УДК 517.927.25

ОБ ОЦЕНКАХ МИНИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ПОТЕНЦИАЛ И КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО ТИПА[5)]

Е.С. Карулина

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики,
ул. Нежинская, 7, Москва, Россия e-mail: karulinaes@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача Штурма-Лиувилля с краевыми условиями третьего типа и интегральным условием на потенциал. Получены оценки минимального собственного значения λ_1 этой задачи при различных значениях параметров.

Ключевые слова: краевая задача, первое собственное значение.

1. Введение. Рассматривается следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$y'' - q(x)y + \lambda y = 0, \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} y'(0) - k^2 y(0) = 0, \\ y'(1) + k^2 y(1) = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

где $q(x)$ – неотрицательная ограниченная суммируемая на $[0,1]$ функция, удовлетворяющая условию:

$$\int\limits_0^1 q^\gamma(x)dx = 1, \qquad \gamma \neq 0\,. \tag{4.3}$$

Множество таких функций $q(x)$ обозначим A_γ.

Под решением задачи (4.1)–(4.2) будем понимать функцию $y(x)$, которая определена на $[0,1]$, удовлетворяет условиям (4.2), для которой $y'(x)$ абсолютно непрерывна и уравнение (4.1) выполняется почти всюду на интервале $(0,1)$.

Оценивается минимальное собственное значение λ_1 этой задачи при различных значениях γ и k.

Подобная задача для уравнения $y'' + \lambda q(x)y = 0$ при условиях $y(0) = y(1) = 0$, $q(x) \in A_\gamma$ рассматривалась в работе [1]. В работе [2] исследовалась задача для уравнения $y'' + \lambda q(x)y = 0$ при условиях (4.2), $q(x) \in A_\gamma$. Задача для уравнения (4.1) при условиях $y(0) = y(1) = 0$, $q(x) \in A_\gamma$ изучалась в работах [3], [4].

[5]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00989) и гранта РНП 2.1.1/13250.

Согласно вариационному принципу, $\lambda_1(q) = \inf\limits_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q, y)$, где

$$R(q,\, y) = \frac{\int\limits_0^1 y'^2(x)dx + \int\limits_0^1 q(x)y^2(x)dx + k^2\left(y^2(0) + y^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx}\,. \tag{4.4}$$

2. Основные результаты. Пусть

$$m_\gamma = \inf_{q(x)\in A_\gamma} \lambda_1(q), \quad M_\gamma = \sup_{q(x)\in A_\gamma} \lambda_1(q)\,.$$

Теорема 1.

1. *Если* $\gamma \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, *то* $M_\gamma = +\infty$.
2. *Если* $\gamma = 1$, *то* $M_1 = \xi_*$, *где* ξ_* *— решение уравнения* $\operatorname{arctg}\dfrac{k^2}{\sqrt{\xi}} = \dfrac{\xi - 1}{2\sqrt{\xi}}$.
3. *Если* $\gamma \in (1, +\infty)$, *то* $M_\gamma = const < \infty$, *и существуют такие функции* $u(x) \in H_1(0,1)$ *и* $q^*(x) \in A_\gamma$, *что* $R(q^*, u) = M_\gamma$.

Теорема 2.

1. *Если* $\gamma \in (1, +\infty)$, *то* $m_\gamma = \lambda_1^0$, *где* λ_1^0 *— первое собственное значение задачи для уравнения* $y'' + \lambda y = 0$ *с условиями* (4.2).
2. *Если* $\gamma \in (-\infty, 0) \cup (0, 1]$, *то* $m_\gamma \geqslant 1/4$.
3. *Если* $\gamma \in (0, +\infty)$, *то*
   (a) $m_\gamma \leqslant \pi^2$ *при всех* k;
   (b) $m_\gamma \to \pi^2$ *при* $k \to \infty$, *причем* $m_\gamma \geqslant \pi^2 - 4\pi^2/k^2 + O\left(k^{-4}\right)$.

Теорема 3. *Пусть* $k = 0$.

1. *Если* $\gamma \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, *то* $M_\gamma = +\infty$, $m_\gamma \in [1/4; 1]$.
2. *Если* $\gamma = 1$, *то* $M_1 = 1$, $m_1 \in [1/4; 1)$.
3. *Если* $\gamma \in (1, +\infty)$, *то* $M_\gamma = 1$, $m_\gamma = 0$.

3. Доказательство теоремы 1.
1. I) Докажем, что если $\gamma < 0$, то $M_\gamma = +\infty$.
Положим

$$q_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-1/\gamma}(1-\varepsilon)^{1/\gamma}, & 0 < x < \varepsilon, \\ \varepsilon^{1/\gamma}(1-\varepsilon)^{-1/\gamma}, & \varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon < 1/2$.

Обозначим за $I_\varepsilon(y)$ сумму интегралов: $\int\limits_0^1 y'^2(x)dx + \int\limits_0^1 q_\varepsilon(x)y^2(x)dx$.

a) Докажем, что

$$y^2(0) \leqslant \frac{2I_\varepsilon(y)}{1-\varepsilon}\,. \tag{4.5}$$

для любого $y(x) \in H_1(0,1) \setminus \{0\}$.

Из определения функции q_ε следует, что $I_\varepsilon(y) \geqslant \int\limits_0^1 y'^2(x)dx + \int\limits_\varepsilon^1 y^2(x)dx$.

Для любого $z \in (0,1)$ имеем $y(0) = y(z) - \int\limits_0^z y'(x)dx$. Используя неравенство Гельдера, получим $y^2(0) \leqslant 2y^2(z) + 2\left(\int\limits_0^z y'(x)dx\right)^2 \leqslant 2y^2(z) + 2\int\limits_0^1 y'^2(x)dx$. Проинтегрируем обе части неравенства по z от ε до 1:

$$(1-\varepsilon)y^2(0) \leqslant 2\int\limits_\varepsilon^1 y^2(z)dz + 2(1-\varepsilon)\int\limits_0^1 y'^2(x)dx\,,$$

откуда следует, что

$$y^2(0) \leqslant \frac{2}{1-\varepsilon}\left(\int\limits_0^1 y'^2(x)dx + \int\limits_\varepsilon^1 y^2(x)dx\right) \leqslant \frac{2I_\varepsilon(y)}{1-\varepsilon}\,.$$

b) Используя равенство $y(x) = y(0) + \int\limits_0^x y'(s)ds$ и неравенство Гельдера, получим $|y(x)| \leqslant |y(0)| + \sqrt{x}\cdot\left(\int\limits_0^x y'^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}$, откуда следует, что $y^2(x) \leqslant 2y^2(0) + 2x\int\limits_0^x y'^2(s)ds$, и, следовательно,

$$\int\limits_0^\varepsilon y^2(x)dx \leqslant 2\int\limits_0^\varepsilon y^2(0)dx + 2\int\limits_0^\varepsilon \left[x\int\limits_0^x y'^2(s)ds\right]dx \leqslant 2\varepsilon y^2(0) + \varepsilon^2\int\limits_0^\varepsilon y'^2(s)ds\,,$$

$$\int\limits_0^1 y^2dx \leqslant 2\varepsilon y^2(0) + \varepsilon^2\int\limits_0^\varepsilon y'^2dx + \varepsilon^{-1/\gamma}(1-\varepsilon)^{1/\gamma}\int\limits_\varepsilon^1 \varepsilon^{1/\gamma}(1-\varepsilon)^{-1/\gamma}y^2(x)dx \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon y^2(0) + a(\varepsilon)\cdot\left(\int\limits_0^1 y'^2(x)dx + \int\limits_0^1 q_\varepsilon(x)y^2(x)dx\right),$$

где $a(\varepsilon) = \varepsilon^2 + \varepsilon^{-1/\gamma}(1-\varepsilon)^{1/\gamma}$, причем $a(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

c) Подставим полученное в b) неравенство и неравенство (4.5) в (4.4):

$$R(q_\varepsilon, y) \geqslant \frac{I_\varepsilon}{2\varepsilon y^2(0) + a(\varepsilon) I_\varepsilon} \geqslant \frac{I_\varepsilon}{2\varepsilon \cdot 2I_\varepsilon/(1-\varepsilon) + a(\varepsilon) I_\varepsilon} =$$
$$= \left(\frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon} + a(\varepsilon) \right) \to \infty \ \text{ при } \varepsilon \to 0 \text{ для всех } y \in H_1(0,1) \setminus \{0\}.$$

d) Из результата, полученного в c), следует:

$$M_\gamma = \sup_{q \in A_\gamma} \left[\inf_{y \in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q, y) \right] \geqslant \inf_y R(q_\varepsilon, y) \to \infty \ \text{ при } \varepsilon \to 0\,.$$

Следовательно, $M_\gamma = +\infty$.

II) Докажем, что если $0 < \gamma < 1$, то $M_\gamma = +\infty$.

Пусть $0 < \gamma < 1$. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n равных частей точками $0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_n = 1$ и положим $\varepsilon = 1/n$. Построим, далее, функцию на отрезке $[0, \varepsilon]$:

$$q_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-\beta}, & 0 < x < \varepsilon^\rho, \\ 0, & \varepsilon^\rho < x < \varepsilon, \end{cases}$$

где $\rho = \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$, $\beta = \frac{2}{1-\gamma}$, затем продолжим эту функцию на весь отрезок $[0, 1]$ периодически с периодом ε. Данная функция удовлетворяет условию (4.3).

По теореме о среднем найдется такое число $\theta \in [0, \varepsilon^\rho]$, что $\int\limits_0^{\varepsilon^\rho} y^2(x)dx = y^2(\theta)\varepsilon^\rho$, из чего следует, что $\int\limits_0^{\varepsilon} q_\varepsilon(x) y^2(x)dx = \varepsilon^{-\beta} \int\limits_0^{\varepsilon^\rho} y^2(x)dx = \varepsilon^{-1} y^2(\theta)$. Используя равенство $y(x) = y(\theta) + \int\limits_\theta^x y'(s)ds$ и неравенство Гельдера, получим

$$y(x) \leqslant y(\theta) + \sqrt{\theta - x} \cdot \left(\int\limits_x^\theta y'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}}, \ \text{ если } x < \theta,$$

$$y(x) \leqslant y(\theta) + \sqrt{x - \theta} \cdot \left(\int\limits_\theta^x y'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}}, \ \text{ если } x > \theta,$$

откуда следует, что $y^2(x) \leqslant 2y^2(\theta) + 2(x-\theta) \int\limits_\theta^x y'^2(s)ds$ для всех x. Проинтегрируем обе части полученного неравенства от 0 до ε:

$$\int\limits_0^\varepsilon y^2(x)dx \leqslant 2\varepsilon y^2(\theta) + 2 \left(\int\limits_0^\theta ds \int\limits_0^s (\theta - x) y'^2(s)dx + \int\limits_\theta^\varepsilon ds \int\limits_s^\varepsilon (x-\theta) y'^2(s)dx \right).$$

Так как $\int\limits_0^s (\theta - x)dx < \varepsilon^2$ и $\int\limits_s^\varepsilon (x-\theta)dx < \varepsilon^2$ при $s<\varepsilon$, получаем следующее неравенство:

$$\int\limits_0^\varepsilon y^2(x)dx \leqslant 2\varepsilon y^2(\theta) + 2\varepsilon^2 \int\limits_0^\varepsilon {y'}^2(s)ds = 2\varepsilon^2 \left(\int\limits_0^\varepsilon q_\varepsilon(x) y^2(x)dx + \int\limits_0^\varepsilon {y'}^2(x)dx \right).$$

Проделав такие преобразования для каждого отрезка $[\varepsilon_{i-1},\, \varepsilon_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, на отрезке $[0,\, 1]$ получим

$$\int\limits_0^1 y^2(x)dx \leqslant 2\varepsilon^2 \left(\int\limits_0^1 q_\varepsilon(x) y^2(x)dx + \int\limits_0^1 {y'}^2(x)dx \right)$$

для любого $y(x) \in H^1(0,1)$.

Подставим полученное неравенство в (4.4):

$$R(q_\varepsilon,\, y) \geqslant \frac{\int\limits_0^1 {y'}^2(x)dx + \int\limits_0^1 q_\varepsilon(x)y^2(x)dx}{2\varepsilon^2 \left(\int\limits_0^1 q_\varepsilon(x)y^2(x)dx + \int\limits_0^1 {y'}^2(x)dx \right)} + \frac{k^2\left(y^2(0)+y^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx} =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{k^2\left(y^2(0)+y^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx} \to \infty \quad \text{при} \ \ \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, при $\varepsilon \to 0$ получим $M_\gamma = \sup\limits_{q\in A_\gamma} \left(\inf\limits_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,\, y) \right) \geqslant \inf\limits_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q_\varepsilon,\, y) = \infty$. Таким образом, доказано, что $M_\gamma = +\infty$ при $\gamma \in (-\infty, 0) \cup (0,1)$.

2. Докажем, что если $\gamma = 1$ и $k \neq 0$, то $M_1 = \xi_*$, где ξ_* – решение уравнения $\operatorname{arctg} \frac{k^2}{\sqrt{\xi}} = \frac{\xi - 1}{2\sqrt{\xi}}$.

а) Будем искать решение задачи (4.1)– (4.2) в виде непрерывной функции

$$y_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\xi}}{k^2}\cos\sqrt{\xi}x + \sin\sqrt{\xi}x, & 0 \leqslant x < \tau, \\ \dfrac{\sqrt{\xi}}{k^2}\cos\sqrt{\xi}\tau + \sin\sqrt{\xi}\tau, & \tau \leqslant x < 1-\tau, \\ \dfrac{\sqrt{\xi}}{k^2}\cos\sqrt{\xi}(1-x) + \sin\sqrt{\xi}(1-x), & 1-\tau \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

Для того, чтобы эта функция могла быть решением, нужно также, чтобы ее производная

$${y_\xi}'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\xi}{k^2}\sin\sqrt{\xi}x + \sqrt{\xi}\cos\sqrt{\xi}x, & 0 \leqslant x < \tau, \\ 0, & \tau \leqslant x < 1-\tau, \\ \dfrac{\xi}{k^2}\sin\sqrt{\xi}(1-x) - \sqrt{\xi}\cos\sqrt{\xi}(1-x), & 1-\tau \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

была непрерывной на $(0,1)$. Из условий $y_\xi{}'(x) = 0$ при $x = \tau - 0$, $y_\xi{}'(x) = 0$ при $x = 1 - \tau + 0$ получаем, что $y_\xi{}'(x)$ является непрерывной при $\tau = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \operatorname{arctg} \frac{k^2}{\sqrt{\xi}}$.

b) Рассмотрим функционал

$$L(y) = \frac{\int\limits_0^1 y'^2(x)dx + \max\limits_{x\in[0,1]} y^2(x) + k^2\left(y^2(0) + y^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx}\,. \tag{4.8}$$

Так как $\int\limits_0^1 q(x)y^2(x)dx \leqslant \max\limits_{x\in[0,1]} y^2(x) \int\limits_0^1 q(x)dx = \max\limits_{x\in[0,1]} y^2(x)$, имеем

$$\lambda_1(q) = \inf_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,y) \leq \inf_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} L(y).$$

Найдем число ξ_* – корень уравнения

$$L(y_\xi) = \xi\,. \tag{4.9}$$

При подстановке функции y_ξ в (4.8) получим:

$y_\xi(0) = y_\xi(1) = \frac{\sqrt{\xi}}{k^2}$, $\quad y_\xi(x) = \frac{\sqrt{\xi + k^4}}{k^2}$ при $\tau \leqslant x < 1 - \tau$;

так как функция $y_\xi(x)$ возрастает на отрезке $[0,\tau]$ и убывает на $[1-\tau, 1]$, то $\max\limits_{x\in[0,1]} y_\xi^2(x) = \frac{\xi + k^4}{k^4}$;

$\int\limits_0^1 (y_\xi'(x))^2 dx = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \operatorname{arctg} \frac{k^2}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{\xi^2}{k^4} + \xi\right) - \frac{\xi}{k^2}$;

$\int\limits_0^1 y_\xi^2(x)dx = -\frac{1}{\sqrt{\xi}} \operatorname{arctg} \frac{k^2}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{\xi}{k^4} + 1\right) + \frac{1}{k^2} + \frac{\xi}{k^4} + 1.$

Из (4.9) следует уравнение $\operatorname{arctg} \frac{k^2}{\sqrt{\xi}} = \frac{\xi - 1}{2\sqrt{\xi}}$. По теореме о неявной функции это уравнение имеет единственное решение $\xi_*(k^2)$, которое непрерывно вместе со своей производной и возрастает при увеличении k^2.

Положим $t = \sqrt{\xi} > 0$ и рассмотрим уравнение $\operatorname{arctg} \frac{k^2}{t} = \frac{t^2 - 1}{2t}$ при $t \in (0, +\infty)$. Функция $\operatorname{arctg} \frac{k^2}{t}$ является убывающей на всей рассматриваемой полуоси, стремится к $\pi/2$ при $t \to 0 + 0$, к 0 при $t \to +\infty$. Функция $\frac{t^2-1}{2t}$ является возрастающей на всей рассматриваемой полуоси, стремится к $-\infty$ при $t \to 0 + 0$, к $+\infty$ при $t \to +\infty$, равна 0 при $t = 1$. Возвращаясь к $\xi = t^2$, находим следующие свойства решения ξ_*:

если $k^2 \to 0$, то $\xi_* \to 1$;
если $k^2 \to +\infty$, то $\xi_* \to \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2 + 4}$;
$\xi_* \in (1, \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2 + 4})$ при всех $k \neq 0$.

c) Рассмотрим функцию $y_*(x) = y_{\xi_*}(x)$. Эта функция совпадает с решениями задач

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0, && y'(0) - k^2 y(0) = 0 && \text{при } 0 \leqslant x < \tau, \\ &y'' - \xi_* y + \lambda y = 0, && && \text{при } \tau \leqslant x < 1-\tau, \\ &y'' + \lambda y = 0, && y'(1) + k^2 y(1) = 0 && \text{при } 1-\tau \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}$$

при $\lambda = \xi_*$. Отсюда следует, что $y_*(x)$ — решение задачи (4.1)–(4.2), где

$$q(x) = q_*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < \tau, \\ \xi_*, & \tau \leqslant x < 1-\tau, \\ 0, & 1-\tau \leqslant x < 1, \end{cases}$$

причем для $q_*(x)$ выполняется условие (4.3). Так как функция $y_*(x) > 0$ на $(0,1)$, то она является первой собственной функцией задачи (4.1)–(4.2), и тогда ξ_* – минимальное собственное значение задачи (4.1)–(4.2).

Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\xi_* \leqslant M_1 = \sup_{q \in A_\gamma} \inf_{y \in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,\, y) \leqslant \inf_{y \in H_1(0,1)\setminus\{0\}} L(y) \leqslant \xi_* \ ,$$

откуда следует, что $M_1 = \xi_*$.

3. Докажем, что если $\gamma > 1$, то $M_\gamma = \mathrm{const} < \infty$, причем существуют такие функции $u(x) \in H^1(0,1)$ и $q_*(x) \in A_\gamma$, что $R(q_*, u) = M_\gamma$.

Пусть $\gamma > 1$. Из неравенства Гельдера и условия (4.3) следует, что

$$\int_0^1 q(x) y^2(x) \leq \left(\int_0^1 |y(x)|^p dx \right)^{2/p} ,$$

где $p = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}$. Рассмотрим функционал

$$G(y) = \frac{\int_0^1 y'^2(x)dx + \left(\int_0^1 |y(x)|^p dx\right)^{2/p} + k^2\left(y^2(0) + y^2(1)\right)}{\int_0^1 y^2(x)dx} \,. \tag{4.10}$$

и обозначим $m = \inf\limits_{y \in H_1(0,1)\setminus\{0\}} G(y)$. Имеем $M_\gamma = \sup\limits_{q \in A_\gamma} \inf\limits_{y \in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,\, y) \leqslant \inf\limits_{y \in H_1(0,1)\setminus\{0\}} G(y) = m$. Для доказательства равенства $M_\gamma = m$ используется вспомогательная лемма:

Лемма 1. *Пусть $\gamma > 1$ и $m = \inf\limits_{y \in H_1(0,1)\setminus\{0\}} G(y)$. Тогда существует такая функция $u(x) \in H^1(0,1)$, что $m = G(u)$, причем $u(x) > 0$ на $(0,1)$, удовлетворяет уравнению*

$$u''(x) - u^{p-1}(x) + mu(x) = 0 \,, \tag{4.11}$$

где $p = \frac{2\gamma}{\gamma-1} > 2$, и условиям

$$\begin{cases} u'(0) - k^2 u(0) = 0, \\ u'(1) + k^2 u(1) = 0, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\int\limits_0^1 u^p(x)dx = 1. \tag{4.13}$$

□ В доказательстве леммы используется вариационный принцип для функционала $G(y)$.

1) Заметим, что $G(y) \geq 0$ для любого $y(x) \in H^1(0,1)$. Область значений функционала ограничена снизу, поэтому существует его точная нижняя грань $m = \inf\limits_{y \in H^1(0,1)\setminus\{0\}} G(y)$.

Пусть $\Gamma = \{y(x) : y(x) \in H^1(0,1), \int\limits_0^1 |y(x)|^p dx = 1\}$. Докажем, что существует такая функция $u(x) \in \Gamma$, что $G(u) = m$.

a) Используя неравенство Гельдера, для любого $y(x) \in \Gamma$ имеем

$$\int\limits_0^1 y^2(x)dx \leq \left(\int\limits_0^1 |y|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} = 1\,,$$

откуда

$$\left(\int\limits_0^1 y'^2(x)dx + \int\limits_0^1 y^2(x)dx\right)\int\limits_0^1 y^2(x)dx \leq \int\limits_0^1 y'^2(x)dx + 1 + k^2\left(y^2(0) + y^2(1)\right).$$

Следовательно,

$$G(y) = \frac{\int\limits_0^1 y'^2(x)dx + 1 + k^2\left(y^2(0) + y^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx} \geq \|y(x)\|^2_{H^1(0,1)}\,.$$

b) Заметим, что существует минимизирующая последовательность $\{y_i\} \in \Gamma$ функционала $G(y)$. Пусть $\{\tilde{y}_i\}$ – минимизирующая последовательность $G(y)$ в $H^1(0,1)$, то есть $\lim\limits_{i\to\infty} G(\tilde{y}_i) = \inf\limits_{y\in H^1(0,1)\setminus\{0\}} G(y) = m$. Для последовательности $y_i = \tilde{y}_i / C_i^{1/p}$, где $C_i = \int_0^1 |\tilde{y}_i|^p dx$. также будет выполняться $\lim\limits_{i\to\infty} G(y_i) = \lim\limits_{i\to\infty} G(\tilde{y}_i) = m$, причем $y_i(x) \in \Gamma$.

Для всех достаточно больших значений i верно $G(y_i) \leq m+1$, откуда следует $\|y_i(x)\|^2_{H^1(0,1)} \leq G(y_i) \leq m+1$, то есть последовательность $\{y_i\}$ ограничена.

c) Перейдем к доказательству существования такой функции $u(x) \in \Gamma$, что $G(u) = m$. Так как $\{y_i\}$ – ограниченная последовательность в сепарабельном гильбертовом пространстве $H^1(0,1)$, то она содержит подпоследовательность $\{z_i\}$, слабо сходящуюся в $H^1(0,1)$ к некоторой функции $u(x)$, причем $\|u(x)\|^2_{H^1(0,1)} \le m+1$.

Так как пространство $H^1(0,1)$ компактно вкладывается в пространство $C(0,1)$, а оно, в свою очередь, вкладывается в $L_p(0,1)$, где $p \ge 1$, то существует подпоследовательность $\{u_i\}$ последовательности $\{z_i\}$, сильно сходящаяся в $C(0,1)$. Тогда подпоследовательность $\{u_i\}$ сильно сходится в $L_p(0,1)$ к функции $u(x)$, откуда следует $|\|u_i(x)\|_{L_p(0,1)} - \|u(x)\|_{L_p(0,1)}| \to 0$. Следовательно, при $i \to \infty$ имеем

$$\int\limits_0^1 |u_i(x)|^p dx \to \int\limits_0^1 |u(x)|^p dx,$$

$$\int\limits_0^1 u_i^2(x) dx \to \int\limits_0^1 u^2(x) dx.$$

Докажем, что $\|u(x)\|_{L_2(0,1)} \ne 0$. Пусть $\|u\|_{L_2(0,1)} = \left(\int\limits_0^1 u^2 dx\right)^{1/2} = 0$, тогда имеем $u(x)=0$ (почти всюду), следовательно $\int\limits_0^1 |u(x)|^p dx = 0$. С другой стороны,

$$\int\limits_0^1 |u(x)|^p dx = \lim_{i\to\infty} \int\limits_0^1 |u_i|^p dx = 1\,,$$

то есть $u(x) \in \Gamma$. Это приводит к противоречию. Следовательно, $\|u(x)\|_{L_2(0,1)} \ne 0$.

Докажем, что последовательность $\{u_i'(x)\}$ ограничена в $L_2(0,1)$. Так как $\{u_i(x)\} \subset \{y_i(x)\}$, для нее верно $\|u_i(x)\|^2_{H^1(0,1)} \le m+1$, откуда следует, что

$$\|u_i\|^2_{L_2(0,1)} + \|u_i'\|^2_{L_2(0,1)} = \int\limits_0^1 \left(u_i^2 + (u_i')^2\right) dx = \|u_i(x)\|^2_{H^1(0,1)} \le m+1,$$

откуда имеем $\|u_i'(x)\|^2_{L_2(0,1)} \le m+1 - \|u_i(x)\|^2_{L_2(0,1)}$, то есть $\{u_i'(x)\}$ ограничена в $L_2(0,1)$. Следовательно, существует такая подпоследовательность $\{w_i(x)\}$ последовательности $\{u_i(x)\}$, что $\{w_i'(x)\}$ слабо сходится к $u'(x)$ в $L_2(0,1)$.

Рассмотрим $\int\limits_0^1 (w_i'(x))^2 dx$. Эта последовательность имеет конечный нижний предел: $\int\limits_0^1 (w_i'(x))^2 dx \ge 0$. Следовательно, существует такая подпоследовательность $\{v_i(x)\}$ последовательности $\{w_i(x)\}$, что $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_0^1 (v_i'(x))^2 dx = \varliminf\limits_{i\to\infty} \int\limits_0^1 (w_i'(x))^2 dx$. Так как $v_i'(x)$ слабо сходится к $u'(x)$ в $L_2(0,1)$, то для этой последовательности выполняется

$$\|u'(x)\|_{L_2(0,1)} \le \varliminf_{i\to\infty} \|v_i'(x)\|_{L_2(0,1)} = \lim_{i\to\infty} \|v_i'(x)\|_{L_2(0,1)}\,.$$

Используя непрерывность функционала $G(y)$ в $H^1(0,1)$, имеем

$$G(u) \leq \frac{\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_0^1 (v_i')^2 dx + \lim\limits_{i\to\infty} \left(\int\limits_0^1 |v_i|^p dx \right)^{2/p} + k^2 \left(\lim\limits_{i\to\infty} v_i^2(0) + \lim\limits_{i\to\infty} v_i^2(1) \right)}{\lim\limits_{i\to\infty} \left(\int\limits_0^1 v_i^2(x) dx \right)} = \lim_{i\to\infty} G(v_i) = m\,.$$

Таким образом, получаем $G(u) \leq m$. Но, так как $m = \inf\limits_{y \in H^1(0,1)\setminus\{0\}} G(y)$, то, следовательно, $G(u) = m$.

2) Пусть $u(x) \in \Gamma$ и $G(u) = m$. Докажем, что $u(x)$ — положительная функция на $(0,1)$ и удовлетворяет уравнению (4.11) и условиям (4.12)–(4.13).

Пусть функция $z(x) \in H^1(0,1)$, и пусть $K(y) = k^2 \left(y^2(0) + y^2(1) \right)$. Рассмотрим функцию

$$g(t) = G(u+tz) = \frac{\int\limits_0^1 (u'(x) + tz'(x))^2 dx + \left(\int\limits_0^1 |u(x) + tz(x)|^p dx \right)^{2/p} + K(u+tz)}{\int\limits_0^1 (u(x) + tz(x))^2 dx}\,,$$

где $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $g(0) = G(u) = \inf\limits_{y \in H^1(0,1)} G(y)$, то $g'(0) = 0$, так как $t = 0$ — точка экстремума дифференцируемой функции $g(t)$. Найдем $g'(0)$:

$$g'(0) = \frac{2\int\limits_0^1 u'z' dx + 2\left(\int\limits_0^1 |u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}-1} \int\limits_0^1 |u|^{p-1} z \,\mathrm{sign}\, u dx}{\int\limits_0^1 u^2(x) dx} + \frac{2k^2 \big(u(0)z(0) + u(1)z(1) \big)}{\int\limits_0^1 u^2(x) dx} -$$

$$- \frac{2\int\limits_0^1 uz dx \left(\int\limits_0^1 (u')^2 dx + \left(\int\limits_0^1 |u|^p dx \right)^{2/p} + K(u) \right)}{\left(\int\limits_0^1 u^2(x) dx \right)^2} = 0\,.$$

Поскольку $G(u) = G\big(|u|\big)$, то можно считать, что $u(x) \geq 0$. Тогда, так как $u(x) \in \Gamma$, имеем

$$\int\limits_0^1 u'(x)z'(x)dx + \int\limits_0^1 u(x)^{p-1} z(x) dx + k^2 \big(u(0)z(0) + u(1)z(1) \big) = m \int\limits_0^1 u(x)z(x)dx\,,$$

то есть $u(x) \in H^1(0,1)$ является обобщенным решением краевой задачи (4.11) – (4.12). Можно доказать, что это решение является классическим (см., напр., [5]). В силу единственности решения задачи Коши для уравнения (4.11) имеем $u(x) > 0$. ■

Продолжим доказательство теоремы. Докажем, что $M_\gamma = m$.

Пусть $y(x) \in \Gamma$, тогда $y^{\frac{2}{\gamma-1}}(x) \in A_\gamma$. Имеем $R(y^{\frac{2}{\gamma-1}}, y) = G(y)$, откуда следует, что $\inf\limits_{y \in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(y^{\frac{2}{\gamma-1}}, y) = \inf\limits_{y\in\Gamma} R(y^{\frac{2}{\gamma-1}}, y) = \inf\limits_{y\in\Gamma} G(y) = G(u) = m$. Следовательно, $M_\gamma = \sup\limits_{q\in A_\gamma} \lambda_1 = \sup\limits_{q\in A_\gamma} \inf\limits_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q, y) \geq m$. Ранее было получено, что $M_\gamma \leq m$. Следовательно, $M_\gamma = m$, причем $M_\gamma = G(u) = R(u^{\frac{2}{\gamma-1}}, u)$. Таким образом, теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. *1.* Докажем, что если $\gamma > 1$, то $m_\gamma = \lambda_1^0$, где λ_1^0 — первое собственное значение задачи для уравнения $y'' + \lambda y = 0$ с условиями (4.2).

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для уравнения

$$y'' + \lambda y = 0\,, \tag{4.14}$$

с условиями (4.2). Пусть λ_1^0 – минимальное собственное значение этой задачи. Согласно вариационному принципу $\lambda_1^0 = \inf\limits_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(0,\, y)$, где

$$R(0,\, y) = \frac{\int\limits_0^1 y'^2(x)dx + k^2\left(y^2(0) + y^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx}\,.$$

Имеем для $\lambda_1(q)$ – минимального собственного значения задачи (4.1), (4.2):

$$\lambda_1(q) = \inf_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q, y) \geqslant \inf_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(0, y) = \lambda_1^0.$$

Тогда $m_\gamma = \inf\limits_{q(x)\in A_\gamma} \lambda_1(q) \geqslant \lambda_1^0$.

С другой стороны,

$$m_\gamma = \inf_{q\in A_\gamma}\left(\inf_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,\, y)\right) \leq \inf_{q\in A_\gamma} \frac{\int\limits_0^1 {y_1'}^2 dx + \int\limits_0^1 q(x) y_1^2 dx + k^2\left(y_1^2(0) + y_1^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y_1^2 dx} =$$

$$= \inf_{q\in A_\gamma}\left(\lambda_1^0 + \frac{\int\limits_0^1 q(x) y_1^2 dx}{\int\limits_0^1 y_1^2 dx}\right) \leq \lambda_1^0 + \frac{\int\limits_0^1 q_\varepsilon(x) y_1^2 dx}{\int\limits_0^1 y_1^2 dx}\,,$$

где $y_1(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda_1^0}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda_1^0}x$ – первая собственная функция задачи (4.14), (4.2),

$$q_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-1/\gamma}, & 0 < x < \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon < x < 1. \end{cases}$$

Заметим, что существуют такие константы N_1, N_2, что $N_1 \geqslant (y_1(x))^2 \geqslant N_2 > 0$ при $x \in [0,1]$. Отсюда имеем

$$\lambda_1^0 + \frac{\int\limits_0^1 q_\varepsilon(x) y_1^2 dx}{\int\limits_0^1 y_1^2 dx} \leqslant \lambda_1^0 + \frac{N_1}{N_2} \cdot \varepsilon^{1-1/\gamma} \to \lambda_1^0 \text{ при } \varepsilon \to 0\,.$$

Следовательно, $m_\gamma = \lambda_1^0$.

2. Докажем, что если $\gamma \leqslant 1$, то $m_\gamma \geqslant 1/4$.

Пусть $\Delta = \{y(x) : y(x) \in H_1(0,1) \setminus \{0\},\ \int\limits_0^1 y^2(x)dx = 1,\ y(x) \geqslant 0\}$. Заметим, что $\lambda_1 = \inf\limits_{y \in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,\, y) = \inf\limits_{y\in\Delta} R(q,\, y)$.

Пусть $\alpha = \int\limits_0^1 y'^2(x)dx$, $\beta = \min\limits_{y\in[0,1]} y = y(\xi)$, где $\xi \in [0,1]$. Используя равенство $y(x) = y(\xi) + \int\limits_\xi^x y'(s)ds$ и неравенство Гельдера, получим

$$y^2(x) \leqslant 2\beta^2 + 2\left(\int\limits_\xi^x y'(s)ds\right)^2 \leqslant 2\beta^2 + 2\int\limits_\xi^x y'^2(s)ds \leqslant 2\beta^2 + 2\alpha\,.$$

Для $y(x) \in \Delta$ получим следующее неравенство: $2\beta^2 + 2\alpha \geqslant 1$. Следовательно, для α и β верны оценки: (a) $2\alpha \geqslant 1/2$ или (b) $2\beta^2 \geqslant 1/2$.

(a) Рассмотрим случай $\alpha \geqslant 1/4$. Тогда для $y(x) \in \Delta$ и $q(x) \in A_\gamma$ при $k = 0$ и $\gamma \leqslant 1$ имеем

$$R(q,\, y) = \frac{\alpha + \int\limits_0^1 q(x)y^2dx}{1} \geqslant \frac{1}{4}\,,$$

(b) Теперь рассмотрим случай $\beta \geqslant 1/2$. Так как $y(x) \geqslant \beta$ для всех $y(x) \in [0,1]$, при $y(x) \in \Delta$ и $q(x) \in A_\gamma$ получим

$$R(q,\, y) = \frac{\int\limits_0^1 y'^2(x)dx + \int\limits_0^1 q(x)y^2dx}{1} \geqslant \int\limits_0^1 q(x)y^2dx \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_0^1 q(x)dx\,.$$

Из неравенства Гельдера следует

$$1 = \int\limits_0^1 q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} q^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} dx \leqslant \left(\int\limits_0^1 q(x)dx\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{при } \gamma < 0\,,$$

и

$$\int_0^1 q^\gamma(x)dx \leqslant \left(\int_0^1 q(x)dx\right)^\gamma \left(\int_0^1 1^{\frac{1}{1-\gamma}}dx\right)^{1-\gamma} \qquad \text{при } \gamma \in (0,1]\,.$$

Поэтому $\int_0^1 q(x)dx \geqslant 1$. Следовательно, $R(q,\,y) \geqslant \dfrac{1}{4}$ в обоих случаях, и

$$m_\gamma = \inf_{q\in A_\gamma}\left[\inf_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,\,y)\right] = \inf_{q\in A_\gamma}\left[\inf_{y\in\Delta} R(q,\,y)\right] \geqslant \frac{1}{4}\,.$$

3. I) Докажем, что если $\gamma > 0$, то $m_\gamma \leqslant \pi^2$, причем $m_\gamma \to \pi^2$ при $k\to\infty$.

a) Пусть

$$y_\delta(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi x}{\delta}, & 0<x<\delta,\\ 0, & \delta<x<1\end{cases} \quad \text{и} \quad q_\delta(x) = \begin{cases} 0, & 0<x<\delta,\\ (1-\delta)^{-\frac{1}{\gamma}}, & \delta<x<1,\end{cases}$$

где $\delta\to 1-0$. Имеем $R(q_\delta,\,y_\delta) = \dfrac{\frac{\pi^2}{2\delta}+0+k^2\sin^2\frac{\pi}{\delta}}{\delta/2}$, откуда следует

$$m_\gamma = \inf_{q\in A_\gamma}\left[\inf_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,\,y)\right] \leqslant R(q_\delta,\,y_\delta) \to \pi^2 \text{ при } \delta\to 1-0.$$

b) Рассмотрим λ_1^0 — первое собственное значение задачи (4.14), (4.2), которое при $k^2 > \pi/2$ является минимальным положительным решением уравнения

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \frac{2\sqrt{\lambda}k^2}{\lambda - k^4}\,. \tag{4.15}$$

При $k\to\infty$ это решение стремится к $\pi^2 - 0$. Так как $m_\gamma \geq \lambda_1^0$, получим, что $m_\gamma\to\pi^2$ при $k\to\infty$.

Заметим, что при $k^2\to 0$ имеем $\lambda_1^0 \to 0$.

II) Докажем, что если $\gamma>0$, то $m_\gamma \geqslant \pi^2 - \frac{4\pi^2}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right)$ при $k\to\infty$.

Сделаем в уравнении (4.15) замену $z = 1/k^2$, $t=\sqrt{\lambda}$, тогда уравнение примет вид

$$\operatorname{tg} t = -\frac{2tz}{1-t^2z^2}\,. \tag{4.16}$$

Функция $F(z,\,t) = \operatorname{tg} t + \frac{2tz}{1-t^2z^2}$ непрерывна вместе со своими производными любого порядка в точке $(z_0,\,t_0) = (0,\,\pi)$, в этой точке равна нулю, и ее производная $F_t{}'(z_0,\,t_0)\neq 0$. Поэтому в некоторой окрестности точки $(z_0,\,t_0)$ существует единственное решение $t(z)$ уравнения (4.16), причем $t(z_0)=t_0$, и функция $t(z)$ непрерывна со своими производными любого порядка.

Из непрерывности производных функции $t(z)$ следует, что в окрестности точки $(z_0,\,t_0)$ верна формула Тейлора $t(z) = t(z_0) + \frac{t'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \cdots + \frac{t^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1} +$

$O((z-z_0)^n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Найдем коэффициенты для первых двух членов этой формулы: $t(z_0) = \pi$, $t'(z_0) = -2\pi$. Получим $t(z) = \pi - 2\pi z + O(z^2)$. Таким образом, при $k \to \infty$ имеем $m_\gamma \geqslant t^2 = \pi^2 - \frac{4\pi^2}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right)$. Теорема 2 доказана. ■

5. Доказательство теоремы 3. *1.* Заметим, что утверждение 1 теоремы 1 и утверждение 2 теоремы 2 верны для всех k.

2,3. Докажем, что если $\gamma \geqslant 1$ и $k = 0$, то $M_\gamma = 1$.

При $q(x) \equiv 1$ и $k = 0$ задача (4.1)–(4.2) имеет следующий вид:

$$y'' - y + \lambda y = 0, \tag{4.17}$$

$$y'(0) = y'(1) = 0. \tag{4.18}$$

Эта задача имеет минимальное собственное число $\lambda_1^1 = 1$. Отсюда следует, что $M_\gamma = \sup\limits_{q(x)\in A_\gamma} \lambda_1(q) \geqslant \lambda_1(1) = 1$.

С другой стороны, положим $y_1(x) = \varepsilon$, тогда, используя неравенство Гельдера и условие (4.3), получим

$$\lambda_1(q) \leqslant R(q,\, y_1) = \frac{\varepsilon^2 \int\limits_0^1 q(x)dx + 2k^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = \int\limits_0^1 q(x)dx + 2k^2 \leqslant 1 + 2k^2 \tag{4.19}$$

при всех $q(x) \in A_\gamma$ и всех k.

Имеем $M_\gamma = \sup\limits_{q\in A_\gamma} \lambda_1(q) \leqslant 1 + 2k^2$. при всех k и $M_\gamma \leqslant 1$ при $k = 0$. Следовательно, $M_\gamma = 1$.

1,2. Докажем, что при $k = 0$ имеем: если $\gamma < 1$, то $m_\gamma \leqslant 1$; если $\gamma = 1$, то $m_\gamma < 1$.

Неравенство $m_\gamma \leq \lambda_1^1 = 1$ выполняется для всех γ. Пусть $\gamma = 1$ и предположим, что $m_\gamma = 1$, тогда $\inf\limits_{q\in A_\gamma} \lambda_1(q) = m_\gamma = M_\gamma = \sup\limits_{q\in A_\gamma} \lambda_1(q)$, то есть при всех $q(x)$ мы будем иметь одно и то же минимальное собственное значение. Это значит, что при любом $q(x) \in A_\gamma$ и $\lambda = 1$ задача (4.1), (4.18) имеет нетривиальное решение. Но при

$$q(x) = q_*(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1/2\,, \\ 0, & 1/2 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

задача (4.1), (4.18) не имеет нетривиальных решений, для которых $y'(x)$ непрерывна (см. постановку задачи), то есть мы пришли к противоречию. Следовательно, $m_1 < 1$.

3. Докажем, что если $\gamma > 1$ и $k = 0$, то $m_\gamma = 0$.

Пусть $y_1 = 1$, $q_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-1/\gamma}, & 0 < x < \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon < x < 1. \end{cases}$ Тогда при $\gamma > 1$ имеем

$$m_\gamma = \inf_{q\in A_\gamma} \left[\inf_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,\, y) \right] \leqslant R(q_\varepsilon,\, y_1) = \varepsilon^{1-1/\gamma} \to 0 \;\text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, получили $m_\gamma = 0$. ■

Примечание. Можно построить графики зависимости m_γ и M_γ от k^2 для разных значений γ (рис. –). При этом для случаев, когда точную оценку получить не удается, можно указать области на плоскости $k^2 O\lambda$, которым принадлежат m_γ и M_γ. Для построения данных графиков использовались результаты, полученные при доказательстве теорем 1 – 3, и следующие рассуждения.

1) Функции $\lambda_1^1(k^2)$ и $\lambda_1^0(k^2)$ (первые собственные значения задач (4.14), (4.2) и (4.17), (4.2) соответственно) непрерывны по k^2, возрастают с увеличением k^2 и при $k\to\infty$ стремятся к первым собственным значениям соответствующих задач Дирихле (см., напр., [6]). При доказательстве теоремы 2 были получены предельные значения λ_1^0 при $k\to 0$ и при $k\to\infty$, и заметим, что $\lambda_1^1=\lambda_1^0+1$.

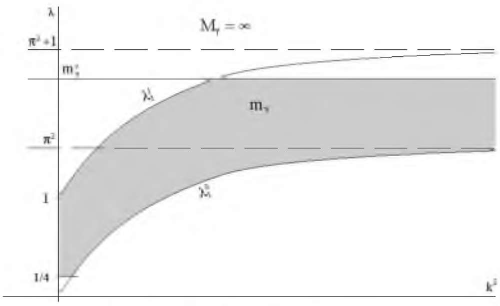

Рис. 1. Случай $\gamma<0$.

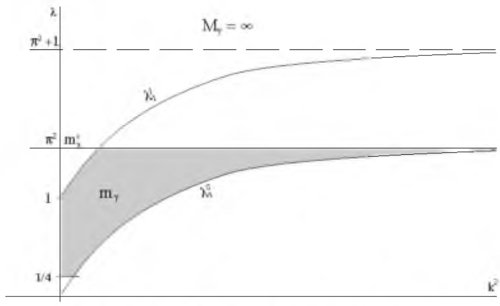

Рис. 2. Случай $\gamma\in(0;1)$.

2) Имеем

$$\lambda_1=\inf_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}}\frac{\int\limits_0^1 y'^2(x)dx+\int\limits_0^1 q(x)y^2(x)dx+k^2\left(y^2(0)+y^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx}\geq$$

$$\geq\inf_{y\in H_1^0(0,1)\setminus\{0\}}\frac{\int\limits_0^1 y'^2(x)dx+\int\limits_0^1 q(x)y^2(x)dx+k^2\left(y^2(0)+y^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx}=$$

$$=\inf_{y\in H_1^0(0,1)\setminus\{0\}}\frac{\int\limits_0^1 y'^2(x)dx+\int\limits_0^1 q(x)y^2(x)dx}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx}=\lambda_1^c,$$

где λ_1^c – первое собственное значение задачи Дирихле для уравнения (4.1) при условии $q(x)\in A_\gamma$. Следовательно, $m_\gamma\geq m_\gamma^c$ и $M_\gamma\geq M_\gamma^c$, где m_γ^c и M_γ^c — соответствующие оценки для λ_1^c, полученные для всех γ в работе [4].

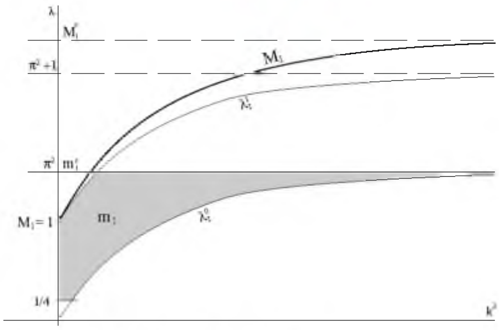

Рис. 3. Случай $\gamma = 1$.

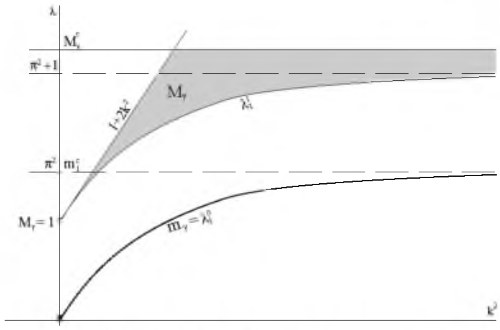

Рис. 4. Случай $\gamma > 1$.

Литература

1. Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. On Spectral theory of elliptic operators // Operator theory: Advances and Applications / Birkhouser. – 1996. – 89. – 326 p.
2. Мурышкина О.В. Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с симметричными краевыми условиями // Вестник молодых ученых. Серия:Прикладная математика и механика – 2005. – 1. – С.36-52.
3. Винокуров В.А., Садовничий В.А. О границах изменения собственного значения при изменении потенциала // Доклады Академии наук. – 2003. – 392;5. – С.592-597.
4. Ежак С.С. Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с интегральным условием // Современная математика и ее приложения. – 2005. – 36. – С.56-69.
5. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения // М: Наука, 1988. – С.1-304.
6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, Т.1 / М.-Л.: ГТТИ, 1933. – 538 с.

ON ESTIMATES OF MINIMAL EIGENVALUE OF STURM-LIOUVILLE's PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION AND THIRD-TYPE BOUNDARY CONDITIONS

E.S. Karulina

Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics,
Nezhinskaya St., 7, Moscow, Russia, e-mail: karulinaes@yandex.ru

Abstract. The Sturm-Liouville problem with third-type boundary conditions and an integral condition is under consideration. First eigenvalue λ_1 of this problem for different values of the parameters is estimated.

Key words: boundary problem, estimates for the first eigenvalue