной В-производной называется действие операторов Бесселя по части переменных и обычных производных по оставшейся части переменных. Получены поточечные и интегральные оценки смешанных В-производных ядра Бесселя-Макдональда, порожденного преобразованием Фурье-Бесселя.

Ключевые слова: преобразование Фурье-Бесселя, ядро Бесселя-Макдональда, В-производная.

1. Введение

Свойства классических ядер Бесселя-Макдональда, оценки частных производных и конечных разностей от ядер Бесселя-Макдональда исследовались в работах Ароншайна и Смита [1], Никольского [2]. В работах [3], [4] и [5] изучались ядра Бесселя-Макдональда, порожденные преобразованием Фурье-Бесселя (далее, сокращая, используем название *γ-ядра* Бесселя-Макдональда или просто *γ-ядра*), с точки зрения их применения к исследованию пространств дробной гладкости и В-гладкости. В данной работе приводятся результаты исследований смешанных В-производных γ-ядер и их некоторых свойств. Получены оценки обобщенных конечных разностей γ-ядер. При этом использовались методы исследования классических ядер Бесселя-Макдональда, приведенные, например, в книге С.М.Никольского [6].

Мы будем рассматривать функции, определенные в части евклидова пространства точек $R_N^+ = R_n^+ \times R_{N-n}$, $1 \le n < N$. Введем обозначения $u = (x, y)$, $x \in R_n^+$, $y \in R_{N-n}$. Переменную x размерности n, по смыслу рассматриваемых здесь задач, будем называть весовой.

Частной В-пропзводной по направлению u_i называется

$$C_\gamma \lim_{h\to 0} \frac{T_{u_i}^h f(u) - f(u)}{h^2} = (B_{u_i} f)(u)\,, \qquad C_\gamma = 2/(\gamma_i + 1)\,.$$

Здесь $T_{u_i}^h$ – обобщенный сдвиг, действующий по одной из переменных (это всегда одна из весовых переменных) по формуле

$$T_{u_i}^{v_i} : f \to (T_{u_i}^{v_i} f)(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_0^\pi f\left(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i \xrightarrow{\alpha_i} v_i, u_{i+1}, \ldots, u_N\right) \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i \, d\alpha_i,$$

и введено обозначение $u_i \xrightarrow{\alpha_i} v_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2 - 2u_i v_i \cos\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$, B_{u_i} – оператор Бесселя

$$B_{u_i} = \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} + \frac{\gamma_i}{u_i}\frac{\partial}{\partial u_i} = u_i^{-\gamma_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(u_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\right), \quad \gamma_i > 0\,. \tag{1}$$

Удобно ввести обозначение $D = (D_{u_{n+1}}, \ldots, D_{u_N})$, $D_{u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j}$. Пусть $l = (l_1; l_2)$, где l_1, l_2 – мультииндексы, состоящие из целых неотрицательных чисел размерности n и $N-n$ соответственно. И пусть

$$(BD)^l = (B_x^{l_1} D_y^{l_2}).$$

Выражение вида $(B_x^{l_1} D_y^{l_2}) f(x, y)$ будем называть смешанной B-производной от функции $f(x, y)$. Порядок этой производной равен $2|l_1| + |l_2|$.

Всюду далее предполагаем, что мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ состоит из фиксированных положительных чисел.

Смешанный обобщенный сдвиг определим выражением

$$(T_u^v f)(u) = \prod_{i=1}^{n} T_{x_i}^{z_i} f(x, y - z).$$

Через $L_p^\gamma(R_N^+)$, $1 \le p < \infty$ будем обозначать весовое пространство Лебега, состоящее из измеримых на R_N^+ функций $\varphi(u)$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{L_p^\gamma(R_N^+)} = \left(\int\limits_{R_N^+} |\varphi(u)|^p x^\gamma du\right)^{1/p},$$

где $x^\gamma = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i}$, а показатель γ_i равен индексу соответствующего сингулярного оператора Бесселя (1). Это пространство банахово.

Смешанное преобразование Фурье-Бесселя определяется следующим выражением:

$$\widehat{\varphi}(v) = F_B[\varphi](v) = \int\limits_{R_N^+} \varphi(u)\; j_\gamma(x, \xi)\; e^{-i\langle y, \eta\rangle} x^\gamma du, \;\; v = (\xi, \eta) \in R_n^+ \times R_{N-n}\,,$$

где по весовым переменным x применяется преобразование Фурье-Бесселя, а по переменным y – преобразование Фурье. При этом мы используем обозначение

$$j_\gamma(x, \xi) = \prod_{i=1}^{n} j_{(\gamma_i - 1)/2}(u_i\, v_i)\,,$$

в котором j_ν – j-функция Бесселя , связанная с функцией Бесселя первого рода равенством

$$j_\nu(u_i) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu / u_i^\nu.$$

Как известно (см. [7]), это преобразование обратимо в классе функций $S_{ev}(R_N^+)$ и обратное преобразование определяется выражением

$$\varphi(u) = F_B^{-1}[\,\widehat{\varphi}\,](u) = 2^{n-|\gamma|}(2\pi)^{n-N}\prod_{i=1}^{n}\Gamma^{-2}\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right) F_B[\widehat{\varphi}](-u)\,.$$

Мы будем пользоваться *центрированной обобщенной конечной разностью*, построенной на основе смешанного обобщенного сдвига следующим образом[6)]

$$\Box_h^l f(u) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \, C_l^k \, \left(T^{\left(\frac{l}{2}-k\right)h} f \right) .$$

Модуль гладкости $\omega_\kappa(f,\delta)_{L_p^\gamma}$ порядка κ в весовых классах Лебега L_p^γ определим следующим образом[7)]

$$\omega_\kappa(f,\delta)_{L_p^\gamma} = \sup_{|t|\le\delta} \|(\Box_t^\kappa f)(u)\|_{L_p^\gamma} .$$

Определение 1. *Пусть $r>0$ – действительное число, κ — неотрицательное целое число и l – мультииндекс, состоящий из неотрицательных чисел $l=(l_1,l_2)=(l_1,\ldots,l_n,l_{n+1},\ldots,l_N)$, удовлетворяющих условию $2\kappa > r-(2|l_1|+|l_2|)>0$. Через $H_p^{r,\gamma}$ обозначим множество всех функций $f\in L_p^\gamma$ таких, что $(BD)^l f\in L_p^\gamma$ и для некоторого числа $A_f>0$ справедливо неравенство*

$$\omega_\kappa((BD)^l f,\delta)_{L_p^\gamma} \le A_f \delta^{r-2|l_1|-|l_2|}, \quad \delta>0 .$$

Для $f\in H_p^{r,\gamma}$ определим полунорму

$$h_p^{r,\gamma}(f) = \sup_{\delta>0} \frac{\omega_\kappa((BD)^l f,\delta)_{L_p^\gamma}}{\delta^{r-2|l_1|-|l_2|}} .$$

Нетрудно установить, что множество $H_p^{r,\gamma}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{H_p^{r,\gamma}} = \|f\|_{L_p^\gamma} + h_p^{r,\gamma}(f) .$$

2. Свойства γ-ядра Бесселя-Макдональда

Обычное ядро Бесселя-Макдональда (см., например, [6]) определяется как функция, преобразование Фурье которой есть $(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}$. По аналогии определяется ядро Бесселя-Макдональда, порожденное смешанным преобразованием Фурье-Бесселя (см. [12]), а именно, γ-ядром Бесселя-Макдональда будем называть функцию G_γ^r, для которой

$$F_B[G_\gamma^r](v) = (1+|v|^2)^{-r/2} .$$

Вид этого ядра и его свойства описаны в [5] для случая $n=N$ и в [12] в общем случае $1\leqslant n\leqslant N$. Имеют место следующие утверждения.

[6]Нецентрированные обобщенные конечные разности введены в [8], центрированные – в [9].

[7]Модули гладкости на основе нецентрированных обобщенных конечных разностей введены в [10]. В [11] введен модуль гладкости на основе обобщенных конечных разностей полученных в виде итераций обобщенных конечных разностей первого порядка. Эта обобщенная конечная разность совпадает с введенными в [8] и [9], когда ее порядок $l=1$.

Теорема 1. *Для смешанных B-производных от функции $G^r_\gamma(u)$ порядка l имеют место следующие оценки:*

a) если $|u|\le 1$, $0<r<N+|\gamma|+|l|$ или $r=N+|\gamma|+|l|$ и $|l|=2|l'|+|l''|$ – нечетное, то

$$(BD)^l G^r_\gamma(u)=O(|u|^{r-N-|\gamma|-|l|})\,, \tag{2}$$

если же $r=N+|\gamma|+|l|$ и $|l|=2|l'|+|l''|$ — четное, то

$$(BD)^l G^r_\gamma=O\left(\ln\frac{1}{|u|}+1\right), \tag{3}$$

для $r>N+|\gamma|+2|l'|+|l''|$

$$(BD)^l G^r_\gamma(u)=O(1)\,; \tag{4}$$

b) если $|u|>1$, то

$$(BD)^l G^r_\gamma(u)=O\left(|u|^{\frac{r-N-|\gamma|-1}{2}}e^{-|u|}\right). \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть $r>0$, l_j - неотрицательное целое число и $0<t<\infty$. Тогда для B-производной порядка l_j $(j=1,\ldots,n)$ γ-ядра Бесселя-Макдональда при $r=2l_j+\alpha$ и $\alpha\in(0;2]$ имеет место оценка*

$$\Lambda=\int\limits_{R^+_N}\left|\Box^2_{tu_j}B^{l_j}_{u_j}G^r_\gamma(u)\right|u^\gamma du\le A'_r|t|^\alpha, \tag{6}$$

а для производной порядка l_i $(i=n+1,\ldots,N)$ при $r=l_i+\alpha$ и $\alpha\in(0;1]$ –

$$\Lambda=\int\limits_{R^+_N}\left|\Delta^2_{tu_i}D^{l_i}_{u_i}G^r_\gamma(u)\right|u^\gamma du\le A''_r|t|^\alpha\ , \tag{7}$$

A'_r и A''_r – константы зависящие от r.

Справедливость этих оценок доказывается подходами, разработанными в [5]. Докажем, например, теорему 2 как наиболее важную.

□ Сразу отметим, что в неравенстве (7) величина $\Delta^2_{tu_i}$ – обычная конечная центрированная разность второго порядка и его доказательство лишь деталями отличается от классического (см. [6] §8.3.). Докажем оценку (6).

Пусть $u=(u_j,u^j)$, $u^j=(u_1,\ldots,u_{j-1},u_{j+1},\ldots,u_N)$. Имеем

$$\Box^2_{tu_j}\varphi(u)=T^{-t}_{u_j}\varphi(u)-2\varphi(u)+T^t_{u_j}\varphi(u)\,.$$

Учитывая четность функции $(T^t_{u_j}\varphi)(u)$ (по u_j и по шагу t), получаем

$$\Box^2_{tu_j}\varphi(u)=2\left(T^t_{u_j}\varphi(u)-\varphi(u)\right)=2\Box_{tu_j}\varphi(u)\,. \tag{8}$$

И напомним, что (см. [7], [13]) обобщенный сдвиг является самосопряженым оператором в весовом скалярном произведении. Поэтому

$$\int\limits_{R^+_N}T^y_x f(x)x^\gamma dx=\int\limits_{R^+_N}f(x)x^\gamma dx\,. \tag{9}$$

Будем использовать оценки (2 – 5). Левую часть неравенства (6) преобразуем, используя формулу (8) сведения обобщенной конечной разности второго порядка к обобщенной конечной разности первого порядка. Имеем

$$\Lambda = \int\limits_{R_N^+} \left| (\square^2_{tu_j} B)^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du =$$

$$= 2 \int\limits_{R_N^+} \left| T^t_{u_j} B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) - B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du \leq$$

$$\leq 2 \int\limits_{R_N^+} \left| T^t_{u_j} B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du + 2 \int\limits_{R_N^+} \left| B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du \ .$$

Учитывая интегральную природу обобщенного сдвига, получаем

$$\Lambda \leq 2 \int\limits_{R_N^+} T^t_{u_j} \left| B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du + 2 \int\limits_{R_N^+} \left| B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du \ .$$

Из равенства (9) следует

$$\Lambda \leq 4 \int\limits_{R_N^+} \left| B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du \ .$$

Пусть $R_N^+ = \{|u| \leqslant 1\}^+ \cup \{|u| \geqslant 1\}^+$ (индекс + над знаком множества здесь и далее означает, что эти множества принадлежат области R_N^+) и

$$\int\limits_{R_N^+} \left| B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du = \int\limits_{\{|u|\leqslant 1\}^+} \left| B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du + \int\limits_{\{|u|\geqslant 1\}^+} \left| B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du \ .$$

Из (3) для случая $r = N + |\gamma| + 2l_j$ при $|u| \leq 1$ следует оценка

$$\int\limits_{\{|u|\leqslant 1\}^+} \left| B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du \leq \int\limits_{\{|u|\leqslant 1\}^+} \left(\ln \frac{1}{|u|} + 1 \right) u^\gamma du \ .$$

Получившийся интеграл имеет слабую особенность. Сферическим преобразованием координат легко установить его сходимость. Таким образом,

$$\int\limits_{\{|u|\leqslant 1\}^+} \left| B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du < C_1 \, . \tag{10}$$

Кроме того, для случая $0 < r < N + |\gamma| + 2l_j$ при $|u| \leq 1$, учитывая, что $N + |\gamma| + 2l_j - r = N + |\gamma| - \alpha$ и $0 < \alpha < 2$, из (2), имеем

$$\int\limits_{\{|u|\leqslant 1\}^+} \left| B^{l_j}_{u_j} G^r_\gamma(u) \right| u^\gamma du \leq \int\limits_{\{|u|\leqslant 1\}^+} |u|^{r-N-|\gamma|-2l_j} u^\gamma du =$$

$$= \int\limits_{S_1^+} \theta_1^\gamma dS \int\limits_0^1 \rho^{\alpha-1} d\rho < C_2 \,. \tag{11}$$

При $|u| > 1$, согласно (5), получаем

$$\int\limits_{\{|u|>1\}^+} \left|B_{u_j}^{l_j} G_\gamma^r(u)\right| u^\gamma du \leq \int\limits_{\{|u|>1\}^+} |u|^{\frac{r-N-|\gamma|-1}{2}} e^{-|u|} u^\gamma du < C_3 \,. \tag{12}$$

Таким образом, для $|t| \geq 1$, учитывая оценки (10), (11), (12), имеем

$$\Lambda \leq C \leq C|t|^\alpha. \tag{13}$$

Пусть $0 < t < 1$. Положим

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \left(\int\limits_{\{|u|<4t\}^+} + \int\limits_{\{|u|\geqslant 4t\}^+} \right) \left|(\square_{tu_j}^2 B)_{u_j}^{l_j} G_\gamma^r(u)\right| u^\gamma du \,. \tag{14}$$

Из (4) для $0 < r < N + |\gamma| + 2l_j$ вытекает

$$\Lambda_1 \leq 4 \int\limits_{\{|u|<4t\}^+} \left|B_{u_j}^{l_j} G_\gamma^r(u)\right| u^\gamma du \leq \int\limits_{\{|u|<4t\}^+} |u|^{r-N-|\gamma|-2l_j} u^\gamma du \,.$$

Сферическое преобразование координат приведет к неравенству

$$\Lambda_1 \leq \int\limits_0^{4t} \rho^{r-N-|\gamma|-2l_j} \rho^{N+|\gamma|-1} d\rho = \int\limits_0^{4t} \rho^{\alpha-1} d\rho \leq C_4 t^\alpha. \tag{15}$$

Рассмотрим случай $r = N + |\gamma| + 2l_j$. Так как $0 < r - 2l_j \leq 2$, то при этом $N + |\gamma| \leqslant 2$. Если $N = 2$, то необходимо $|\gamma| = 0$, что означает отсутствие весовых переменных. Поэтому этот случай не является предметом наших исследований. Равенство $r = N + |\gamma| + 2l_j$ возможно лишь, если $N = 1$ и $|\gamma| \leq 1$. Таким образом, мы должны рассмотреть одномерный случай $N = 1$ и $0 < \gamma = \gamma_1 \leq 1$ ($\alpha = r - 2l_1 = 1 + \gamma_1$). Интеграл Λ_1 примет следующий вид

$$\Lambda_1 = 2 \int\limits_0^{4t} \left| T_{u_1}^t B_{u_1}^{l_1} G_\gamma^r(u_1) - B_{u_1}^{l_1} G_\gamma^r(u_1) \right| u_1^{\gamma_1} du_1 \,.$$

Используя формулу Тейлора-Дельзарта с остаточным членом в форме Лагранжа-Левитана (см. [13]), имеем

$$\Lambda_1 \leq \frac{t^2}{\gamma_1} \int\limits_0^{4t} \left| \left(B_{u_1}^{l_1+1} G_\gamma^r\right)(u_1 + \theta t) \right| u_1^{\gamma_j} du_1 \,.$$

Если $r = N + |\gamma| + 2l_1$, то $r < N + |\gamma| + 2l_1 + 2$. Поэтому из (2) следует

$$\Lambda_1 \leq \frac{t^2}{\gamma_1} \int\limits_0^{4t} (u_1 + \theta t)^{r-1-\gamma_1-2l_1-2} u_1^{\gamma_1} du_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t^2}{\gamma_1}\int\limits_0^{4t}(u_1+\theta t)^{-2}(u_1+\theta t)^{\gamma_1}du_1 \leqslant C_5 t^{\gamma_1+1} = C_5 t^{\alpha}. \tag{16}$$

Таким образом, учитывая (15) и (16), получаем

$$\Lambda_1 \leq C_6 t^{\alpha}. \tag{17}$$

Перейдем к оценке интеграла Λ_2 из (14):

$$\Lambda_2 = \int\limits_{\{|u|\geqslant 4t\}^+}\left|(\Box^2_{tu_1}(BD)^l_{u_1}G^r_\gamma(u)\right|u_1^\gamma du_1 =$$

$$= 2\int\limits_{\{|u|\geqslant 4t\}^+}\left|T^t_{u_1}B^l_{u_1}G^r_{\gamma_1}(u) - B^l_{u_1}G^r_\gamma(u)\right|u^\gamma du.$$

Используя формулу Тейлора-Дельзарта из [13], получаем

$$\Lambda_2 \leq 2\frac{t^2}{\gamma-1}\int\limits_{\{|u|\geqslant 4t\}^+}\left|B^{l_j+1}_{u_j}G^r_\gamma(u_j+\theta t, u^j)\right|u^\gamma du\ .$$

Учитывая, что $N+|\gamma|+2l_j+1-r = N+|\gamma|-\alpha+2>0$, в силу оценки (2), имеем

$$\Lambda_2 \leq \frac{t^2}{\gamma-1}\int\limits_{\{|u|\geqslant 4t\}^+}|u|^{r-N-|\gamma|-2l_j-2}u^\gamma du.$$

Сферическое преобразование координат приводит к неравенствам

$$\Lambda_2 \leq \frac{t^2}{\gamma-1}\int\limits_{4t}^{\infty}\rho^{r-N-|\gamma|-2l_j-2}\rho^{N+|\gamma|-1}d\rho \leq \frac{t^2}{\gamma-1}\int\limits_{4t}^{\infty}\rho^{\alpha-3}d\rho \leq C_7 t^{\alpha}. \tag{18}$$

Таким образом, для весовой переменной u_j из оценок (13), (17) и (18) следует неравенство (6). ■

Учитывая, что (см. [4], с. 116 и [12]) при $r>0$ $G^r_\gamma(u)\in L^\gamma_1(R^+_N)$ и оценки (6), (7), согласно определению 1 весового пространства Никольского, получаем

$$G^r_\gamma(u)\in H^{r,\gamma}_1(R^+_N)\,.$$

Кроме того, имеет место равенство (сравните [6], § 8.3, формулы (2) и (3))

$$\|G^r_\gamma(u)\|_{H^{r,\gamma}_1(R^+_N)} = \|G^r_\gamma\|_{L^\gamma_1(R^+_N)} + A_r\ ,$$

где A_r – наименьшая постоянная, при которой выполняются неравенства (6), (7).

Литература

1. Aronszajn N., Smith K.T. Functional spaces and functional complection // Ann. Inst. Fourier. – 1955-1956. – 6. – P.125-185.
2. Никольский С.М. Интегральное представление и изоморфизм классов дифференцируемых функций многоих переменных // Третья летняя матем. школа (конструктивная теория функций), г. Кацевели, июнь-июль 1965 / Киев: Наукова думка, 1966. – С.135-238.
3. Гаджиев А.Д., Алиев И.А. Потенциалы Рисса и Бесселя, порожденные обобщенным сдвигом // Докл. расширенного семинара им. Векуа. Т.3 / Тбилиси, 1988. – С.21-24.
4. Ляхов Л.Н. Описание пространств B-потенциалов Бесселя B-гиперсингулярными интегралами // Условно-корректные задачи математической физики и анализа: Тез. докл. научн.конф., Новосибирск, 1-5 июня 1992 г./ Новосибирск: ИМ СО РАН, 1992. – С.202-203.
5. Ляхов Л.Н. B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами / Липецк: ЛГПУ, 2007. – 232 с.
6. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / М.:Наука, 1977. – 436 с.
7. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / М.: Наука, 1997. – 200 с.
8. Ляхов Л.Н. Об одном классе гиперсингулярных интегралов // ДАН. – 1990. – 315;2. – С. 291-296.
9. Гоц Е.Г., Ляхов Л.Н. Обращение преобразования Радона-Киприянова посредством дробного дифференцирования Грюнвальда-Летникова-Рисса // ДАН. – 2007. – 412;1. – С.11-14.
10. Ляхов Л.Н. Пространства B-потенциалов Рисса // ДАН. – 1991. – 334;3. – С.278-280.
11. Платонов С.С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Известия РАН, серия математическая. – 2007. – 71;5. – С.149-196.
12. Половинкина М.В. B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию весовых функциональных классов дробной гладкости автореферат на соискание ученой степени к.ф.-м.н. / Воронеж, 2009. – 16 с.
13. Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // УМН. – 1951. – 6;2. – С.102-143.

ESTIMATIONS OF MIXED B-DERIVATIVES OF BESSEL-MACDONALD WEIGHTED KERNEL

L.N. Lyakhov*, A.A. Feoktistova**

*Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: lyakhov@box.vsi.ru;
**Lipetsk State Pedagogical University,
Lenina St., 42, Lipetsk, 398050, Russia, e-mail: alek-feoktistova@yandex.ru

Abstract. Mixed B-derivative is the action by Bessel's operator on some variables and the differential operator on rest variables. We obtained per-point and integral estimations of mixed B-derivatives of Bessel-Macdonald's kernel generated with Fourier-Bessel's transformation.

Key words: Fourier-Bessel's transformation, Bessel-Macdonald's kernel, B-derivative.