УДК 517.987

ПЛОСКИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучаются плоские стационарные решения системы уравнений нелинейного переноса, подчиняющиеся дополнительной дифференциальной связи – условию соленоидальноости. Получено общее решение этой системы уравнений в виде формулы, полностью описывающей многообразие сильных стационарных решений.

Ключевые слова: гидродинамика идеальной жидкости, стационарные течения, условие несжимаемости.

1. Постановка задачи. Гидродинамика идеальной несжимаемой жидкости основана на описании течений посредством векторного поря $v : D \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^3$, $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ (D – область в $\mathbb{R}^3$) – т.н. *эйлерово описание*, которое определяет направление течения жидкости в каждой пространственной точке с радиус-вектором $x = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ в момент времени $t \in \mathbb{R}_+$. Система дифференциальных уравнений, которой подчиняется семейство векторных полей $v : D \mapsto \mathbb{R}^3$, параметризованное посредством $t \in \mathbb{R}_+$, получается из элементарных соображений, которые основаны на ньютоновском динамическом уравнении для элемента объёма жидкости (см., например, [1]). При условии постоянства плотности ρ, это уравнение имеет вид

$$\frac{Dv}{Dt} = f(x, t)/\rho\,, \tag{1}$$

где $f(x, t)$ – значение поля внешних сил, действующих на элемент объёма в точке с радиус-вектором x, в момент времени t, $D(\cdot)/Dt$ – т.н. полная (субстанциальная) производная, которая описывает малые линейные изменения за время dt динамического состояния этого элемента,

$$v_k\left(x + v(x,t)dt, t + dt\right) - v_k(x, t) \equiv \left(\frac{Dv_k}{Dt}\right)(x, t)dt + o(dt)\,.$$

Она, согласно определению, вычисляется по формуле

$$\frac{Dv_j}{Dt} = \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\,, \quad j = 1, 2, 3$$

(по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование с $k = 1, 2, 3$). Таким образом, уравнение (1) в стандартной форме дифференциальных уравнений с частными производными выглядит следующим образом

$$\dot{v}_j + v_k \nabla_k v_j = f_j/\rho\,, \qquad j = 1, 2, 3\,, \tag{2}$$

где введены обозначения $\dot{v}_j = \partial v_j/\partial t$, $\nabla_k(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial x_k$.

Дифференциальное уравнение (2) для векторного поля $v(x,t)$ представляет собой систему из трёх уравнений для трёх функций $v_j(x,t)$, $j = 1,2,3$, то есть эта система является определённой. Поэтому может быть поставлена задача об описании многообразия $\mathfrak{M}(D)$ всех её решений (сильных) для фиксированной области D. Однако, в гидродинамике идеальной жидкости на решения $v(x,t)$ системы (2) накладывается дополнительное условие следующего вида

$$\nabla_k v_k = 0\,, \tag{3}$$

которое, с физической точки зрения, выражает условие несжимаемости жидкости. В этом случае для описания течений жидкости необходимы только такие решения $v_j(x,t)$, $j = 1,2,3$, удовлетворяющие также уравнению (3), которое, следуя механической терминологии, можно трактовать как дифференциальную связь, налагаемую на решения системы (2). Таким образом, требуемые для описания гидродинамических течений векторные поля удовлетворяют расширенной системе уравнений, которая является уже переопределённой, и поэтому описание многообразия $\mathfrak{M}_0(D) = \{v \in \mathfrak{M}(D) : \nabla_k v_k = 0\} \subset \mathfrak{M}(D)$ всех такого рода векторных полей усложняется. При этом важно установить насколько богато многообразие $\mathfrak{M}_0(D)$, чтобы иметь возможность описывать физически интересные течения жидкости. Следующий пример иллюстрирует то положение, при котором сужение многообразия $\mathfrak{M}(D)$ до многообразия $\mathfrak{M}_0(D)$ может быть очень существенным.

Пример. Рассмотрим так называемые *потенциальные течения*, для которых существует потенциал $\Phi(x,t)$ так, что поле представимо в виде $v_j(x,t) = \nabla_j\Phi(x,t)$, $j = 1,2,3$. В этом случае из уравнения (2) при $f_j \equiv 0$ следует

$$\nabla_j\left(\dot{\Phi} + \frac{1}{2}\,[\nabla_k\Phi]^2\right) = 0\,, \quad j = 1,2,3\,,$$

то есть

$$\dot{\Phi} + \frac{1}{2}\,[\nabla_k\Phi]^2 = C(t)$$

с произвольной функцией $C(t)$. Эта функция может быть исключена посредством замены

$$\Phi(x,t) = \Phi_0(x,t) + \int_0^t C(s)ds\,.$$

Нетривиальные (отличные от постоянных) решения уравнения

$$\dot{\Phi}_0 + \frac{1}{2}\,[\nabla_k\Phi_0]^2 = 0\,, \tag{4}$$

наверняка, существуют, так как, в частности, разделяя переменные, можно положить

$$\Phi_0(x,t) = \alpha(t)\Psi(x)\,,$$

где

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2(t)} = -2\omega^2\,,$$

и поэтому

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0}{1 + 2\alpha_0\omega^2 t}\,.$$

Таким образом, конструируемое решение при $\alpha_0 > 0$ является глобальным (существующим на $[0,\infty)$). Функция $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$[\nabla_k \Psi]^2 = 4\omega^2 \Psi$$

с богатым многообразием решений. В частности, положив $\Psi(x) = \psi(x_1)$, имеем

$$\frac{d\psi}{dx_1} = \pm 2\omega\sqrt{\psi}\,, \qquad \psi(x_1) = (\psi(0) \pm \omega x_1)^2\,,$$

$$v = \pm 2\alpha(t)\omega x_1 e_1\,.$$

В то же время, если учесть условие несжимаемости, которое, в данном случае, принимает вид $\Delta\Phi = 0$, то, так как $\Delta\dot{\Phi} = 0$, из (4) следует $\Delta[\nabla_k\Phi]^2 = 0$ или, что эквивалентно, $[\nabla_k\nabla_l\Phi]^2 = 0$. Это означает, что след квадрата симметричной матрицы $\nabla_k\nabla_l\Phi$, $k,l = 1,2,3$ равен нулю. Поэтому и сама матрица равна нулю. Откуда $\nabla_k\nabla_l\Phi = 0$ и мы получаем, что все потенциальные поля $v_k(x,t) = \nabla_k\Phi$ из многообразия $\mathfrak{M}_0(D)$ не зависят от x. Подстановка же этих выражений в исходные уравнения (2) при $f_j = 0$ показывает, что они не зависят также от t.

Рассмотренный пример показывает насколько важно дать ответ на поставленный выше вопрос о структуре многообразия $\mathfrak{M}_0(D)$. В этой статье мы отвечаем на него в том случае, когда поле $v(x,t)$ является стационарным, то есть не зависит от t. Тогда, система (3) для поля $v : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ принимает вид

$$v_k \nabla_k v_j = 0\,, \quad j = 1,2,3\,. \tag{5}$$

Более того, мы ограничиваемся только случаем плоских течений, когда $v_3(x) = 0$ и v не зависит от x_3.

2. Стационарные решения. Описание многообразия всех решений системы уравнений (3) и (5) при $d = 2$ основано на специальном представлении их пространственных производных в виде произведения вспомогательных функций, которые подчиняются в некотором смысле более простой системе уравнений.

Введём матрицу G согласно формуле

$$(\mathsf{G})_{kl} = \nabla_k v_l\,, \quad k,l = 1,2\,.$$

Тогда из уравнений (3), (5) следует

Лемма 1.

$$\mathsf{G}^2 = 0\,. \tag{6}$$

☐ Уравнение $\nabla_k v_k = 0$ означает, что $\mathrm{Sp}\mathsf{G} = 0$. Применяя операцию дивергенции к векторному уравнению (5), получим

$$\nabla_k(v_l\nabla_l v_k) = (\nabla_k v_l)(\nabla_l v_k) + v_l\nabla_l(\nabla_k v_k) = \mathrm{Sp}\,\mathsf{G}^2 = 0\,.$$

Так как для 2×2-матриц имеет место $\det\mathsf{G} = \left((\mathrm{Sp}\,\mathsf{G})^2 - \mathrm{Sp}\,\mathsf{G}^2\right)/2$, то уравнение Гамильтона-Келли [2]

$$\mathsf{G}^2 - \mathsf{G}\mathrm{Sp}\,\mathsf{G} + \det\mathsf{G} = 0$$

матрицы G сводится к (6). ■

Лемма 2. *Для того чтобы 2×2-матрица G обладала свойством $\mathsf{G}^2 = 0$, необходимо и достаточно чтобы она имела вид*

$$\mathsf{G} = u\begin{pmatrix} 1 & w^{-1} \\ -w & -1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $w : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, причём в этой формуле возможны предельные значения $u = 0$, $w = \infty$ (либо $u = 0$, $w = 0$) так, что $uw < \infty$ (либо $u/w < \infty$).

☐ Доказательство достаточности представления (7) получается непосредственным вычислением $\mathsf{G}^2 = 0$ с матрицей вида (7).

Пусть

$$\mathsf{G} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда представление (7) получается посредством вычисления общего решения системы уравнений

$$u_{11}^2 + u_{12}u_{21} = 0\,, \quad u_{22}^2 + u_{12}u_{21} = 0\,,$$

откуда $u_{11}^2 = u_{22}^2$, и, кроме того,

$$u_{11}u_{12} + u_{12}u_{22} = 0\,, \quad u_{21}u_{11} + u_{22}u_{21} = 0\,.$$

При $u_{11} = u_{22} \equiv u \neq 0$ получаем противоречие, так как из второй пары уравнений следует $u_{12} = u_{21} = 0$ и, следовательно, из первой – $u = 0$. Если же $u = 0$, то вторая пара уравнений выполняется тождественно, а из первой следует $u_{21}u_{21} = 0$. В этом случае, либо $u_{12} = u \neq 0$, $u_{21} = 0$, либо $u_{21} = u \neq 0$, $u_{12} = 0$.

Наконец, при $u_{11} = -u_{22} \equiv u \neq 0$ вторая пара уравнений выполняется тождественно, а из первой следует $u_{12}u_{21} = -u^2$. Положив $u_{21} = -uw$, получим $u_{21} = u/w$. ■

Воспользовавшись представлением (7), запишем, согласно определению матрицы G,

$$\begin{aligned} &\nabla_1 v_1 = u\,, && \nabla_2 v_1 = -uw\,, \\ &\nabla_1 v_2 = u/w\,, && \nabla_2 v_2 = -u\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Для возможности такого представления необходимо и достаточно, чтобы

$$\nabla_2\nabla_1 v_1 = \nabla_2 u = -\nabla_1 uw\,, \quad \nabla_2\nabla_1 v_2 = \nabla_2(u/w) = -\nabla_1 u\,.$$

Следовательно, для выполнимости (8) необходимо и достаточно чтобы функции u и w подчинялись системе уравнений

$$\begin{aligned} \nabla_1(uw) \;&+\; \nabla_2 u &&= 0\,,\\ \nabla_1 u \;&+\; \nabla_2(u/w) &&= 0\,. \end{aligned} \tag{9}$$

С другой стороны, если имеет место (8), то для выполнимости системы уравнений $v_l\nabla_l v_k = 0$, $k = 1, 2$ (при этом уравнение $\nabla_k v_k = 0$ удовлетворяется автоматически), необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$v_1 = wv_2\,, \tag{10}$$

в чём убеждаемся непосредственной подстановкой формул (8) в эту систему. Дифференциальное уравнение согласования (10) приводит к следующему

$$u = \nabla_1 v_1 = (\nabla_1 w)v_2 + w\nabla_1 v_2 = v_2(\nabla_1 w) + u\,,$$

то есть при $v_2 \neq 0$ должно иметь место $\nabla_1 w = 0$. Если же $v_2 = 0$, то $u = 0$ и $w = 0$ так, что $u/w < \infty$ и это отношение является функцией только от x_2. Таким образом, нами доказана

Лемма 3. *Все стационарные решения системы уравнений (3), (5) определяются на основе функций $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ и $w : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, которые удовлетворяют системе (9), в которой функция w не зависит от x_1. В частности, $u = w = 0$ так, что функция $u/w \neq 0$ не зависит от x_1.*

Замечание. Система (9) вырожденная, так как она обладает только одним инвариантом Римана (см., например, [3]). В самом деле, записав систему (9) в матрично-векторном виде

$$\mathsf{H}_1\nabla_1 \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + \mathsf{H}_2\nabla_2 \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = 0\,,$$

где введены 2×2-матрицы

$$\mathsf{H}_1 = \begin{pmatrix} w & u \\ w & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & u \\ w & -w \end{pmatrix},$$

приведём подействовав на неё слева матрицей

$$\mathsf{H}_1^{-1} = \frac{1}{uw}\begin{pmatrix} 0 & u \\ w & -w \end{pmatrix},$$

к форме

$$\nabla_1 \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + \mathsf{H}\nabla_2 \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = 0\,,$$

где

$$\mathsf{H} = \frac{1}{w^2}\begin{pmatrix} w & -u \\ 0 & w \end{pmatrix}.$$

Так как матрица H треугольная с совпадающими диагональными элементами, то она имеет единственное собственное значение – инвариант Римана, равное w^{-1}.

Перейдём теперь к доказательству основного утверждения работы.

Теорема. *Многообразие стационарных решений совместной системы уравнений (3) и (5) определяется формулой*

$$v_k(x) = n_k V\left((a, x)\right), \quad k = 1, 2, \tag{11}$$

$V : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, $(a, x) = a_1 x_1 + a_2 x_2$ и постоянные векторы $a = \langle a_1, a_2 \rangle$ и $n = \langle n_1, n_2 \rangle$ взаимно ортогональны.

□ Достаточность условий, перечисленных в формулировке теоремы, для того чтобы пара функций $v_k(x)$, $k = 1, 2$, определяемых (11), удовлетворяла системе (3), (5) проверяется непосредственной подстановкой выражения (11) в эту систему. Необходимость же этих условий следует из Леммы 3. Сначала из пары уравнений (9), вычитанием получаем, что

$$w\nabla_1 w + \nabla_2 w = 0\,.$$

Так как, согласно лемме 3, w не зависит от x_1, то из этого уравнения следует, что w не зависит также и от x_2. Следовательно $w = \text{const}$. Тогда уравнения системы (9) эквивалентны друг другу и их общим решением является $u = V'(x_1 - wx_2)$, где $V : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. На основе общего вида функции u, из первой пары соотношений (8) получаем $v_1 = V(x_1 - wx_2)$, а из второй пары следует $v_2 = w^{-1} V(x_1 - wx_2)$. Положив $a = \langle 1, -w \rangle$, $n = \langle 1, w^{-1} \rangle$, получаем формулу (11). ■

3. Заключение. Применённый выше при решении задачи метод факторизации – представления производных поля v в форме (8) можно также применить при отыскании нестационарных плоских решений, так как леммы 1 и 2 имеют место в общем случае. Однако, в случае нестационарности сложно учитывать свойство согласованности, аналогичное (10), так как в этом случае оно содержит также частную производную по времени.

Найденный общий вид (11) стационарных плоских течений показывает, что условие несжимаемости очень сильно сужает класс возможных решений. При введении граничных условий прилипания $v|_{\partial D} = 0$ оказывается, что ненулевые решения возможны только в прямолинейных каналах с неизменных поперечным сечением. Для таких течений, в частности, известный в гидродинамике закон Бернулли становится бессодержательным.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / Л.Д. Ландау. – М.: Наука, 1988. – 732 с.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

3. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений / Б.Л. Рождественский. – М.: Наука, 1978. – 688 с.

PLANE STATIONARY FLOWS OF IDEAL INCOMPRESSIBLE LIQUID

Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. Plane stationary solutions of nonlinear translation equation system are studied in the case when they obey to supplementary differential tie, i.e. the solenoidality condition. General solution of this equation system is obtained, i.e. it is found the formula that describes the manifold of strong stationary solutions.

Key words: hydrodynamics of ideal liquid, stationary flows, incompressibility condition.